

УДК 621.01

**Р.В. Амбарцумянц**, д-р. техн. наук, проф.,  
**А.А. Чиж**, канд. физ.-мат. наук., проф.,  
Одес. нац. акад. пищевых технологий

## СИЛОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ПАССИВНЫМИ СВЯЗЯМИ

*Р.В. Амбарцумянц, А.А. Чиж. Силові дослідження плоских механізмів з пасивними зв'язками.* Розв'язано задачу силового дослідження плоскої структурної групи Ассура другого класу з обертальними кінематичними парами та з пасивним зв'язком. Переміщення, обумовлені деформацією ланок ланцюга визначаються за формулами Верещагіна та Симпсона. Наведено числовий приклад.

*Ключові слова:* сила, пасивний зв'язок, обертальна пара, згинальний момент, реакція, епогра

*Р.В. Амбарцумянц, А.А. Чиж. Силовое исследование плоских механизмов с пассивными связями.* Решена задача силового исследования плоской структурной группы Ассура второго класса с вращательными парами и с пассивной связью. Перемещения, обусловленные деформацией звеньев цепи, определяются по формулам Верещагина и Симпсона. Приведен числовой пример.

*Ключевые слова:* сила, пассивная связь, вращательная пара, изгибающий момент, реакция, эпюра

*R.V. Ambartsumyants, A.A. Chizh. The force research of the plane mechanisms with passive bonds.* The force research problem of the plane structural Assures group of the second class with turning kinematic pairs and with a passive bond is solved. The displacements due to deformation of the chain links are determined by Vereshchagin's and Simpson's formulae. A numerical illustration is attached.

*Keywords:* force, passive bond, turning pair, bending moment, reaction, diagram

При проектировании новых и анализе существующих механизмов их силовое исследование занимает важное место. Знание величин сил, действующих в механизме, необходимо для установления рациональных конструктивных форм деталей механизмов, расчета их на прочность, жесткость, на работоспособность, оценки потери мощности, а также решения такие важных задач как регулирование движения механизма, уравнивание механизма на фундаменте, определение необходимой мощности двигателя и др.

Силовое исследование механизмов осуществляется методом кинетостатики для структурных групп, входящих в состав механизма. Предполагается, что в таких группах отсутствуют лишние связи, ограничивающие относительные движения звеньев в кинематических парах [1].

В различных отраслях машиностроения, особенно в тяжелом машиностроении, для улучшения условий работы механизмов, повышения их прочностных характеристик, жесткости, уменьшения металлоемкости в состав их вводят так называемые пассивные связи, которые, однако, не ограничивают движение механизма. Например, в планетарных и дифференциальных механизмах вводят несколько сателлитов для улучшения их динамических характеристик, в механизме шарнирного параллелограмма вводят параллельный шатун и др. [2]. Ввод таких пассивных связей позволяет общий поток мощности перераспределить на несколько потоков мощности меньших значений, что приводит к существенному уменьшению массо – инерционных и габаритных размеров звеньев, через которые передаются эти потоки. Иногда пассивные связи возникают из-за переменности структуры механизма во время его работы внутри одного цикла. Например, в рычажных и зубчато-рычажных механизмах периодического поворота в периоды остановки выходного звена в подвижной части механизма возникает пассивная связь.

В технической литературе и учебниках по теории механизмов и машин не предложены общедоступные методы силового исследования механизмов с пассивными связями. Отсутствие такого метода затрудняет работу конструкторов, так как они часто (из-за отсутствия реальной информации о силах в механизме, особенно в кинематических парах) принимают неэффективные

решения при окончательном выборе усилий для завершения последнего этапа конструирования.

Целью настоящей работы является разработка метода силового исследования плоских структурных групп Ассура с пассивными связями, что может быть использовано как конструкторами, так и научными сотрудниками в научно-исследовательских работах.

