

УДК 539.3

**В.А. Гришин**, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова,  
**В.А. Гришина**, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т,  
**В.В. Реут**, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПРОДОЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

*В.О. Гришин, В.О. Гришина, В.В. Реут. Дослідження коефіцієнтів інтенсивності напруги в пластинчастій конструкції з поздовжніми тріщинами.* Досліджується задача про напружений стан пластинчастої конструкції з тріщинами. Наведено результати розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напруги для різних співвідношень геометричних розмірів конструкції.

*Ключові слова:* напружений стан, пластинчаста конструкція, тріщини, коефіцієнти інтенсивності напруги.

*В.А. Гришин, В.А. Гришина, В.В. Реут. Исследование коэффициентов интенсивности напряжений в пластинчатой конструкции с продольными трещинами.* Исследуется задача о напряженном состоянии пластинчатой конструкции с трещинами. Приведены результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений для различных соотношений геометрических размеров конструкции.

*Ключевые слова:* напряженное состояние, пластинчатая конструкция, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений.

*V.A. Grishin, V.A. Grishina, V.V. Reut. Research of stress intensity factors in a plate construction with longitudinal cracks.* The problem of stress state of a plate construction with cracks is researched. The results of calculating the coefficients of stress intensity for the various ratios between geometrical sizes of construction are presented.

*Keywords:* stress state, plate construction, cracks, stress intensity factors.

Тонкостенные конструкции прямоугольного профиля имеют широкое использование в строительстве, кораблестроении и машиностроении. Вследствие громоздкости задачи исследования пластинчатых конструкций как силовых элементов строительной механики рассматривались с различными допущениями в зависимости от видов нагружения и условий закрепления.

Метод расчета коробчатых оболочек, который сводится к решению задачи о совместном плоскоизгибном напряженном состоянии пластины с дефектами, роль которых играют ребра оболочки, был предложен ранее [1]. Преимущество этого метода заключается в том, что во-первых, вдвое сокращается количество решаемых дифференциальных уравнений и условий стыковки, а во-вторых, методы решения как плоских, так и изгибных задач для пластин с дефектами хорошо разработаны [2, 3]. Этим методом решены задачи об осадках включений в коробчатых оболочках [4, 5]. Решена задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки с трещиной, выходящей на ребро оболочки [6]. Изучался вопрос об ослаблении коробчатых оболочек трещинами [7...10], в том числе ослабленной дугообразной трещиной [10].

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии коробчатой оболочки бесконечной длины прямоугольного профиля, ослабленной парой симметричных трещин (рис. 1).

Предполагается, что все пластины, из которых складывается оболочка, выполнены из одного материала

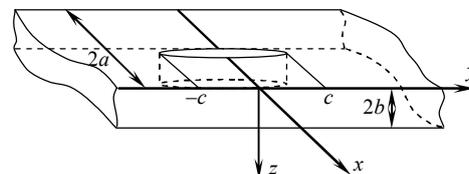


Рис. 1. Геометрические размеры поперечного сечения пластинчатой конструкции и трещины

и имеют одинаковую толщину  $h$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , модуль упругости  $E$ , цилиндрическую жесткость  $D$ . Берега трещины нагружены изгибающими моментами  $m(y)$  и плоскими растягивающими нагрузками  $\sigma(y)$ . Нагрузки, которые действуют на оболочку, симметричны относительно плоскостей симметрии оболочки и такие, что берега трещин не смыкаются. Задача сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(x, y) &= 0, \\ \Delta^2 \sigma_x(x, y) &= 0, \quad -a < x < b, \quad x \neq 0, \quad |y| < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям на ребре оболочки

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \langle \tau_{xy} \rangle = \langle \varphi_{xy} \rangle = \langle M_{xy} \rangle = 0, \\ \langle u \rangle &= -(w_+ + w_-); \quad \langle w \rangle = u_+ + u_-, \\ \langle \sigma_x \rangle &= -h^{-1} [(V_x)_+ + (V_x)_-], \\ \langle V_x \rangle &= h [(\sigma_x)_+ + (\sigma_x)_-] \end{aligned} \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} V_x = \tau_{xy} = 0; \quad M_x = m(y); \quad \sigma_x = \sigma(y); \quad x = -a, \quad |y| < c, \\ V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0; \quad x = -a, \quad |y| > c, \\ V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0; \quad x = b, \end{aligned}$$

где  $u, v, w$  — перемещения вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;

$\varphi_x, M_x, V_x, \sigma_x, \tau_{xy}$  — угол поворота, изгибающий момент, обобщенная поперечная сила, нормальное и касательные напряжения.

