УДК 517.5:004.932

Г.Н. Вострова, канд. техн. наук, доц.,
М.Г. Годынский, магистр,
Одес. нац. политехн. ун-т

МЕТОД РАСЧЕТА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Г.М. Востров, М. Г. Годинський. **Метод розрахунку біортогональних фільтрів, які використовуються у вейвлет-перетвореннях.** Проаналізовано проблеми побудови біортогональних фільтрів, вивчено особливості їх характеристик. Представлено алгоритми розрахунку біортогональних фільтрів для використання в дискретних вейвлет-перетвореннях.
Ключові слова: біортогональний фільтр, вейвлет-перетворення.

Г.Н. Востров, М.Г. Годынский. **Метод расчета биортогональных фильтров, используемых в вейвлет-преобразованиях.** Проанализированы проблемы построения биортогональных фильтров, исследованы особенности их характеристик. Представлены алгоритмы расчета биортогональных фильтров для использования в дискретных вейвлет-преобразованиях.
Ключевые слова: биортогональный фильтр, вейвлет-преобразование.

G.N. Vostrov, M.G. Godynsky. **The method of calculating biorthogonal filters used in wavelet transforms.** The problems of constructing biorthogonal filters are analyzed, the features of their characteristics are investigated. The algorithms of biorthogonal filters calculation for using in discrete wavelet transforms are presented.
Keywords: biorthogonal filter, wavelet transform.

В задачах обработки изображений наиболее часто используются фильтры с конечной импульсной характеристикой, к классу которых относятся биортогональные фильтры [1]. Поэтому решение проблем построения биортогональных фильтров в ряде задач обработки изображений, главным образом, их сжатия, имеет большое значение. Методы разложения изображений по вейвлет-базисам [1] достаточно развиты как для обработки и хранения изображений, так и для передачи их на расстояния с предварительным сжатием. Вместе с тем возможно дальнейшее увеличение коэффициентов сжатия и уменьшение затрат на реализацию алгоритмов при использовании оптимальных методик расчета вейвлет-базисов, в роли которых с успехом могут выступать биортогональные фильтры.

При практической реализации дискретного вейвлет-преобразования используется многоканальная схема (в большинстве реализаций — двухканальная), в которой исходный сигнал при помощи того или иного типа фильтров разделяется на несколько субполос [2]. При этом полное восстановление сигнала из полученных субполос зависит от оптимального выбора следующих факторов:

— алгоритма расчета фильтров блока анализа и синтеза [2];
— метода продолжения сигнала конечной длины за его границей.

Поскольку в большинстве приложений необходимо полное (или, по крайней мере, близкое к полному) восстановление сигнала, то важен выбор фильтра, и соответственно нахождение методик его расчета, для тех или иных задач.

Следует отметить, что при определении оптимальности тех или иных вейвлет-базисов рассматриваются следующие свойства вейвлетов и масштабирующих функций [1]:

— компактность носителя;
— гладкость;
— симметрия;
— количество нулевых моментов.

 ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

В вейвлет-преобразовании существенным недостатком использования неортогональных базисов является невозможность использования одних и тех же базисных функций для вычисления коэффициентов разложения. В связи с этим, для большинства задач было бы желательным использование именно ортогональных симметричных вейвлет-базисов. Однако доказано, что таковыми могут быть лишь вейвлеты Хаара [1], которые в то же время являются кусочно-постоянными функциями, а значит не удовлетворяют условию гладкости. Именно поэтому привлекательно использование класса биортогональных вейвлет-базисов, которые, не являясь ортонормированными, в то же время имеют компактный носитель и являются гладкими и симметричными.

Рассмотрим процедуру расчета пар симметричных биортогональных фильтров нечетной длины на основе классического метода построения таких фильтров [3].

Передаточная функция сигнала

$$T(\omega) = [H(\omega)G(\omega+\pi) - G(\omega)H(\omega+\pi)]e^{i\omega(p+r)}, \qquad (1)$$

где ω — циклическая частота колебаний величины сигнала,

H — низкочастотный фильтр, который производит смещение сигнала на p отсчетов,

G — высокочастотный фильтр, который производит смещение сигнала на отсчетов.

