УДК 681.5.017

А.И. Брунеткин, канд. техн. наук, доц.,
М.В. Максимов, д-р техн. наук, проф.,
Одес. нац. политехн. ун-т

СНИЖЕНИЕ МЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ К АВТОМОДЕЛЬНОМУ ПО КРИТЕРИЯМ ВИДУ

А.І. Брунеткін, М.В. Максимов. **Зниження мірності простору моделювання шляхом приведення математичної моделі до автомодельного за критеріями вигляду.** Розглядається спосіб приведення вихідної математичної моделі до знерозміреного вигляду. Показано можливість зменшення числа критеріїв у порівнянні з кількістю, прогнозовану на основі теорії розмірності. На прикладі рівняння Нав'є-Стокса вказано нормуючі величини, які приводять всі критерії до величини, що дорівнює 1, що рівносильне досягненню автомодельності по всіх критеріях, які беруть участь у розв'язанні (Sh — Струхаля, Fr — Фруда, Eu —Ейлера, Re — Рейнольдса). Вказано можливість отримання таких нормувальних величин на основі узагальненого закону збереження. У ряді випадків у нормувальні величини можуть не входити геометричні розміри досліджуваних систем, що вказує на можливість моделювання без дотримання геометричної подібності.
Ключові слова: моделювання, зниження мірності, автомодельности, спотворене моделювання.

А.И. Брунеткин, М.В. Максимов. **Снижение мерности пространства моделирования путем приведения математической модели к автомодельному по критериям виду.** Рассматривается способ приведения исходной математической модели к обезразмеренному виду. Показана возможность уменьшения числа критериев по сравнению с количеством, прогнозируемым на основе теории размерности. На примере уравнения Навье-Стокса указаны нормирующие величины, приводящие все критерии к величине, равной 1, что равносильно достижению автомодельности по всем участвующим в решении критериям (Sh — Струхаля, Fr — Фруда, Eu — Эйлера, Re — Рейнольдса). Указана возможность получения таких нормирующих величин на основе обобщенного закона сохранения. В ряде случаев в нормирующие величины могут не входить геометрические размеры исследуемых систем, что указывает на возможность моделирования без соблюдения геометрического подобия.
Ключевые слова: моделирование, снижение мерности, автомодельность, искаженное моделирование.

A.I. Brunetkin, M.V. Maximov. **Reducing the dimension of the simulation space by bringing a mathematical model to the self-similar, according to the criteria, form.** The method of reducing the initial mathematical model to dimensionless form is considered. The possibility of reducing the number of criteria, as compared with the amount predicted by the theory of dimension, is shown. On the example of the Navier-Stokes equation the normalizing values, reducing all the criteria to the value of 1, which is equivalent to the achievement of self-similarity at all involved in the decision criteria (Sh — Strouhal, Fr — Froude, Eu — Euler, Re — Reynolds number), are indicated. The possibility of normalizing these values based on the generalized conservation law is pointed out. In some cases, the normalizing values can exclude geometrical sizes of the systems under study, which indicates the possibility of modeling without complying with geometric similarity.
Keywords: simulation, reduced dimensions, self-similarity, distorted simulation.

В практике проектирования технических систем (ТС) широко используются их модели (математические и физические), эксперименты над которыми позволяют прогнозировать характеристики создаваемого объекта.

Чтобы применение модели давало выгоды, она должна обладать рядом свойств, важнейшими из которых являются простота и адекватность оригиналу. При усложнении ТС происхо-

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

дит усложнение ее модели. В этом случае рассматриваемые свойства становятся конкурирующими: для обеспечения адекватности приходится усложнять и модель, и способы ее исследования, решения.

Во многих случаях усложнение модели сопровождается увеличением числа учитываемых параметров. Табулирование функции, зависящей от одной переменной, потребует лишь одной строки, от двух переменных — страницы, от трех — книги, от четырех — библиотеки и т.д. Поэтому уменьшение числа учитываемых параметров при исследовании математической модели (ММ) является желательным. Стандартным приемом уменьшения числа параметров без потери информации и, следовательно, сохранения адекватности, присущей исходной модели, является приведение ее к обезразмеренному виду. В соответствии с П-теоремой [1] число получаемых обезразмеренных комплексов меньше числа размерных величин в исходной модели на число независимых размерностей

$$m = n - r, \tag{1}$$

где n — число размерных величин в рассматриваемой модели;

r — число независимых размерностей физических величин в рассматриваемой модели.

