ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

УДК 539.384

В.В. Грибова, канд. физ.-мат. наук,
А.Н. Порпулит, математик,
Одес. нац. политехн. ун-т

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В.В. Грібова, О.М. Порпуліт. **Задача про вигини прямокутної шарнірно-опертої по контуру пластини з тонким лінійним включенням.** Розглянута задача дослідження деформації пластин з тонкими включеннями і опорами. Розв'язок задачі розшукується у вигляді лінійної комбінації спеціальної системи бігармонійних функцій. Невідомі коефіцієнти розшукуються методом граничної коллокації.
Ключові слова: система бігармонійних функцій, метод граничної коллокації, клас функцій з особливостями, що не інтегруються, вигини пластини.

В.В.Грибова, А.Н. Порпулит. **Задача об изгибе прямоугольной шарнирно-опертой по контуру пластины с тонким линейным включением.** Рассмотрена задача исследования деформации пластин с тонкими включениями и опорами. Решение задачи разыскивается в виде линейной комбинации специальной системы бигармонических функций. Неизвестные коэффициенты отыскиваются методом граничной коллокации.
Ключевые слова: система бигармонических функций, метод граничной коллокации, класс функций с неинтегрированными особенностями, прогибы пластины.

V.V. Gribova, A.N. Porpulit. **The problem of bending of a rectangular, hinged contour-supported plate with a thin linear inclusion.** The problem of investigating the deformation of plates with subtle inclusions and supports is considered. Solution of the problem is sought as a linear combination of a special system of biharmonic functions. The unknown coefficients are found by the boundary collocation method.
Keywords: system of bigarmonic functions, boundary collocation method, class of functions with nonintegrated singularities, deflections of a plate.

Рассматривается задача об изгибе пластины с тонким линейным включением. Известно, что наличие в конструкциях подкрепляющих стержней, опор, прямолинейных дефектов типа трещин и включений значительно усложняет их расчет, т.к. перечисленные элементы в конструкциях являются концентраторами напряжений. Традиционным методом решения таких задач является метод, основанный на сведении задач к интегральным уравнениям относительно контактных усилий. Известны исследования в этом направлении [1...4].

В настоящей работе предлагается дальнейшая разработка и детализация методов решения задач изгиба пластин с линейными включениями, где решение задачи разыскивается в виде линейной комбинации системы бигармонических функций, учитывающих наличие включения, для конечной пластины.

Рассмотрим прямоугольную шарнирно-опертую пластину $(|x|\le a,\ |y|\le b)$, внутри которой на отрезке $y=0, |y|\le c$ имеется тонкое жесткое включение. Считая, что вне включения на пластину не действует распределенная нагрузка, приходим к однородному бигармоническому уравнению относительно прогибов пластины:

$$\Delta^2\omega(x,y)=0,\quad |x|<a, |y|<b \text{ кроме } y=0, |x|<c, \tag{1}$$

где $\omega(x,y)$ — прогибы пластины.

Включение перемещается вертикально под действием приложенной к нему нагрузки P. В математической постановке включение можно рассматривать как разрез с берегами $y = \pm\ 0$, $|x| \le c$. На берегах разреза выполняются условия:

$$\omega(x, \pm 0) = W_0, \ |x| \le c, \tag{2}$$

$$\omega'_y(x, \pm 0) = 0, \ |x| \le c, \tag{3}$$

На сторонах пластины заданы условия шарнирного опирания:

$$\omega(\pm a, y) = M_x(\pm a, y) = 0, \quad |y| \le b \tag{4}$$

$$\omega(x, \pm b) = M_y(x, \pm b) = 0, \quad |x| \le a. \tag{5}$$

Требуется найти распределение прогибов, изгибающих моментов, обобщенных перерывающих сил.

С учетом четности задачи по x и y приближенное представление прогиба $\omega_N(x, y)$ можно записать в виде [5]

$$\omega_N(x, y) = \omega_\psi(x, y) + \omega_\chi(x, y) + \omega_0(x, y), \tag{6}$$

где $\omega_\Psi(x, y) = \psi_0 \operatorname{Re}\left\{\left(z\bar{z} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{3}{2}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}} + 2iy(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\} +$

$+\psi_1 \operatorname{Re}\left\{\ln\left(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) - z(z^2-1)^{\frac{1}{2}} + 2iy(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right\} +$

$+\sum_{n=2}^{N}\psi_n \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2(2n-2)}(z^2-1)^{\frac{3}{2}} P_{2n-3}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(z) - iy(z^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{2n-2}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)\right];$

$\omega_\chi(x, y) = \chi_0 \operatorname{Re}\left\{-(1+\nu)\left(\ln(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) - z(z^2-1)^{\frac{1}{2}} + (1-\nu)2iy(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\} +$