Известно, что группы Ассура, будучи присоединенными своими свободными элементами кинематических пар к основанию механизма, образуют неподвижную систему (ферму). Рассмотрим группу Ассура второго класса (по классификации И.И. Артоболевского [1]) с параллельным шатуном. Такая группа входит в состав шарнирного параллелограмма, нашедшего широкое применение в паровозах, локомотивах и др. Предполагаем, что группа образована только вращательными кинематическими парами, все внешние силы и моменты сил известны (рис. 1, а). Параллельный к шатуну  $AB$ , шатун  $CD$  вносит пассивную связь, звенья группы нагружены силами  $F_1, F_2, F_3$  и моментом  $M$ , действующим в элементе вращательной пары  $E$ . Для удобства дальнейших выводов на рисунке 1 шатуны  $AB, CD$  расположены горизонтально и обозначены цифрами 1 и 2.

Обозначим звено  $BE$  числом 3, а углы векторов сил —  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), длины звеньев —  $l_1, l_2, l_{BD}=l_3$  и  $l_{DE}=l_4$ . Из анализа представленной схемы легко установить, что, будучи присоединенными к основанию свободными элементами кинематических пар (см. рисунок 1, а), число уравнений статики меньше, чем число неизвестных реакций в кинематических парах.

Раскроем статическую неопределимость по методу сил [3]. Для этого вращательные кинематические пары заменяем шарнирно подвижными опорами вдоль продольных осей звеньев и перпендикулярно к ним (рис. 1, б). Поскольку оси вращения всех кинематических пар параллельны между собой, то можно рассмотреть плоскую механическую систему

Установим степень (кратность) статической неопределимости плоской системы по формуле

$$n = 3\sigma - p_1, \tag{1}$$

где  $\sigma$  — число замкнутых контуров с учетом также контуров, образованных “опорными стержнями”, при этом основание системы (стойка) принимается как отдельное звено (стержень);

$p_1$  — число простых шарниров, т.е. число одноподвижных кинематических пар.

Согласно рисунку 1, б имеем  $\sigma = 5, p_1 = 14$ . После подстановки в выражение (1) находим  $n=3 \cdot 5 - 14 = 1$ . Это значит, что рассматриваемая система единожды статически неопределима. Аналогичный результат получим, если воспользуемся другим выражением

$$n = 2p_1 - 3m, \tag{2}$$

где  $m$  — число звеньев группы Ассура с параллельным шатуном.

Согласно рисунку 1, а имеем  $m=3, p_1=5$  и  $n=2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$ .

Поскольку пассивная связь только одна, то переходим к построению эквивалентной расчетной схемы без лишней связи. Для этого отбрасываем один из шарниров, например, шарнир  $C$ , и действие отброшенной части заменяем усилием  $\bar{X}_1$  (рис. 2, а).

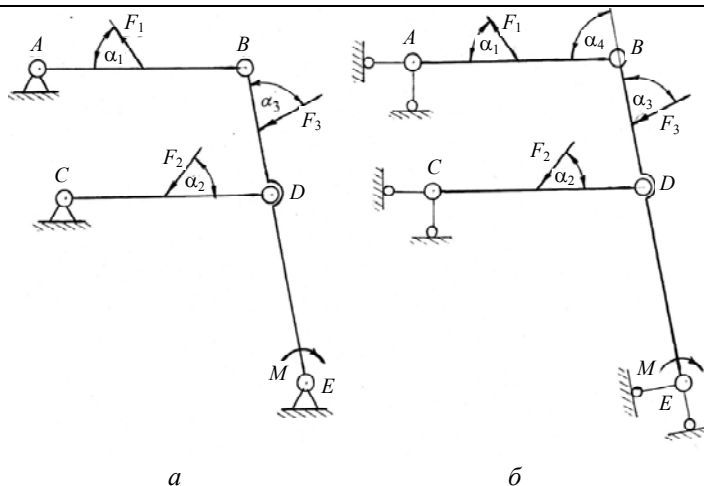


Рис. 1. Группа Ассура с пассивной связью: соединенная с основанием (а), эквивалентная система с шарнирно подвижными опорами (б)

