

УДК 629.3.032+629.3.028

Л.М. Петров, канд. техн. наук, доц., Одес. держ.  
аграр. ун-т

## ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ДО ОПИСАННЯ КОЧЕННЯ КОЛЕСА В УМОВАХ ЗВ'ЯЗКУ З ПРОШАРКАМИ ОПОРНОЇ ПОВЕРХНІ

*Л.М. Петров.* Застосування рівнянь невіЛЬНОЇ матеріальної точки до описання кочення колеса в умовах зв'язку з прошарками опорної поверхні. Розглянуто застосування рівнянь невіЛЬНОЇ матеріальної точки до описання кочення колеса в умовах зв'язку з опорною поверхнею. Проведено математичний аналіз і отримано дані для створення математичної моделі кочення колісного рушія, який динамічно поєднаний з опорною поверхнею.

*Ключові слова:* деформація, напруження, прошарок, жорсткість, колісний рушій.

*Л.Н. Петров.* Применение уравнений несвободной материальной точки к описанию качения колеса в условиях связи с прослойками опорной поверхности. Рассмотрено применение уравнений несвободной материальной точки к описанию качения колеса в условиях связи с опорной поверхностью. Проведено математический анализ и получены данные для создания математической модели качения колесного движителя, динамически соединенного с опорной поверхностью.

*Ключевые слова:* деформация, напряжение, прослойка, жесткость, колесный движитель.

*L.M. Petrov.* Application of the equations of a constrained particle to the description of wheel rolling in relation to the supporting surface layers. The application of the equations of a constrained particle to the description of wheel rolling in relation to the supporting surface is considered. The mathematical analysis is carried out and the data are obtained to create a mathematical model of the rolling wheel propeller dynamically coupled to the supporting surface.

*Keywords:* deformation, stress, layer, stiffness, wheel propeller.

При коченні колеса деформація ґрунту в кожний момент часу відбувається переважно по нормалі до його обода [1]. За допомогою коефіцієнтів, які коректують формули Буссинеска, наближують розрахункові закономірності розподілення напружень у м'яких ґрунтах до дійсних [2].

Виділяти  $n$  однакових шарів ґрунту, відносні деформації яких визначають за допомогою формули опору матеріалів, запропоновано в [3]

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}, \quad (1)$$

де  $\sigma_i$  — середні напруження;

$E$  — коефіцієнт пропорційності, який зв'язує напруження та деформацію у будь-якій точці масиву.

За формулою (1) обчислюють деформації шару ґрунту при нерівномірному розподіленні напружень по глибині ґрунту та робиться висновок щодо застосовності моделі Кельвіда до описання деформування ґрунту під дією колеса на ґрунт.

Отримано формули основних показників взаємодії коліс з ґрунтом: коефіцієнта кочення; максимальної деформації ґрунту [3].

Цими формулами відображено вплив конструктивних і експлуатаційних чинників на опір кочення та деформації ґрунту. При цьому отримано ступінь відповідності їх значень дійсним значенням оцінки реологічних та геометричних параметрів деформування ґрунту в точці  $A$ .

Для визначення параметра деформування ґрунту точці в  $A$  використовується розрахункова закономірність розподілу напружень у ґрунті під колесом, яке котиться [4].

$$\sigma_i = \sigma_m \frac{B}{B+z},$$

де  $\sigma_m$  — максимальний контактний тиск;  
 $z$  — заглиблення протектора, в точці якого визначається напруження;

$B$  — висота протектора.

Аналіз розглянутих теорій показує, що в них відсутнє врахування пружних властивостей опорної поверхні. З метою врахування таких властивостей запропоновано для описання кочення колісного рушія застосувати рівняння невільної матеріальної точки до описання кочення колеса в умовах зв'язку з прошарком опорної поверхні [5].

Оскільки кочення колісного рушія обумовлюється наперед заданими умовами, рух колісного рушія є обмеженим, тому що колісний рушій здійснює кочення по опорній поверхні, зв'язком якої з ним є деформований прошарок.

Рівняння опорної поверхні

$$f(x, y) = 0. \quad (2)$$

Розв'язання цього рівняння дозволяє визначити параметри процесу кочення колісного рушія. Під час руху (кочення) колісного рушія точки контакту його з опорною поверхнею замикаються на ній, а координати повинні задовольняти цьому рівнянню.

При розгляданні кочення колісного рушія приймається до уваги механічна дія на нього з боку опорної поверхні у вигляді реакції зв'язку  $N$  (див. рисунок).

Нехай опорна поверхня не має тертя. Тоді згідно з другим законом Ньютона

$$ma = F + N,$$

де  $m$  — маса, яка приходить на колісний рушій;  
 $a$  — прискорення, з яким рухається колісний рушій;  
 $F$  — сила, яка діє на колісний рушій.