При этом граничные условия удобно представить в виде

$$\begin{aligned} V_x = \tau_{xy} = 0, \quad \varphi_x = \chi(y), \quad u = \mu(y), \quad x = -a, \\ V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0, \quad x = b, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\chi(y)$  и  $\mu(y)$  — неизвестные функции на интервале  $|y| < c$ , равные нулю вне этого интервала, которые представляют собою угол наклона и нормальные перемещения берегов трещины.

Не ограничивая общности, можно считать, что проведена необходимая замена переменных  $x$  и  $y$  и  $c = 1$ . После применения преобразования Фурье к упругим неизвестным и нагрузкам аналогично тому, как это было сделано [1], а также к неизвестным функциям  $\chi(y)$  и  $\mu(y)$ , получим

$$\chi_\alpha = \int_{-1}^1 \chi(y) e^{i\alpha y} dy, \quad \mu_\alpha = \int_{-1}^1 \mu(y) e^{i\alpha y} dy. \quad (4)$$

Задача (1)...(3) сводится к системе двух интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \ln|y - \eta| \begin{bmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{bmatrix} d\eta + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} \sigma_*(y) \\ m_*(y) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{где } m_* = 2(D\gamma)^{-1} m(y); \quad \sigma_* = -2\sigma(y); \quad (6)$$

$$K_{ij}(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(\alpha) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha; \quad (7)$$

$k_{ij}(\alpha)$   $i, j = \overline{1, 2}$  виражаються через дифференціальні оператори і функціонали [10] от функції Грина  $G(x, \xi)$  крайової задачі

$$L^2 u(x) = 0, \quad x \in (a, b); \quad u' = u''' = 0, \quad x = -a, b.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к системе интегральных уравнений (5) относительно неизвестных функций  $\chi(y)$  и  $\mu(y)$ , которые представляют собой угол наклона и нормальные перемещения берегов трещины. Упругие неизвестные задачи: плоские и изгибные напряжения и перемещения выражаются через трансформанты неизвестных функций и могут быть получены путем обратного преобразования Фурье.

Воспользуемся методом ортогональных многочленов [2] и будем разыскивать решение в виде разложения неизвестных функций в ряд по многочленам Чебышева второго рода  $U_k(\eta)$  с неизвестными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{pmatrix} = \sqrt{1-\eta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \chi_k \end{pmatrix} U_k(\eta), \quad |\eta| < 1. \quad (8)$$

После подстановки (8) в (5) и интегрирования с весовым коэффициентом  $\sqrt{1-y^2} U_n(y)$  каждого уравнения системы по  $y$  на интервале  $(-1, 1)$  с учетом спектрального соотношения [2]

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|y-x|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -(n+1) U_n(x)$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода нормальных по Пуанкаре-Коху относительно коэффициентов разложения

$$(n+1) \begin{pmatrix} \mu_n \\ \chi_n \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^{(k,n)} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \chi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ m_n \end{pmatrix}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (9)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{A}^{(k,n)}$  выражаются через интегралы от произведений  $k_{ij}(\alpha)$   $i, j = \overline{1, 2}$  и функций Бесселя  $J_k(\alpha)$ , а коэффициенты правых частей

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ m_n \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \sigma_*(y) \\ m_*(y) \end{pmatrix} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy.$$

Процедура вычисления компонент матрицы  $\mathbf{A}^{(k,n)}$  существенным образом упрощается вследствие блочной симметрии и облегчается вследствие экспоненциального убывания подинтегральной функции.

Решение бесконечной алгебраической системы (9) позволяет определить все упругие неизвестные, используя решение задачи в трансформантах (5) в форме (8) и теорему о свертке, а также определить коэффициенты интенсивности плоских  $k_+$  и изгибных  $k_-$  напряжений. Под коэффициентом интенсивности напряжений  $k_{\pm}$ , следуя [3], будем понимать коэффициент, через который выражаются главные части напряжений вблизи концов трещин. Под главными частями напряжений имеются в виду коэффициенты при особенностях в выражении для напряжений вблизи концов трещин. Численное решение задачи (1)...(3), сведенной к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (9), проводилось методом редукции с сохранением четырех членов разложения для  $\mu(y)$  и  $\chi(y)$  в (8). В качестве нагрузки выбирались плоские нормальные напряжения интенсивности  $\sigma = \text{const}$ , приложенные к берегам трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины  $k_{\pm}$  связаны с безразмерными коэф-

коэффициентами интенсивности напряжений от плоской нагрузки  $k_{\pm}^G$ , для которых проводились вычисления соотношениями

$$k_{\pm} = k_{\pm}^G \sigma \sqrt{c}. \quad (10)$$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты расчета: графики зависимости коэффициентов интенсивности напряжений (10) от длины трещины  $c/a$  для ряда значений геометрических соотношений  $a/b$ .