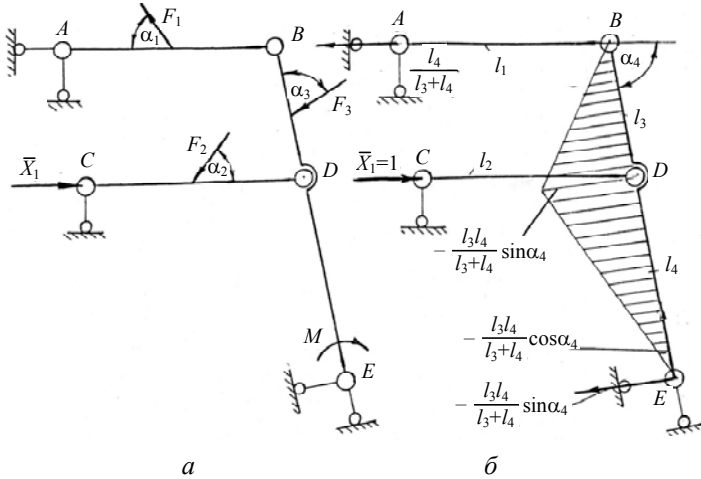


Рис. 2. Эквивалентная расчетная схема без лишних связей (а), расчетная схема “единичное состояние 1” и эпюра изгибающего момента \$M\_{z1}\$ (б)

С целью упрощения дальнейших расчетов принимаем точки приложения сил, совпадающими с геометрическими центрами звеньев \$AB\$, \$CD\$ и \$BD\$. Записываем уравнение совместности деформаций (уравнение перемещений) в форме канонического уравнения метода сил

$$\delta_{11} \bar{X}_1 + \Delta_{1F}, \tag{3}$$

где \$\delta\_{11}\$ — удельное горизонтальное перемещение центра шарнира \$C\$, вызванное единичной силой \$\bar{X}\_1 = 1\$;

\$\Delta\_{1F}\$ — грузовое горизонтальное перемещение центра шарнира \$C\$, вызванное внешней нагрузкой.

Величины \$\delta\_{11}\$ и \$\Delta\_{1F}\$, входящие в уравнение (3), определим энергетическим методом, т.е. путем перемножения соответствующих эпюр изгибающих моментов с использованием формул Верещагина и Симпсона [4]

$$\delta_{11} = M_{z1} \cdot M_{z1} = \frac{l_3^2 l_4^2 \sin^2 \alpha_4}{3(l_3 + l_4)EI_z}, \quad \Delta_{1F} = M_{zF} \cdot M_{z1}. \tag{4}$$

Расчетная схема системы “единичное состояние”, а также эпюра изгибающего момента \$M\_{z1}\$ представлены на рис. 2.

Расчетная схема, “грузовое состояние” (рис. 3, а), является статически определимой системой, что и позволяет составить уравнения равновесия статики. Из уравнения равновесия суммы моментов всех сил относительно точки \$E\$ находим

$$\bar{X}_{AF} = \frac{1}{(l_3 + l_4) \sin \alpha_4} \left[ \begin{aligned} &\frac{l_3 + l_4}{2} F_1 (2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_4 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_4) + \\ &\frac{l_3 + 2l_4}{2} F_3 \sin \alpha_3 + (2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_4 + \\ &\quad + \sin \alpha_2 \cos \alpha_4) \frac{F_2 l_4}{2} - M \end{aligned} \right]. \tag{5}$$