К П-теореме было введено дополнение, в соответствии с которым следует различать, например, измерение длины в направлении x $[L_x]$ и y $[L_y]$ а, следовательно, и независимые размерности [2]. Это ведет к увеличению числа независимых размерностей r в (1). Аналогично можно различать массу как меру инерции, массу как меру энергии, массу как меру ее тепловой функции. Таким образом, это дополнение в рамках П-теоремы за счет увеличения числа независимых размерностей позволяет уменьшить число обезразмеренных комплексов, но все же не исключает их полностью из рассмотрения.

Изменение системы единиц измерения приводит к изменению коэффициентов в математических выражениях вплоть до их вырождения в единицу. Так в законе Кулона, например,

$$F_{1,2} = a\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2},$$

если он записан в системе СИ,

$$a = 8{,}99 \cdot 10^9\,\text{Нм}^2\text{Кл}^{-2},$$

в системе СГС $a = 1$.

В ММ, приведенной к обезразмеренному виду, обезразмеренные комплексы (критерии) также выступают в качестве коэффициентов, и изменение системы единиц измерения (нормирующих множителей в процедуре обезразмеривания) может привести к их вырождению в единицу. Рассмотрим с этих позиций простой пример, связанный с приведением ММ к обезразмеренному виду. Пусть на пружине с жесткостью k подвешен груз массой m. В начальный момент груз отклоняется от положения равновесия на величину δ.

При отсутствии диссипации энергии движение груза описывается уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\text{при } t = 0: \quad x = \delta, \ \frac{dx}{dt} = 0. \tag{3}$$

В размерном виде решение будет зависеть от трех величин

$$x = f_1(t, m, k). \tag{4}$$

Исходное уравнение (2) имеет четыре размерные величины (x, t, m, k) и три независимых размерности $[L]$ для x, $[T]$ для t, $[M]$ для m. При приведении уравнения (2) и начальных условий (3) к обезразмеренному виду в соответствии с П-теоремой должны получить один обезразмеренный комплекс. Представим обезразмеренные переменные в виде

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \tag{5}$$

где τ — время 1/4 периода колебаний (характерный интервал времени).

Нормирующие величины δ и τ выступают в качестве единиц измерения для x и t. При этом пары величин $x \leftrightarrow \delta$ и $t \leftrightarrow \tau$ имеют одинаковый смысл: геометрический размер и время, соответственно.

Единицы измерения, учитывающие свойства системы, позволяют отобразить протекающие в ней процессы с учетом их особенностей. Но в рассматриваемом случае коэффициент k, характеризующий эти свойства, для формирования нормирующих величин не использовался.

Подставив x и t из (5) в (2) и (3), получим

$$\frac{d^2\bar{x}}{d(\bar{t})^2} + \xi_1\bar{x} = 0, \quad \text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{x} = 1; \; \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 0, \tag{6}$$

где $\xi_1 = \dfrac{k\tau^2}{m}$ — обезразмеренный комплекс.

Теперь решение уравнения (6), а следовательно и (2), может быть представлено в виде зависимости от двух величин

$$\bar{x} = f_2(\xi_1, \bar{t}). \tag{7}$$

Рассмотрим другой вариант приведения исходного уравнения (2) к обезразмеренному виду. При записи обезразмеренных переменных (5) вместо астрономической единицы измерения (секунда) в качестве нормирующей величины возьмем $\sqrt{m/k}$, также имеющую размерность времени. Теперь обезразмеренные переменные из уравнения (2) запишутся в виде

$$\bar{\bar{x}} = \frac{x}{\delta}; \quad \bar{\bar{t}} = \frac{t}{\sqrt{m/k}}, \tag{8}$$

а уравнения (2) и условия (3) в виде

$$\frac{d^2\bar{\bar{x}}}{d(\bar{\bar{t}})^2} + \xi\bar{\bar{x}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\bar{t}} = 0: \quad \bar{\bar{x}} = 1; \; \frac{d\bar{\bar{x}}}{d\bar{\bar{t}}} 0, \tag{9}$$

где $\xi = 1$ — комплекс другого вида.