Для полного восстановления сигнала указанные фильтры должны рассчитываться так, чтобы выражение $H(\omega)G(\omega+\pi) - G(\omega)H(\omega+\pi)$ равнялось чистой задержке сигнала, что возможно, если

$$G(\omega) = H(-\omega+\pi)e^{i(-\omega+\pi)(l_H-1)},$$

где l_H — длина фильтра H.

Тогда (1) примет вид

$$T(\omega) = [H(\omega)H(-\omega) - H(\omega+\pi)H(-\omega+\pi)e^{i\pi(l_H-1)}]e^{i\omega(p+r+1-l_H)}. \qquad (2)$$

Полное восстановление сигнала достигается, если

$$H(\omega)H(-\omega) - H(\omega+\pi)H(-\omega+\pi)e^{i\pi(l_H-1)} = 1. \qquad (3)$$

В первую очередь задается система критериев для расчета коэффициентов фильтров. Как показывает практика, в процессе расчета биортогональной пары фильтров одним из наиболее оптимальных критериев является фиксирование числа нулей низкочастотного фильтра на частоте $\omega = \pi$ [1], что приводит к получению фильтров с необходимыми характеристиками.

Рассмотрим модуль передаточной функции сигнала с учетом условия полного его восстановления

$$|T(\omega)| = |H_1(\omega)H_2(\omega) - H_1(\omega+\pi)H_2(\omega+\pi)| = 1, \qquad (4)$$

где H_1 — низкочастотный фильтр блока анализа;

H_2 — низкочастотный фильтр блока синтеза.

При этом данные фильтры должны обладать следующими дополнительными характеристиками:

— быть симметричными;

— иметь нечетную длину;

— иметь заданное число нулевых моментов высокочастотных фильтров на частоте, равной половине частоты дискретизации [2].

Симметричные фильтры нечетной длины могут быть представлены в виде следующих многочленов от $\cos\omega$:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{l_H-1} h_n e^{-i\omega n} = \\ &= h_{(l_H-1)/2} e^{-i\omega(l_H-1)/2} + \sum_{n=0}^{(l_H-1)/2-1} h_n \left(e^{-i\omega n} + e^{-i\omega(l_H-1-n)}\right) = \\ &= e^{-i\omega(l_H-1)/2}\left(h_{(l_H-1)/2} + \sum_{n=0}^{(l_H-1)/2-1} h_n \left(e^{-i\omega(n-(l_H-1)/2)} + e^{-i\omega((l_H-1)-n)}\right)\right) = \\ &= e^{-i\omega(l_H-1)/2}\left(h_{(l_H-1)/2} + 2\sum_{n=0}^{(l_H-1)/2-1} h_n \cos(((l_H-1)/2-n)\omega)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где l_H — длина фильтра H;

h_n, $n = \overline{0, l_H - 1}$ — коэффициенты фильтра H.

Если фильтр H имеет s нулевых моментов, то он может быть представлен в виде факторизаций

$$H(\omega) = (1 + e^{-i\omega})^s F_1(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^s F_2(\omega), \tag{6}$$

где F_1, F_2 — функции факторизации.

В этом выражении H будет являться многочленом от $\cos\omega$ только при четном s, что, в свою очередь, означает, что симметричные фильтры нечетной длины могут иметь только четное количество нулей на частоте $\omega = \pi$.

Пусть H_1 и H_2 — симметричные фильтры с порядками гладкости k_1 и k_2, соответственно. Если H_1 и H_2 имеют $2k_1$ и $2k_2$ нулей соответственно, то из (5) и (6) следует, что

$$|H_1(\omega)| = (1 + \cos\omega)^{k_1} Q_1(\cos\omega);$$
$$|H_2(\omega)| = (1 + \cos\omega)^{k_2} Q_2(\cos\omega),$$

где Q_1, Q_2 — многочлены от $\cos\omega$.

Подставим эти выражения в (4) и получим

$$(1 + \cos\omega)^m Q_1(\cos\omega) Q_2(\cos\omega) + (1 - \cos\omega)^m Q_1(-\cos\omega) Q_2(-\cos\omega) = 1,$$

где $m = k_1 + k_2$.