Из уравнения проекции всех сил на направление прямой \$BE\$ и перпендикулярно к ней получим

$$\bar{X}_{EF} = \frac{F_2}{2} (\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 - 2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_4) - \frac{F_1}{2} (\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_4) + F_3 \cos \alpha_3 + \bar{X}_{AF} \cos \alpha_4, \tag{6}$$

$$\bar{Y}_{EF} = \frac{F_1}{2} (2 \sin \alpha_4 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_4 \sin \alpha_1) + \frac{F_2}{2} (\sin \alpha_2 \cos \alpha_4 + 2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_4) + F_3 \sin \alpha_3 - \bar{X}_{AF} \sin \alpha_4. \tag{7}$$

$$\text{Реакции } \bar{Y}_{AF} = \frac{F_1}{2} \sin \alpha_1 \text{ и } \bar{Y}_{CF} = \frac{F_2}{2} \sin \alpha_2$$

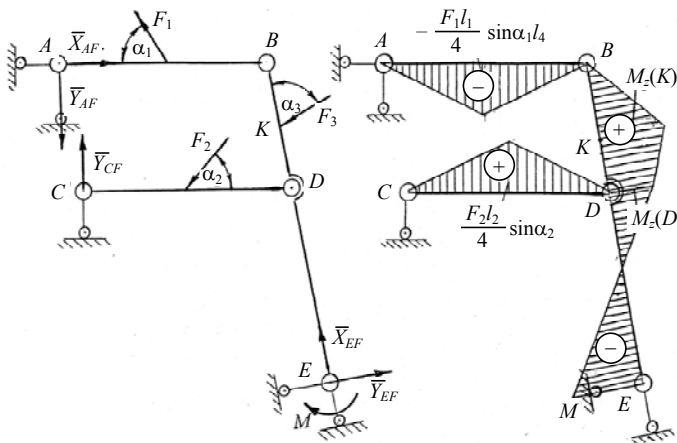
определены из условий суммы моментов сил относительно точек  $B, D$  звеньев  $AB, CD$ , соответственно.

Эпюра изгибающих моментов  $M_{zF}$  грузового состояния представлена на рис. 3, б. При построении такой эпюры значение изгибающего момента в точках  $K$  и  $D$  звена  $EB$  определяется из выражений

$$M_z(K) = (\bar{X}_{AF} - F_1 \cos \alpha_1) 0,5 l_3 \sin \alpha_4 + 0,25 F_1 l_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_4;$$

$$M_z(D) = \bar{Y}_{EF} l_4 - M.$$

Неизвестное усилие  $\bar{X}_1$  находим после того, когда из выражения (4) найдено значение  $\Delta_{1F}$ . Имеем



а

Рис. 3. Расчетная схема “грузовое состояние” (а), эпюра изгибающего момента  $M_{zF}$  для грузового состояния (б)

$$\bar{X}_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}. \tag{8}$$

Таким образом, статическая неопределимость система раскрыта, и реакции в шарнирах  $A, B, C$ , принимая во внимание общепринятые обозначения составляющих реакций в кинематических парах в теории механизмов и машин, можно определить как

$$R_{01}^n = \bar{X}_A = \bar{X}_{AF} - \frac{l_4}{(l_3 + l_4)} \bar{X}_1; \quad R_{01}^t = \bar{Y}_A = \frac{F_1}{2} \sin \alpha_1; \tag{9}$$

$$R_{02}^n = \bar{X}_C = \bar{X}_1; \quad R_{02}^t = \bar{Y}_C = \frac{F_2}{2} \sin \alpha_2; \tag{10}$$

$$R_{03}^n = \bar{X}_E = \bar{X}_{EF} + (\bar{X}_1 - \bar{X}_{AF} + \bar{X}_A) \cos \alpha_4; \quad R_{03}^t = \bar{Y}_E = \bar{Y}_{EF} - (\bar{X}_1 - \bar{X}_{AF} + \bar{X}_A) \sin \alpha_4. \tag{11}$$

В выражениях (9)...(11)  $R_{ij}$  — реакция  $i$ -го звена на  $j$ -е звено.

Для определения реакций в кинематических парах  $B$  и  $D$  достаточно рассмотреть равновесия звеньев 1 и 2, соответственно, и записать уравнения равновесия сил в виде проекций по продольной оси соответствующих звеньев и в перпендикулярном ей направлении или в векторной форме.