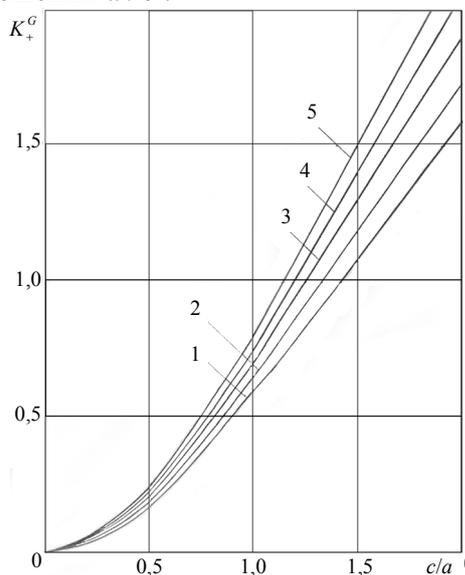


Рис. 2. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений  $K_+^G$  от длины трещины для геометрических соотношений  $a/b = 1$  (1), 4 (2), 8 (3), 20 (4) и для полосы (5)

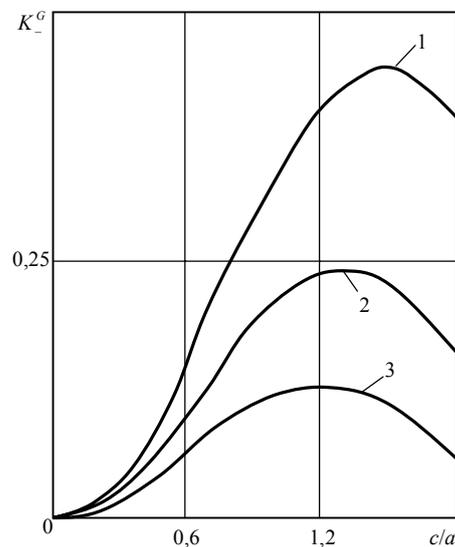


Рис. 3. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений  $K_-^G$  от длины трещины для геометрических соотношений  $a/b = 0,5$  (1), 1 (2), 2 (3)

Кривая 5 на рисунке 2, соответствующая известной плоской задаче о полосе с трещиной, решенной другими методами, совпадает с полученным решением при  $b \rightarrow 0$ .

Результаты расчетов показывают, что при действии плоских нагрузок коэффициенты интенсивности напряжений  $k_+^G$  на несколько порядков превышают коэффициенты интенсивности напряжений  $k_-^G$ . Это свидетельствует о том, что при решении совместной плоско-изгибной задачи при нагрузке, действующей в плоскости пластин, влияние плоских напряжений (плоской задачи) на коэффициент интенсивности напряжений значительно превосходит влияние изгибных напряжений (изгибной задачи).

### Литература

1. Гришин, В.А. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения / В.А. Гришин, В.В. Реут, Г.Я. Попов // Приклад. математика и механика.—1990.— Т. 54.— Вып. 4. — С. 605 — 612.
2. Попов, Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
3. Бережницкий, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк— К.: Науч. мысль, 1979. — 400с.
4. Гришин, В.А. Напряженное состояние коробчатой оболочки, подкрепленной парой симметричных включений, параллельных ребру оболочки / В.А. Гришин, В.В. Реут. // Прикл. математика и механика. — 1995. — Т. 59. — Вып.5 — С. 849 — 852.