Сделав подстановку $x = \sin^2\frac{\omega}{2}$, получим многочлен

$$(1-x)^m P(x) + x^m P(1-x) = 1. \tag{7}$$

Далее необходимо найти такой многочлен $P(x)$, который удовлетворяет (7), и факторизовать выражение $(1-x)^m P(x) = H_1(\omega) H_2(\omega)$ на две составляющие. В результате будет получена пара биортогональных фильтров.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m-1} C_{n+m-1}^n x^n. \tag{8}$$

После обратной подстановки $x = \sin^2\frac{\omega}{2}$ в (8)

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$H_1(\omega)H_2(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2(k_1+k_2)}\sum_{n=0}^{m-1}C_{n+m-1}^{n}\sin^{2n}\frac{\omega}{2}. \qquad (9)$$

Как видно из (9), последующие шаги расчета пары биортогональных фильтров заключаются в выборе степеней гладкости k_1 и k_2 (и соответственно нулевых моментов $2k_1$ и $2k_2$) и факторизации правой части (9) на две части.

Здесь следует отметить, что проблема факторизации является нетривиальной как в плане нахождения оптимальных алгоритмов факторизации, так и в необходимости привлечения для этих целей дополнительных вычислительных мощностей. Особенно актуальным решение проблем факторизации многочленов становится подсчете фильтров с весьма большой длиной, например, больше 20, что соответственно приводит к большим степеням $P(x)$ и требует дальнейшего исследования.

Теперь представим приведенную процедуру в виде алгоритма.

Входные параметры алгоритма — нулевые моменты и длины первого и второго фильтров.

Выходные параметры алгоритма — коэффициенты фильтров.

Шаги алгоритма:

— задать четное количество $2k_1$ и $2k_2$ нулевых моментов первого и второго фильтров, соответственно;

— задать нечетные длины $2l_1+1$ и $2l_2+1$ ($l_1\neq l_2$) первого и второго фильтров, соответственно;

— найти явное выражение многочлена $P(x)=\sum\limits_{n=0}^{m-1}C_{n+m-1}^{n}x^n$, где $m=k_1+k_2$;

— выполнить факторизацию многочлена $P(x)$ вида $P(x)=P_1(x)P_2(x)$, где $P_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{n_1}a_nx^n$, $P_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{n_2}b_nx^n$, $a_0=b_0=1$, $n_1=l_1-k_1$, $n_2=l_2-k_2$, $n_1+n_2=k_1+k_2+1$;

— вычислить коэффициенты многочленов

$$H_1\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{k_1}P_1\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)^{k_1}P_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right),$$

$$H_2\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{k_2}P_2\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)^{k_2}P_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right);$$

— получить явный вид фильтров по формуле

$$H_1^0=\sum_{n=-l_1}^{l_1}h_{1n}e^{in\omega};\quad H_2^0=\sum_{n=-l_2}^{l_2}h_{2n}e^{in\omega},$$

где $\sqrt{2}=\sum\limits_{n=-l_1}^{l_1}h_{1n}$, $\sqrt{2}=\sum\limits_{n=-l_2}^{l_2}h_{2n}$.

Данный алгоритм расчета пары биортогональных фильтров продемонстрирован на примере нахождения коэффициентов фильтра CDF97 [3]:

— задано четное количество нулевых моментов $2k_1=4$ и $2k_2=4$ первого и второго фильтров, соответственно; $k_1=k_2=2$;

— заданы нечетные длины $2l_1+1=9$ и $2l_2+1=7$ первого и второго фильтров, соответственно; $l_1=4\neq l_2=3$;

— найдено явное выражение многочлена

$$P(x)=\sum_{n=0}^{m-1}C_{n+m-1}^{n}x^{n}=1+4x+10x^{2}+20x^{3}\text{, где } m=k_1+k_2=2+2=4;$$

— выполнена факторизация вида $P(x)=P_1(x)P_2(x)$;

$$P_1(x)=\sum_{n=0}^{n_1}a_nx^n,\ P_2(x)=\sum_{n=0}^{n_2}b_nx^n,\ a_0=b_0=1,$$

$$P_1(x)=1+b_1x+b_2x^2,\ P_2(x)=1+a_1x,$$

$$n_1=l_1-k_1=4-2=2,\ n_2=l_2-k_2=3-2=1,\ n_1+n_2=k_1+k_2+1;$$

— вычислены коэффициенты многочленов

$$H_1\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{k_1}P_1\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)^{k_1}P_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right),$$

$$H_2\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{k_2}P_2\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)^{k_2}P_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right).$$