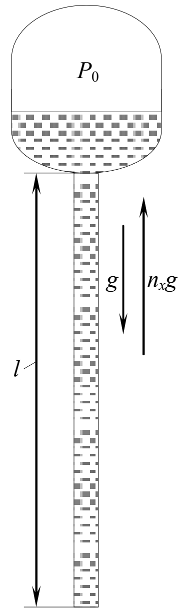
В результате решение уравнения (9), а следовательно и (2), может быть представлено в виде зависимости от одной величины

$$\bar{\bar{x}} = f_3(\bar{\bar{t}}). \tag{10}$$

Сравнение решений (4), (7), (10) показывает преимущество изменения единиц измерения. Единица времени $\sqrt{m/k}$ основывается на свойствах самой системы, состоящей из груза, подвешенного на пружине, и поэтому естественна. Координаты, измеряемые в таких единицах, называются естественными [3].

В качестве более сложного примера рассмотрим модель, описывающую процесс распространения волны давления в системе, состоящей из емкости и трубы, одним концом присоединенной к емкости (см. рисунок). Другой конец заглушен. Труба и частично емкость заполнены жидкостью. Над свободной поверхностью жидкости находится газ под давлением. Система находится в поле массовых сил, вектор напряженности которого направлен вдоль трубы в сторону заглушенного конца. В некоторый момент времени направление действия поля массовых

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)



Расчетная схема

сил меняется на противоположное. Это может быть реализовано путем торможения до этого движущейся поступательно системы "бак — труба".

В качестве основных выберем телеграфные уравнения, описывающие распространение сигнала в длинных линиях без диссипации энергии:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho \dfrac{\partial w}{\partial t} + \rho j(t);, \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} = \rho c^2 \dfrac{\partial w}{\partial x}, \end{cases} \tag{11}$$

где ρ — плотность жидкости;
c — скорость звука в системе "жидкость — труба";
$j(t)=n_x g$ — напряженность поля массовых сил;
g — ускорение свободного падения;
n_x — перегрузка;
w — скорость жидкости;
p — давление жидкости;
t — время.

Если решение искать в отклонениях, то краевые условия можно записать в виде

Начальные условия	Граничные условия
$t=0 \quad \left. \begin{matrix} p=0 \\ w=0 \end{matrix} \right\|,$	$\begin{matrix} x=0 \quad p=0 \\ x=l \quad w=0 \end{matrix},$ (12)

где l — длина трубы. Отсчет ведется от места соединения трубы с баком.

К обезразмеренному виду записанную модель можно привести различным путем. Рассмотрим формальный подход. Возьмем, например, в качестве нормирующей величины для p давление в газовой полости бака p_0, т.е. $p^\Delta = p_0$ и далее $w^\Delta = c$, $x^\Delta = l$, $t^\Delta = t_T$. Здесь t_T — длительность импульса торможения. Тогда исходная модель (11), (12) запишется в обезразмеренном виде следующим образом:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \xi_1 \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \xi_2 n_x; \\ -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = \xi_3 \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}. \end{cases} \tag{13}$$

Начальные условия	Граничные условия
$\bar{t}=0 \quad \left. \begin{matrix} \bar{p}=0 \\ \bar{w}=0 \end{matrix} \right\|$	$\begin{matrix} \bar{x}=0 \quad \bar{p}=0 \\ \bar{x}=1 \quad \bar{w}=0 \end{matrix},$ (14)

где $\xi_1 = \dfrac{\rho c l}{p_0 t_T}$; $\xi_2 = \dfrac{\rho g l}{p_0}$; $\xi_3 = \dfrac{\rho c^3 t_T}{p_0 l}$; (15)

$\bar{p} = \dfrac{p}{p^\Delta}$; $\bar{w} = \dfrac{w}{w^\Delta}$; $\bar{x} = \dfrac{x}{l}$; $\bar{t} = \dfrac{t}{t_T}$ — обезразмеренные переменные. (16)

Зачастую модель к обезразмеренному виду приводят именно таким путем. Учет же характера физических процессов и явлений, описываемых моделью, позволяет определить новые единицы измерения (нормирующие величины) физических величин и, как следствие, существенно снизить количество получаемых безразмерных комплексов (критериев). Так, если в качестве нормирующей величины для давления взять выражение $p^\Delta = l\rho g$, определяющее гидростатическое давление столба жидкости в трубе в поле земного тяготения, для времени — $t^{\Delta} = l/c$, определяющее длительность 1/4 периода колебаний при распространении волны давления в трубе, и оставить $w^{\Delta} = c$, $x^{\Delta} = l$, исходная модель (11), (12) запишется в обезразмеренном виде следующим образом:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\xi_1}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{t}} + n_x; \\ -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{t}} = \xi_1 \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}}, \end{cases} \tag{17}$$

где $\xi_1 = \dfrac{c^2}{gl}$ =Fr — критерий Фруда (18)

Краевые условия, как и в (14).