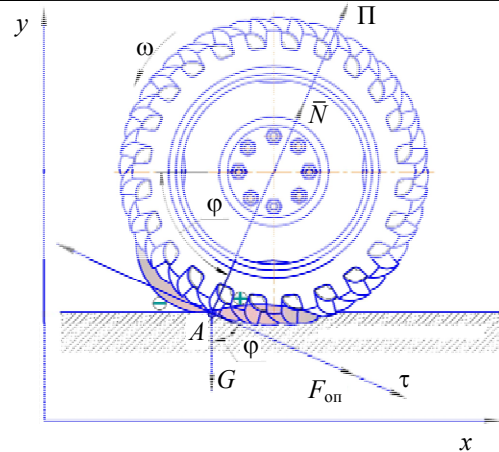
Якщо обидві частини цього рівняння спроектувати на декартові осі координат, будуть отримані диференціальні рівняння можливої рухливості колісного рушія

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{\text{оп}x} + N_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{\text{оп}y} + N_y, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $F_{\text{оп}x}$  — складова сили опору по осі  $x$ ;  
 $F_{\text{оп}y}$  — складова сили опору по осі  $y$ ;  
 $N_x$  — складова опорної реакції зв'язку по осі  $x$ ;  
 $N_y$  — складова опорної реакції зв'язку по осі  $y$ .  
 $F_{\text{оп}x}$ ,  $F_{\text{оп}y}$  являють собою проекції сили, а  $N_x$  та  $N_y$  — проекції нормальної реакції на координатні осі у відповідності з методикою [6]

$$N_x = N \cdot \cos(N, i); \quad N_y = N \cdot \cos(N, j).$$

Згідно з цією методикою та методикою диференціальної геометрії визначають направляючі косинуси нормалі до опорної поверхні (2) [6]



Пристосування натуральних та декартових осей координат до описання зв'язку колісного рушія з опорною поверхнею:  
 $\omega$  — кутове прискорення,  $c^{-1}$ ;  
 $G$  — гравітаційна вага,  $H$ .

$$\cos(N, i) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \quad \cos(N, j) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \quad (4)$$

де  $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 2r$ .

Підставивши значення (4) у диференціальні рівняння руху (3), можна отримати нові рівняння

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{\text{оп}_x} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{\text{оп}_y} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) є диференціальними рівняннями деформації опорної поверхні жорстким колісним рушієм, а множник  $N/\Delta f$  є множником Лагранжа, який для колеса, що котиться по опорній поверхні, визначає погонну деформацію еластичної шини.

Нехай точка  $A$  рухається по деформованій опорній поверхні (див. рисунок). До точки  $A$  буде прикладена сила опору  $F_{\text{оп}}$  коченню колісного рушія та сила реакції зв'язку деформованої опорної поверхні  $\bar{N}$  на жорсткий колісний рушій.

Диференціальні рівняння руху точки  $A$  по деформованій опорній поверхні та жорсткому колісному рушію матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{\text{оп}_x} + N \cos(N, i), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{\text{оп}_y} + N \cos(N, j), \end{aligned}$$

а з урахуванням множника Лагранжа

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{\text{оп}_x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{\text{оп}_y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Після введення натуральних осей координат та зв'язку за їх допомогою деформованої опорної поверхні та колісного рушія буде отримано два рівняння зв'язку

$$\begin{aligned} m \cdot a_\tau &= F_{\text{оп}_\tau}, \\ m \cdot a_n &= F_{\text{оп}_n} + N, \end{aligned}$$

де  $F_{\text{оп}_\tau}$  та  $F_{\text{оп}_n}$  — проекція  $F_{\text{оп}}$  на натуральні осі координат.

При цьому за позитивний напрямок дотичної приймається напрямок у бік можливого розтягування шини, який відраховується від точки  $A$ . За позитивний напрямок осі  $n$  приймається її напрямок до центра колеса.

В рівняннях (6) не врахована сила тертя між деформованою поверхнею та шиною. Диференціальні рівняння, які описують процес кочення колісного рушія з урахуванням цих сил, матимуть вигляд [6]

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{\text{оп}_x} + N_x + F_x^{\text{TP}}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{\text{оп}_y} + N_y + F_y^{\text{TP}}. \end{aligned}$$

Проекції сили тертя на координатні осі

$$F_x^{\text{TP}} = F^{\text{TP}} \cdot \cos(F^{\text{TP}}, i) = -F^{\text{TP}} \cdot \cos(V, i) = -F^{\text{TP}} \frac{V_x}{V} = \frac{-F^{\text{TP}}}{V} \cdot \frac{dx}{dt};$$

$$F_y^{\text{TP}} = \frac{-F^{\text{TP}}}{V} \cdot \frac{dy}{dt}.$$
(7)