Для упрощения проведена замена $e^{i\omega}=z$ и получено:

$$H_1\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)^{2}P_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{4}e^{-i\omega}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{2}P_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}z^{-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{2}\left(1+1{,}0793\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}z^{-1}\right)+6{,}84768\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{2}\right)=,$$

$$=\left(1+1{,}0793\left(0{,}5-\frac{0{,}25}{z}-0{,}25z\right)+6{,}84768\left(0{,}5-\frac{0{,}25}{z}-0{,}25z\right)^{2}\right)\left(0{,}5+\frac{0{,}25}{z}+0{,}25z\right)^{2}=$$

$$=0{,}602949+\frac{0{,}0267487}{z^4}-\frac{0{,}0168641}{z^3}-\frac{0{,}0782231}{z^2}+\frac{0{,}266864}{z}+$$

$$+0{,}266864z-0{,}0782231z^2-0{,}0168641z^3+0{,}0267487z^4;$$

— применены условия $\sqrt{2}=\sum_{n=-l_1}^{l_1}h_{1n}$ и $\sqrt{2}=\sum_{n=-l_2}^{l_2}h_{2n}$ к коэффициентам фильтров путем их умножения на нормирующий множитель $\sqrt{2}$.

Результаты расчета коэффициентов фильтра CDF97 представлены таблицей.

Результаты расчета фильтра CDF97

Индексы	H_1	H_2
1	0,0378285	–0,0645389
2	–0,0238494	–0,0406896
3	–0,1106241	0,4180924
4	0,3774026	0,7884862
5	0,8526986	0,4180924
6	0,3774026	–0,0406896
7	–0,1106241	–0,0645389
8	–0,0238494	—
9	0,0378285	—

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

Построенные таким методом биортогональные фильтры при исследовании их эффективности показали существенное преимущество по сравнению с фильтрами других классов, позволяя увеличить степени сжатия изображений до сотен раз, при этом оставляя качество восстановленного изображения без видимых потерь. Под изображением в данном случае понимается многомерная случайная функция, представленная в цифровом виде [4]. Для оценки эффективности качества сжатия использовался коэффициент пикового отношения сигнала к шуму PSNR [2], большее значение которого свидетельствует о лучшем качестве восстановления изображения. На тестовых изображениях при использовании JPEG-сжатия PSNR составлял в среднем 25...28, фильтров Добеши [3] — 28...30, а при использовании биортогональных фильтров увеличивался до 33...34.

Стоит также отметить, что до сих пор открытой является проблема систематизации вейвлетов [5]. В то же время критериями их систематизации могут служить и методы расчета вейвлет-фильтров, и параметры самих методов. Так что создание общих алгоритмов расчета фильтров способствует решению данной фундаментальной задачи в теории вейвлетов.

Таким образом, анализ и расчет биортогональных фильтров хоть и имеет ряд трудностей, связанных как с вычислительной нагрузкой, так и с необходимостью выбора критериев, которые позволили бы конструировать фильтры, наиболее эффективным образом удовлетворяющие условиям той или иной задачи обработки сигналов, но в то же время помогает решить ряд проблем в данной области, в т.ч. при сжатии изображений и видеоконтента.

Литература

1. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. — М.: Мир, 2005. — 658 с.
2. Воробьев, В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. — СПб.: ВУС, 1999. — 204 с.
3. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 464 с.
4. Яне, Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. — М.: Техносфера, 2007. — 583 с.
5. Taswell, C. The systematized collection of Daubechies wavelets / C. Taswell. — Stanford: Computational Toolsmiths, 1998. — 50 с.

References

1. Malla, S. Veyvlety v obrabotke signalov [Wavelets in signal processing] / S. Malla. — Moscow, 2005. — 658 p.
2. Vorob’ev, V.I. Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya [Theory and practice of wavelet transform] / V.I. Vorob’ev, V.G. Gribunin. — St.-Petersburg, 1999. — 204 p.
3. Dobeshi, I. Desyat’ lektsiy po veyvletam [Ten lectures on wavelets] / I. Dobeshi. — Izhevsk, 2001. — 464 p.
4. Yane, B. Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy [Digital image processing] / B. Yane. — Moscow, 2007. — 583 p.
5. Taswell, C. The systematized collection of Daubechies wavelets / C. Taswell. — Stanford: Computational Toolsmiths, 1998. — 50 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Малахов Е.В.

Поступила в редакцию 26 сентября 2011 г.