Сравнение (13) и (17) показывает, что учет физики протекающих процессов для двух нормирующих величин (для двух единиц измерения) p^{Δ} и t^{Δ} позволил снизить на две единицы количество обезразмеренных комплексов: с трех в (13) до одного в (17). Можно предположить, что в этом случае и последний оставшийся комплекс обусловлен неоптимально выбранной единицей измерения какой-либо переменой. Действительно, если выбрать в качестве нормирующей величины для скорости выражение $w^{\Delta} = (lg)/c$, а все остальные нормировки как для (17), то исходная модель (11), (12) может быть записана в обезразмеренном виде без критериев или, если угодно, со всеми критериями, равными 1.

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{t}} + n_x; \\ -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{t}} = \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}}, \end{cases} . \tag{19}$$

Начальные условия	Граничные условия
$\overline{t} = 0 \quad \begin{matrix} \overline{p} = 0 \\ \overline{w} = 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \overline{x} = 0 & \overline{p} = 0 \\ \overline{x} = 1 & \overline{w} = 0 \end{matrix}$,

(20)

$$\overline{p} = \frac{p}{p^{\Delta}}; \ \overline{w} = \frac{w}{w^{\Delta}}; \ \overline{x} = \frac{x}{x^{\Delta}}; \ \overline{t} = \frac{t}{t^{\Delta}}, \tag{21}$$

где $p^{\Delta} = l\rho g; \ w^{\Delta} = \dfrac{lg}{c}; \ x^{\Delta} = l; \ t^{\Delta} = \dfrac{l}{c}.$

Следует обратить внимание на соотношения между некоторыми нормирующими величинами из (21), показывающие их взаимосвязь. Так отношение w^{Δ}/t^{Δ} имеет размерность ускорения и в рассматриваемом случае равно g. Соотношение x^{Δ}/t^{Δ} имеет размерность скорости и в рассматриваемом случае равно c.

При аналитическом решении задачи приведенные преобразования модели не имеют принципиального значения. Но при численном решении или экспериментальном исследовании позволяют существенно снизить необходимый объем работы для получения результатов.

Рассматриваемый подход для получения моделей в обезразмеренном виде может быть применен при общих исходных уравнениях. Для иллюстрации рассмотрим уравнение Навье-Стокса. Структура уравнений в одно-, двух- и трехмерном вариантах одинакова, что и обеспечивает подобие получаемых результатов. Для упрощения рассмотрим одномерное уравнение без учета действия поля массовых сил

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (22)$$

В уравнении (22) шесть размерных величин u, t, x, p, ρ, ν и три независимых размерности чаще всего различаемых в задачах механики: длина [L], масса [M], время [T]. В соответствии с П-теоремой при приведении уравнения (22) к безразмерному виду должны получить три обезразмеренных комплекса (критерия). После нормирования исходное уравнение (22) будет иметь вид

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}=-\mathrm{Eu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}, \qquad (23)$$

где $\mathrm{Sh}=\dfrac{l}{t_x u_m}$ — число Струхаля (критерий гомохронности);

$\mathrm{Eu}=\dfrac{\Delta p}{\rho u_m^2}$ — критерий Эйлера;

$\mathrm{Re}=\dfrac{u_m l}{\nu}$ — критерий Рейнольдса.

ν, ρ — кинематическая вязкость и плотность из исходного уравнения (22);

$u_m, l, \Delta p, t_x$ — характерные величины, используемые при нормировке соответствующих размерных величин.

Характерные величины берутся из краевых условий. Нормирующие величины — это единицы измерения для нормируемых величин. Они могут быть разными, но характер их при этом не изменяется. Так, например, l может быть длиной обтекаемого объекта или диаметром трубы, но все равно она остается единицей протяженности. Решение уравнения (23) а, следовательно, и (22) может быть представлено в виде

$$\bar{u}=f(\overline{x, t},\ \mathrm{Sh}, \mathrm{Eu}, \mathrm{Re}). \qquad (24)$$

Перейдем к другим единицам измерения. В качестве новых нормирующих величин положим:

— для скорости $u^{\Delta}=\sqrt{\dfrac{\Delta p}{\rho}}=\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]$;

— для координаты $x^{\Delta}=\nu\sqrt{\dfrac{\rho}{\Delta p}}=[\text{м}]$; (25)

— для времени $t^{\Delta}=\nu\dfrac{\rho}{\Delta p}=[\text{с}]$.