5. Гришин, В.А. Определение осадок включений в коробчатых оболочках прямоугольного профиля / В.А. Гришин, В.В. Реут // Теорет. и прикл. механика. — Донецк, 2005. — Вып. 41. — С. 198 — 202.
6. Migdalski, V.I. An Arbitrary Oriented Crack in the Box Shell / Migdalski, V.I. and V.V. Reut // Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 117 (2000). — P. 261 — 266.
7. Grishin, V. The stress state of Box Shell weakened by Cracks / V. Grishin, V. Grishina // International Conference “Modern Analysis and Applications” (MAA 2007) dedicated to the century of Mark Krein, Odessa, Ukraine, April 9 — 14, 2007. — Book of abstracts. — Kyiv, 2007. — P. 54 — 55.
8. Grishin, V. The problem on the stress state of a cube boxed shell / V. Grishin, V. Grishina // International Conference “Modern Analysis and Applications” (MAA 2007) dedicated to the century of Mark Krein, Odessa, Ukraine, April 9 — 14, 2007. — Book of abstracts. — Kyiv, 2007. — P. 120 — 121.
9. Grishin, V.A. Box-like Shells with longitudinal Cracks / V.A. Grishin, V.V. Reut, E.V. Reut // Operator Theory: Advances and Applications, 2009. — Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland. — Vol. 191. — P. 357 — 364.
10. Гришин, В.А. Напряженное состояние коробчатой оболочки, ослабленной дугообразной трещиной / В.А. Гришин, Е.В. Реут, В.В. Реут // Тринадцата міжнар. наук. конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 13 — 15 травня 2010 р. Матеріали конференції. — К., 2010. — С. 124.

### References

1. Grishin, V.A. Raschet korobchatykh obolochek pryamougolnogo secheniya [Calculation of Box Shells with Rectangular Section] / V.A. Grishin, V.V. Reut, G.Y. Popov // Applied Mathematics and Mechanics. — Moscow, 1990. — Vol. 54. — Iss. 4. — pp. 605 — 612.
2. Popov, G.Y. Kонтсентрати́я uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkreplenyi [Concentration of Elastic Stresses nearby Stamps, Cuts, Thin Inclusions and Reinforcements] / G.Y. Popov — Moscow, 1982. — 342 p.
3. Berezhnitskiy, L.T. Izgib tonkikh plastin s defektamy tipa treshchin [Bending of Thin Plates with Defects Such as Cracks] / L.T. Berezhnitskiy, M.V. Delyavskiy, V.V. Panasyuk — Kyiv, 1979. — 400 p.
4. Grishin, V.A. Napryazhennoe sostoyanie korobchatoy obolochki, podkreplenoj paroy simmetrichnykh vklyucheniy, parallelnykh rebru obolochki [Stress State of the Box Shell Reinforced by Pair of Symmetric Inclusions Parallel to Shell Edge] / V.A. Grishin, V.V. Reut // Applied Mathematics and Mechanics. — Moscow, 1995. — Vol. 59. — Iss. 5 — pp. 849 — 852.
5. Grishin, V.A. Opredelenie osadok vklyucheniy v korobchatykh obolochkakh pryamougolnogo profilya [Calculation of a Draft of Inclusions in Box Shells with Rectangular Profile] / V.A. Grishin, V.V. Reut // Theor. and Appl. Mechanics. — Donetsk, 2005 — Iss. 41. — pp. 198 — 202.
6. Migdalski, V.I. An Arbitrary Oriented Crack in the Box Shell / V.I. Migdalski and V.V. Reut // Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 117 (2000). — pp. 261 — 266.
7. Grishin, V. The Stress State of Box Shell Weakened by Cracks / V. Grishin and V. Grishina // International Conference “Modern Analysis and Applications” (MAA 2007) dedicated to the century of Mark Krein, Odessa, Ukraine, April 9 — 14, 2007. — Book of abstracts. — Kyiv, 2007. — pp. 54 — 55.
8. Grishin, V. The Problem of the Stress State of a Cube Box Shell / V. Grishin and V. Grishina // International Conference “Modern Analysis and Applications” (MAA 2007) dedicated to the century of Mark Krein, Odessa, Ukraine, April 9 — 14, 2007. — Book of abstracts. — Kyiv, 2007. — pp. 120 — 121.
9. Grishin, V.A. Box-like Shells with Longitudinal Cracks / V.A. Grishin, V.V. Reut, E.V. Reut // Operator Theory: Advances and Applications, 2009. — Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland. — Vol. 191. — pp. 357 — 364.
10. Grishin, V.A. Napryazhennoe sostoyanie korobchatoy obolochki, oslablenoy dugoobrasnoy treshchinoy [Stress State of the Box Shell Weakened by an Arc-shaped Crack] / V.A. Grishin, E.V. Reut, V.V. Reut // 13<sup>th</sup> international scientific conference by acad. M. Kravchuc, Kyiv, 13 — 15 May, 2010. — Kyiv, 2010. — p. 124.

Рецензент д-р техн. наук., проф. Одес. нац. ун-та ім. І.І. Мечникова Вайсфельд Н.Д.

Поступила в редакцію .12 марта 2012 г.