З урахуванням (7) диференціальні рівняння руху колісного рушія по деформованій опорній поверхні матимуть вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{оп}x} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F^{\text{TP}}}{V} \cdot \frac{dx}{dt};$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{\text{оп}y} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F^{\text{TP}}}{V} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Проекції сил на осі координат

$$ma = F_{\text{оп}} \cdot \sin \phi;$$

$$ma = -F_{\text{оп}} \cdot \cos \phi - mg.$$

Рівняння зв'язку деформованої опорної поверхні та жорсткого колеса — це рівняння кола

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 2y.$$

Диференціальне рівняння руху точки  $A$  деформованої поверхні у формі Лагранжа має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{оп}} \cdot \sin \phi + 2\lambda x;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{\text{оп}} \cdot \cos \phi - mg + 2\lambda y.$$

Вводяться натуральні осі координат  $n$  і  $\tau$  та проєктуються діючі сили на ці осі. Отримуються диференціальні рівняння у формі Ейлера

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{оп}\tau} + mg \cos \phi;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \sin \phi + N.$$
(8)

З кінематики відомо, що прискорення на дотичну та нормаль мають вигляд [6]

$$a_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

де  $S$  — дуга деформованої опорної поверхні чи шини.

$$S = r \cdot \phi$$

Тоді з (8)

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_{\text{оп}} + mg \cos \phi;$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = -mg \sin \phi + N.$$

Двічі продиференціюємо

$$\frac{dS}{dt} = r \cdot \frac{d\phi}{dt}.$$

Знаходимо диференціальне рівняння руху колісного рушія частини шини в опорній поверхні.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = r \cdot \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

З викладеного можна зробити висновки:

Розроблено фізико-математичну модель колісного рушія, який динамічно поєднаний з прошарком опорної поверхні.

Отримане диференціальне рівняння кочення колісного рушія по деформованій поверхні, яке у наближеному вигляді відповідає диференціальному рівнянню руху невільної матеріальної точки, обмеженої зв'язками згідно з теорією Лагранжа.

Зміна зони стискання шини на зону розширення вказує на те, що в точці зміни негативного знаку на позитивний здійснюється вивільнення великої кількості енергії, а тому руйнування шляху виникає не стільки від дії гравітаційної сили та сил тертя, скільки від дії цієї енергії.

### Література

1. Бабков, В.Ф. Проходимость колесных машин по грунту / В.Ф. Бабков, А.К. Бируля, В.М. Сиденко. — М.: Автотрансиздат, 1959. — 189 с.
2. Вонг, Дж. Теория наземных транспортных средств / Дж. Вонг. — М.: Машиностроение, 1982. — 284 с.
3. Водяник, И.И. Воздействие ходовых систем на почву (научные основы) / И.И. Водяник. — М.: Агропромиздат, 1990. — 172 с.
4. Хоу, Б.К. Основы инженерного грунтоведения / Б.К. Хоу. — М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1966. — 460 с.
5. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон: в 3 т.; Т. 2. — М.: Наука, 1966. — 665 с.
6. Воронков, И.М. Курс теоретической механики / И.М. Воронков; под ред. А.П. Колесникова, А.Д. Халанской. — 11-е изд. — М.: Наука, 1964. — 596 с.

### References

1. Babkov, V.F. Prokhodimost' kolesnykh mashin po gruntu [Passability of wheeled vehicles on the ground] / V.F. Babkov, A.K. Birulya, V.M. Sidenko — Moscow, 1959. — 189 pp.
2. Vong, Dzh. Teoriya nazemnykh transportnykh sredstv [The theory of land-based vehicles] / Dzh. Vong. — Moscow, 1982. — 284 pp.
3. Vodyanik, I.I. Vozdeystvie khodovykh sistem na pochvu (nauchnye osnovy) [The impact of chassis systems on the ground (scientific basis)] / I.I. Vodyanik. — Moscow, 1990. — 172 pp.
4. Khou, B.K. Osnovy inzhenerenogo gruntovedeniya [Fundamentals of Soil Engineering] / B.K. Khou — Moscow, 1966. — 460 pp.
5. Bat', M.I. Teoreticheskaya mekhanika v primerakh i zadachakh. Dinamika [Theoretical Mechanics in the examples and problems. Dynamics] / M.I. Bat', G.Yu. Dzhanelidze, A.S. Kel'zon: in 3 vol.; vol. 2. — Moscow, 1966. — 665 pp.
6. Voronkov, I.M. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [ A Course of Theoretical Mechanics] / I.M. Voronkov; edited by A.P. Kolesnikov, A.D. Khalanskaya. — 11<sup>th</sup> edition. — Moscow, 1964. — 596 pp.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. політехн. ун-ту Оробей В.Ф.

Надійшла до редакції 21 травня 2012р.