Приведем числовой пример для иллюстрации алгоритма (последовательности) расчета силового исследования одиножды статически неопределимой плоской кинематической цепи по предложенной методике.

Определить реакции в шарнирах  $A, B, C, D$  и  $E$  рассматриваемой кинематической цепи при следующих исходных данных:

$$F_1=250\text{Н}, F_2=300\text{Н}, F_3=200\text{Н}, M=40\text{Нм}, l_1=l_2=200\text{мм}, l_3=100\text{мм}, l_4=250\text{мм}, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=60^\circ, \alpha_3=75^\circ.$$

Последовательность расчета.

— Определяем  $\delta_{11}$  по первому выражению формулы (4)

$$\delta_{11} = \frac{4,4645 \cdot 10^{-4}}{EI_z}.$$

— Используя формулы (5), (6), (7), находим

$$\bar{X}_{AF} = 282,5 \text{ Н}, \quad \bar{Y}_{EF} = 197,5 \text{ Н}, \quad \bar{X}_{EF} = 74,27 \text{ Н}.$$

— Из второго выражения уравнений (4) находим

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_z} 0,02796.$$

— С помощью зависимости (8) вычисляем

$$\bar{X}_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{0,02796}{4,4643 \cdot 10^{-4}} = -62,6 \text{ Н.}$$

— Используя выражения (9)...(11) находим

$$R_{01}^n = 327,2 \text{ Н; } R_{01}^t = 108,3 \text{ Н; } R_{02}^n = -62,6 \text{ Н; } R_{02}^t = 129,9 \text{ Н; } R_{03}^n = 65,33 \text{ Н; } R_{03}^t = 213 \text{ Н.}$$

— Выполняем проверку числовых расчетов:

— деформационную

$$M_{zF} \cdot M_{z1} = \frac{1}{EI_z} \left[ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 11,46 \cdot 0,05 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,03093 - \frac{0,05}{6 \cdot 11,46} \cdot 0,06093 + \\ 13,25 \cdot 0,05186 + 4 \cdot 12,355 \cdot 0,046395 \end{array} \right] + \frac{0,25}{6} \times \left[ \begin{array}{l} -13,25 \cdot 0,06186 + \\ +4 \cdot 13,375 \cdot 0,03093 \end{array} \right] = -\frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{EI_z} \approx 0;$$

— статическую

$$\begin{aligned} \sum F_{\text{гор}} &= \bar{X}_A - F_1 \cos \alpha_1 + \bar{X}_1 - F_2 \cos \alpha_2 - F_3 \cos(\pi - \alpha_3 - \alpha_4) - \bar{X}_E \cos \alpha_4 + \bar{Y}_E \sin \alpha_4 = \\ &= 327,2 - 125 - 62,6 - 150 - 141,42 - 32,665 + 184,458 = -0,027 \text{ Н} \approx 0. \end{aligned}$$

Полученные результаты проверок свидетельствуют о правильности предложенной методики силового исследования плоских механизмов с пассивными связями.

После определения значений опорных реакций следует построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов звеньев рассматриваемой системы, что позволит определить наиболее опасные сечения звеньев изучаемой системы и облегчит работу конструктора при дальнейших расчетах их на прочность и жесткость.

Эпюры внутренних усилий звеньев рассматриваемой кинематической цепи (продольной силы  $N$ , поперечных сил  $Q_y$ , изгибающего момента  $M_z$ ) представлены на рис. 4.