Следует отметить, что новые координаты (25) не только имеют необходимую размерность, но и связаны между собой по величине

$$x^{\Delta}=u^{\Delta}t^{\Delta}. \qquad (26)$$

Теперь критерии в уравнении (23) примут вид

$$\mathrm{Sh}=\frac{x^{\Delta}}{t^{\Delta}u^{\Delta}}=1; \quad \mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho(u^{\Delta})^2}=1; \quad \mathrm{Re}=\frac{x^{\Delta}u^{\Delta}}{\nu}=1. \qquad (27)$$

Таким образом, после ввода новых координат (25) (нормирующих величин), называемых естественными, достигнута автомодельность по всем критериям, и решение уравнения (22) может быть представлено в виде

$$\bar{\bar{u}}=f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}}). \qquad (28)$$

В общепринятой методике приведения ММ к обезразмеренному виду учет дополнительных членов в исходных уравнениях, как правило, не приводит к изменению нормирующих величин. При использовании же естественных координат учет дополнительных членов, а следовательно, и эффектов ведет к изменению системы отсчета. Для примера рассмотрим то же исходное уравнение (23), но с учетом действия массовых сил

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}n_x-\mathrm{Eu}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial (\overline{x})^2}, \tag{29}$$

где n_x — перегрузка в поле массовых сил в направлении рассматриваемой координаты (величина безразмерная);

$\mathrm{Fr}=\dfrac{(u^{\Delta})^2}{gx^{\Delta}}$ — критерий Фруда.

В качестве нормирующих величин положим:

$$\begin{aligned}
&\text{— для скорости } u^{\Delta}=\sqrt[3]{\nu g}=\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right];\\
&\text{— для координаты } x^{\Delta}=\sqrt[3]{\frac{\nu^2}{g}}=[\text{м}];\\
&\text{— для времени } t^{\Delta}=\sqrt[3]{\frac{\nu}{g^2}}=[\text{с}];\\
&\text{— для давления } p^{\Delta}=\rho\sqrt[3]{(\nu g)^2}=\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right].
\end{aligned} \tag{30}$$

В этом случае остаются в силе все рассуждения как и для критериев (27), т.е. они все равны 1, по всем критериям достигнута автомодельность.

Следует отметить, что новые координаты (30), также как и в предыдущем случае (25), не только имеют необходимую размерность, но и связаны между собой по величине, отражая общефизические соотношения для перемещения и расхода,

$$x^{\Delta}=u^{\Delta}t^{\Delta};\quad (u^{\Delta})^2=\frac{p^{\Delta}}{\rho}. \tag{31}$$

Вид нормирующих величин (30) показывает, что они состоят только из физических свойств исследуемой среды и напряжения поля массовых сил. Характерные размеры, например, в них не входят. Это может служить основой для искаженного моделирования, т.е. без обязательного сохранения геометрического подобия.

Из вида нормирующих величин (30) при сравнении с (25) следует, что они меняются с изменением исходной ММ. При использовании полной ММ (с учетом краевых условий) можно ожидать изменения нормирующих величин, но принцип приведения ее к обезразмеренному виду остается в силе.

Использование естественных координат не ограничивается рассмотренными примерами.

Уравнение Навье-Стокса является частным случаем обобщенного закона сохранения [4], который в векторной форме можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)+\mathrm{div}(\rho u\Phi)=\mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}\Phi)+S. \tag{32}$$

В него (в порядке записи) входят: нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый члены. Уравнение Навье-Стокса получим, если в (32) вместо зависимой переменной Φ подставить скорость u. Как следствие, для приведения к обезразмеренному виду обобщенных уравнений (32) могут быть использованы нормирующие величины типа (30) при соот-