$+\sum_{n=2}^{N}\chi_n \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{4n}(1+\nu)(z^2-1)^{\frac{3}{2}} P_{2n-1}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(z) \quad + \quad (1-\nu)iy(z^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{2n}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)\right\};$

$\omega_0(x, y) = \sum_{n=0}^{N}(a_n \operatorname{Re}(z^{2n}) + b_n \operatorname{Re}(\bar{z}z^{2n+1}));$

$z = x + iy.$

После замены многочленов Якоби $P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$, $P_n^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(z)$ многочленами тех же степеней от z, получаем представление прогиба

$$\omega(x, y) = \sum_{n=0}^{N} a_n u_n(x, y); \tag{7}$$

где $u_0(x, y) = \operatorname{Re}\left(\ln\left(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) - z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right);$

$u_1(x, y) = \operatorname{Re}\left((z\bar{z}-1)\ln\left(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)\right);$

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$u_{4n-2}(x,y) = \mathrm{Re}\left(z^{2n-1} \quad (z^2-1)^{\frac{3}{2}} \right), \; n = \overline{1,N};$$

$$u_{4n-1}(x,y) = \mathrm{Re}\left(2iyz^{2n-2}(z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right), \; n = \overline{1,N};$$

$$u_{4n}(x,y) = \mathrm{Re} \;\; z^{2n-2}, \quad n = \overline{1,N};$$

$$u_{4n+1}(x,y) = \mathrm{Re} \;\; \bar{z}z^{2n-1}, \; n = \overline{1,N}.$$

Неизвестные постоянные коэффициенты ψ_n, χ_n, a_n, b_n, $n = \overline{0,N}$ отыскиваются методом граничной коллокации [6] — приближенным методом решения дифферинциальных уравнений , заключающимся в сведении решения к системе алгебраических уравнений. Для нахождения неизвестных постоянных коэффициентов используются граничные условия, которые не удовлетворяются не на всем контуре, а в особых, наперед заданных точках коллации.

Функция (6) удовлетворяет уравнению (1) при любых значениях $4(N+1)$ коэффициентов ψ_n, χ_n, α_n, b_n $(n = \overline{0,N})$. Легко проверить, что функция (6) удовлетворяет условию (3) тождественно. В связи с этим возможны два подхода к решению задачи (1)…(5):

— разыскивать приближенное представление прогиба в виде (6), тогда условие (3) удовлетворяется тождественно, а условия (2), (4), (5) — коллокационно;

— разыскивать приближенное представление прогиба в виде (7), тогда условия (2)…(5) удовлетворяются ы точках коллокацио;

Выбирая n_1 точек коллокации на включении $y = +0, 0 \le x \le c$, n_2 — на стороне $x = a$, $0 \le y \le b$, n_3 — на стороне $y = b$, $0 \le x \le a$, и последовательно подставляя их значения в (6) и (7), приходим к системе соответственно $n_1+2(n_2+n_3)$ линейных алгебраических уравнений в первом случае и $2(n_1+n_2+n_3)$ уравнений — во втором.

Решение этих систем, подставленное в (6) или (7), дает приближенное решение задачи (1)…(5).

Расчеты проведены для пластин $a=b$ при относительной длине включения $\varepsilon=c/a$, равной 0,66; 0,5; 0,2; 0,1. Значения прогибов, полученные с помощью представлений (6) и (7), хорошо согласуются между собой.

Прогибы для пластины с размерами $a=b=2$, $\varepsilon=0,5$ показаны на рис. 1. Прогибы максимальны на включении, где они равны $W_0=1$, уменьшаются до нуля на контуре пластины, что свидетельствует о хорошем удовлетворении условиям (2)…(5) обоими методами.

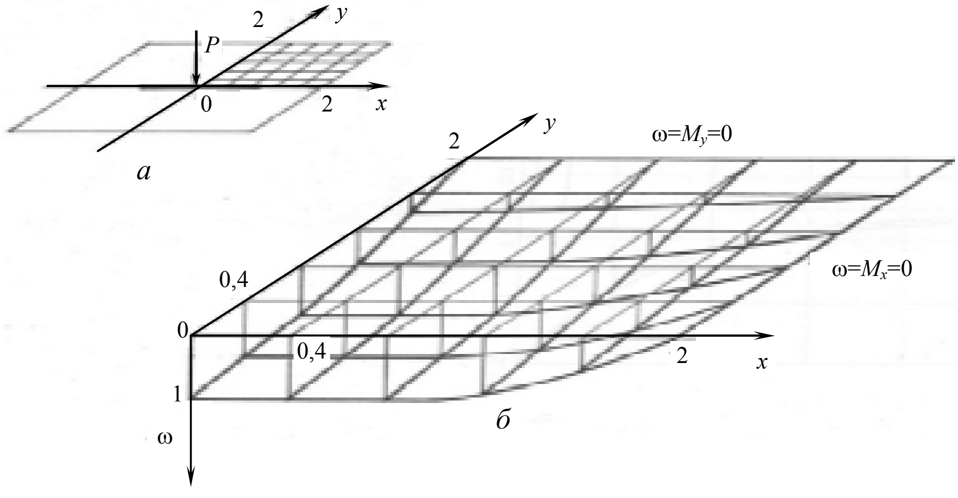

Рис. 1. Распределение прогибов пластины

Оптимальное, с точки зрения удовлетворения граничным условиям, расположение точек коллокации в зависимости от величины $\varepsilon=c/a$ приведено в табл. 1.