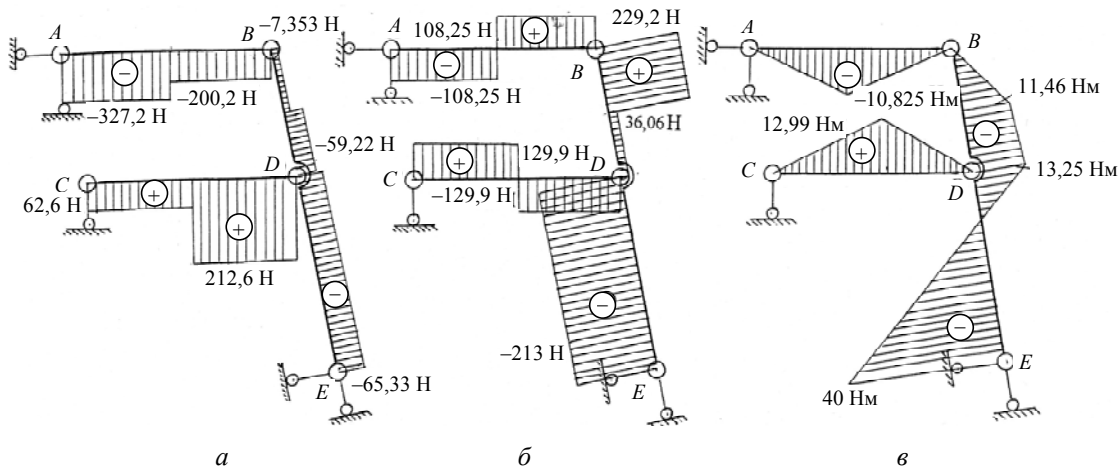


Рис. 4. Эпюры внутренних усилий: продольной силы (а), поперечной силы (б), изгибающего момента (в)

Схема усилий в элементах кинематических пар A, B, C, D, E представлена на рис. 5.

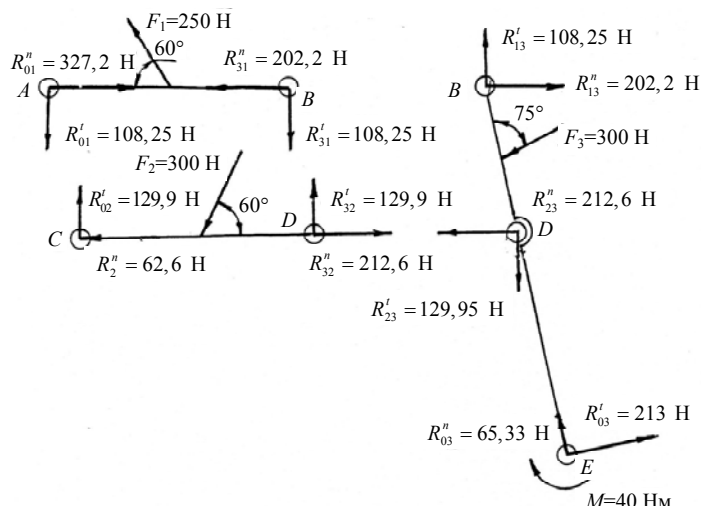


Рис. 5. Схема усилий в элементах кинематических пар

Учитывая изложенное можно сделать следующие выводы:

- силовое исследование статически неопределимых кинематических цепей можно выполнить, используя свойство упругости звеньев цепи;
- для статически единожды неопределимых цепей целесообразно применение формул Верещагина и Симпсона с использованием эпюр изгибающих моментов.

#### Литература

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. — М.: Наука, 1988. — 640 с.
2. Левитский, Н.И. Теория механизмов и машин / Н.И. Левитский. — М.: Наука, 1990. — 592 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. — М.: Наука, 1970, — 544 с.
4. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1988. — 712 с.

#### References

1. Artobolevskiy, I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of Machines and Mechanisms] / I.I. Artobolevskiy. — Moscow, 1988. — 640 p.
2. Levitskiy, N.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of Machines and Mechanisms] / N.I. Levitskiy. — Moscow, 1990. — 592 p.
3. Feodos'ev, V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of Materials] / V.I. Fedos'ev. — Moscow, 1970, — 544 p.
4. Rabotnov, Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Deformable Body Mechanics] / Yu.N. Rabotnov. — Moscow, 1988. — 712 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. акад. пищевых технологий Гросул Л.И.

Поступила в редакцию 27 мая 2011 г.