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

ветствующей подстановке (по смыслу задачи) величин зависимой переменной Φ, диффузионного коэффициента Γ и источникового члена S. Так для уравнения количества движения, как отмечалось, $\Phi = u$ — скорость, $\Gamma = \mu$ — вязкость. Для уравнения энергии: $\Phi = h$ — удельная энтальпия, $\Gamma = k$ — коэффициент теплопроводности. Вообще величина Φ может обозначать массовую концентрацию химической компоненты, температуру, кинетическую энергию турбулентности или масштаб турбулентности и т.д. Уравнение неразрывности также является разновидностью закона сохранения и вытекает из (32) при $\Phi = 1$ и $S = 0$ — отсутствие источника.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \operatorname{div}(\rho u) = 0\,. \tag{33}$$

При приведении математической модели к обезразмеренному виду с выделением критериев можно заметить, что различные по физической природе процессы имеют схожие по форме модели и соответственно критерии, входящие в них [5]. Так число Рейнольдса $\mathrm{Re} = ul/\nu$ — критерий из модели гидродинамических задач, подобен числу Пекле $\mathrm{Pe} = ul/a$ — критерию из модели задач теплообмена, которые являются мерой соотношения конвективного и диффузионного переноса некоторого количества: в первом случае импульса, во втором — теплоты (здесь: u — характерная скорость; l — характерный размер; ν, a — коэффициенты переноса: вязкость и температуропроводность). Это говорит о том, что в основе этих моделей, которые зачастую воспринимаются как различные, лежат процессы одного характера (32). Поэтому и в случае приведения модели к обезразмеренному виду с автомодельностью по критериям нормирующие величины для разных моделей могут носить подобный между собой характер. Более того, общие нормирующие величины могут быть получены для обобщенного закона сохранения (32) и набора стандартных краевых условий, например, подобных используемым в задачах теплопередачи. В дальнейшем при решении конкретных задач необходимые нормирующие величины получаются путем замены зависимой переменной Φ, диффузионного коэффициента Γ и источникового члена S на соответствующие по смыслу задачи величины.

На основании изложенного можно сделать выводы о то, что:

— возможно уменьшение числа критериев по сравнению с количеством, прогнозируемым на основе П-теоремы;

— существуют нормирующие величины, позволяющие привести, например, уравнение Навье-Стокса к автомодельному виду по всем критериям, и тем самым снизить мерность пространства моделирования;

—при приведении ММ к обезразмеренному виду для достижения автомодельности по критериям при учете дополнительных членов (дополнительных эффектов) в модели необходимо изменять нормирующие величины (единицы измерения);

— при приведении ММ к автомодельному по критериям веду существует взаимосвязь между нормирующими величинами;

— возможно получение нормирующих величин на основе обобщенного закона сохранения (32) с дальнейшим их использованием при решении конкретных задач путем замены обобщенных величин на соответствующие им по смыслу задачи;

— возможно искаженное моделирование.

Литература

1. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. Изд. 9-е, перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 448 с.
2. Huntley, H.E. Dimensional analysis McDonald and company / H.E. Huntley. — London, 1953. — 158 pp.
3. Клайн, С.Дж. Подобие приближенные методы / С.Дж. Клайн; пер. с англ. под ред. И.Т. Аладьева, К.Д. Воскресенского. — М.: Мир, 1968. — 302 с.
4. Patankar, S.V. Numerical heat transfer and fluid flow / S.V. Patankar. — Hemisphere, Washington, 1980. — 197 pp.

5. Кутателадзе, С.С. Анализ подобия в теплофизике / С.С. Кутателадзе. — Новосибирск: Наука, 1982. — 280 с.

References

1. Sedov, L.I. Metody podobiya i razmernosti v mekhanike [Similarity and dimensionality methods in mechanics] / L.I. Sedov. — 9th edition — Moscow, 1981. — 448 p.
2. Huntley, H.E. Dimensional analysis McDonald and company / H.E. Huntley. — London, 1953. — 158 p.
3. Klayn, S.Dzh. Podobie: priblizhennye metody [Similarity: approximate methods] — Transl. from English and edited by I.T. Alad'ev, K.D. Voskresenskiy. — Moscow, 1968. — 302 p.
4. Patankar, S.V. Numerical heat transfer and fluid flow / S.V. Patankar. — Hemisphere, Washington, 1980. — 197 p.
5. Kutateladze, S.S. Analiz podobiya v teplofizike [Similarity analysis in thermal physics] / S.S. Kutateladze. — Novosibirsk, 1982. — 280 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Назаренко А.Ф.

Поступила в редакцию 26 октября 2011 г.