Таблица 1

Количество точек коллокации

$\varepsilon=c/a$	Представление					
	(6)			(7)		
	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
0,66	6	5	4	4	3	3
0,5	6	5	4	4	3	3
0,2	3	3	3	4	3	3
0,1	3	3	3	3	3	3

При использовании (6) вычислялась равнодействующая контактных усилий

$$D^{-1}P = \int_0^1 \Psi(\xi)d\xi = \psi_0\int_0^1 16\frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + \psi_1\int_0^1 128\frac{P_2^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}(\xi)}{(1-\xi^2)^{\frac{3}{2}}}d\xi + \\ +\sum_{n=2}^{N} 64n(2n-1)\psi_k\int_0^1 (1-\xi^2)^{-\frac{3}{2}}P_{2n}^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Для вычисления регуляризованных значений расходящихся интегралов в (8) воспользуемся тем, что при $\mathrm{Re}\lambda>-1$ [1, 2]

$$I_n(\lambda) = \int_0^1 (1-x^2)^{\lambda} P_{2n}^{\lambda,\lambda}(x)dx = 0 \quad (n\geq 0). \tag{9}$$

Следовательно, в регуляризованном смысле $I_n\left(-\frac{3}{2}\right)=0$, откуда $D^{-1}P = 8\pi\psi_0$

При представлении прогиба в виде (7) равнодействующая контактных усилий $D^{-1}P=8\pi a_0$.

Данная задача методом интегральных преобразований сведена к интегральному уравнению относительно скачка равнодействующей контактных усилий [1, 2]. Сравнение полученных значений безразмерного коэффициента $\alpha=10^3(Pa^2)^{-1}DW$ (6),(7) с известными [2,3] приведено в табл. 2.

Таблица 2

Значения безразмерного коэффициента α

$\varepsilon=c/a$	$\alpha = 10^3(Pa^2)^{-1}DW$ (6), (7)		
	[1, 2]	(6)	(7)
0,66	2,16	2,29	2,13
0,5	4,40	4,64	4,68
0,2	9,60	9,63	9,17
0,1	10,75	10,98	10,60

Графики изгибающих моментов M_x, M_y вдоль линии $y=+0, 0\leq x\leq a$ приведены на рис. 2; a=2. При $(x,y)\to(1,0)$ $M_x, M_y\to\infty$ как $r^{\frac{1}{2}}, r = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

 ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

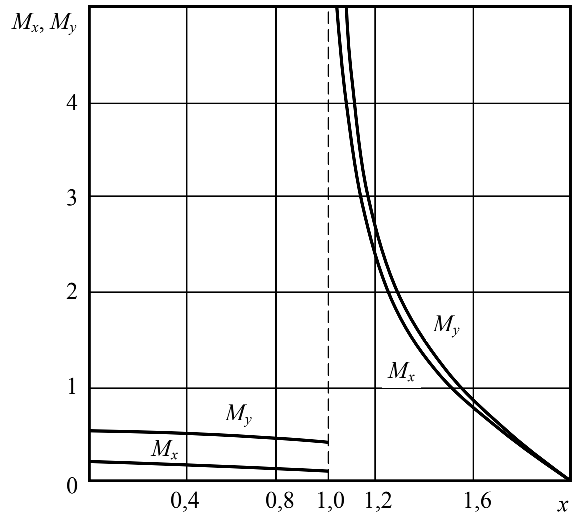

Рис. 2. Графики изгибающих моментов M_x, M_y вдоль линии $y = +0,0 \le x \le a$: D=1, P=13,9

Эпюры величин $K_x = \lim \dfrac{M_x \sqrt{r}}{P \sqrt{c}}$, $K_y = \lim \dfrac{M_y \sqrt{r}}{P\sqrt{c}}$ при r=10^{-4} приведены на рис. 3. Качественная картина аналогична результатам [3], где рассматривались бесконечные пластины.

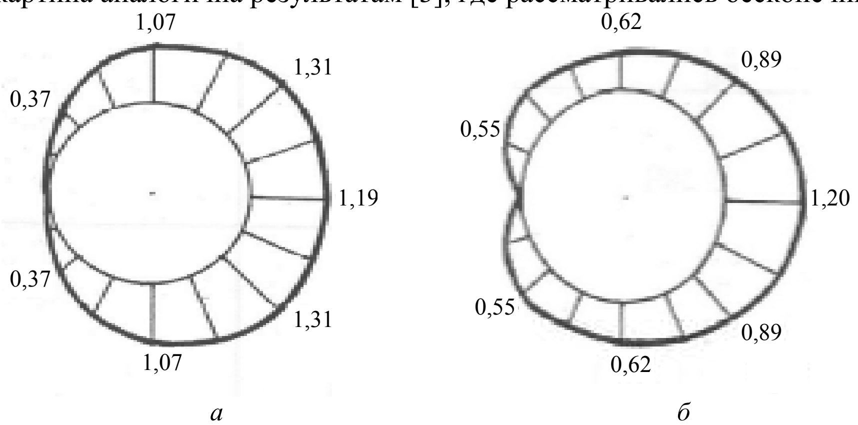

Рис. 3. Эпюры K_x (а), K_y (б).

Полученные данные показывают, что использование метода граничной коллокации достаточно эффективно методом при решении задач изгиба конечных пластин с включениями.

Литература

1. Онищук, О.В. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями / О.В. Онищук, Г.Я. Попов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 4. — С.141 — 150.
2. Попов, Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
3. Бережницкий, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. — К.: Наук. думка, 1979. — 400 с.
4. Грибова, В.В. Расчет пластин с тонкими включениями на основе специальной системы бигармонических функций / В.В. Грибова, О.В. Онищук, Г.Я. Попов // 2-я респ. научн.-техн. конф. “Ме-

ханика машиностроения”. Секция механика деформируемого твердого тела: тез докл. — Брежнев, 1987. — С.11.
5. Грибова, В.В. Об одном методе решения бигармонических задач для областей с разрезами, основанными на использовании специальной системы бигармонических функций / В.В. Грибова // Респ. науч. конф. “Дифференц. и интегр. уравнения и их приложения”: Тез. докл. — Одесса: ОГУ, 1987. — Ч.2. — С.74 — 75.
6. Колмогорцев, В.Ф. Методические указания по написанию курсовых и дипломных работ по математической физике “Метод граничной коллокации” / В.Ф. Колмогорцев, О.В. Онищук, Ю.С. Процеров; ОГУ. — Одесса, 1980. — 51с.

References

1. Onishchuk, O.V. O nekotorykh zadachakh izgiba plastin s treshchinami i tonkimi vklyucheniyami [On some problems of bending plates with cracks and thin inclusions] / O.V. Onishchuk, G.Ya. Popov // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of rigid body] — 1980. — # 4. — PP.141 — 150.
2. Popov, G.Ya. Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniy [Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusions and reinforcements] / G.Ya. Popov. — Moscow, 1982. — 342 p.
3. Berezhnitskiy, L.T. Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin [Bending of thin plates with crack defects] / L.T. Berezhnitskiy, M.V. Delyavskiy, V.V. Panasyuk. — Kyiv, 1979. — 400 p.
4. Gribova, V.V. Raschet plastin s tonkimi vklyucheniyami na osnove spetsial’noy sistemy bigarmonicheskikh funktsiy [Calculation of plates with thin inclusions based on a special system of bigarmonic functions] / V.V. Gribova, O.V. Onishchuk, G.Ya. Popov // 2-ya resp. nauchn.-tekhn. konf. “Mekhanika mashinostroeniya”. Sektsiya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela: tez dokl. [2-nd repub. sci.-tech. conf. “Mechanics in machine-building”. Section of deformed rigid body mechanics: heads of report] — Brezhnev, 1987. — P.11.
5. Gribova, V.V. Ob odnom metode resheniya bigarmonicheskikh zadach dlya oblastey s razrezami, osnovannymi na ispol’zovanii spetsial’noy sistemy bigarmonicheskikh funktsiy [On a method for solving bigarmonic problems of cuts areas on the basis of applying a special system of bigarmonic functions] / V.V. Gribova // Resp. nauch. konf. “Differents. i integr. uravneniya i ikh prilozheniya”: Tez. dokl. [Repub. sci. conf. “Differential and integral equations and their applications”: heads of report] — Odessa, 1987. — Issue 2. — PP.74 — 75.
6. Kolmogortsev, V.F. Metodicheskie ukazaniya po napisaniyu kursovykh i diplomnykh rabot po matematicheskoy fizike “Metod granichnoy kollokatsii” [Workbook for writing term and diploma papers in mathematical physics “Boundary collocation method”] / V.F. Kolmogortsev, O.V. Onishchuk, Yu.S. Protserov; OGU. — Odessa, 1980. — 51 p.

Рецензент канд. техн. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-та Плотникова Л.И.

Поступила в редакцию 5 октября 2010 г.