**УДК 681.518.52:544.023.523.**

**А. М. Тигарев,** канд. техн. наук, доц., Одес. нац. акад. связи им. А.С.Попова,
**Т.Г. Тигарева,** инженер, Одес. гос. акад. строительства и архитектуры

# ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА ПОРОШКОВ

*А.М. Тігарєв, Т.Г. Тігарєва.* **Застосування інваріантів при визначенні закону розподілу дисперсного складу порошків.** Запропоновано методику вибору й застосування інваріантів при визначенні закону розподілу дисперсного складу порошків. В основі методики лежить положення, що існує функціональна залежність між ($i$+1)-ми початковими моментами $m_k$ (0; 1;…; $i$+1), які характеризують аналітичні закони розподілу. Наведено використання методики для одно- і двохпараметричних законів, а також інваріанти для 9-ти законів розподілу. Запропоновано методику визначення повного закону розподілу на підставі експериментальних даних.

*Ключові слова*: дисперсний склад, закон розподілу, гістограма щільності ймовірності, критерії згоди, інваріанти розпізнавання.

*А.М. Тигарев, Т.Г. Тигарева.* **Применение инвариантов при определении закона распределения дисперсного состава порошков.** Предложена методика выбора и применения инвариантов при определении закона распределения дисперсного состава порошков. В основе методики лежит положение, что существует функциональная зависимость между ($i$+1)-ми начальными моментами $m_k$ (0; 1;…; $i$+1), характеризующими аналитические законы распределения. Приведено использование методики для одно- и двухпараметрических законов, а также инварианты для 9-ти законов распределения. Предложена методика определения полного закона распределения на основании экспериментальных данных.

*Ключевые слова*: дисперсный состав, закон распределения, гистограмма плотности вероятности, критерии согласия, инварианты распознавания.

*A.M. Tigariev , T.G. Tigarieva.* **Application of invariants in determining the distribution law for dispersion of powders.** A technique for choosing and applying invariants in determining the distribution law for dispersion of powders is proposed. The technidue is based of the proposition that there exists a functional dependence between ($i$+1) initial moments $m_k$ (0 lays; 1; …; $i$+1), characterising analytical laws of distribution. The use of the technique for one- and two-parametric laws, as well as the invariants for 9 laws of distribution, are presented. The technique for detemining of the full law of distribution on the basis of experimental data is offered.

*Keywords*: dispersion/disperse composition, distribution law, histogram of probability density, fitting criterions, recognition invariants.

Порошковые материалы широко применяются в порошковой металлургии, химической, электронной, строительной, пищевой, фармацевтической, микробиологической и др. отраслях промышленности. Они представляют собой двухфазные дисперсные системы, состоящие из жидкой или газовой дисперсионной среды и дисперсной фазы из твердых частиц. Основные свойства порошков определяются дисперсным составом (ДС), который обычно оценивают усредненными показателями — средний арифметический, медианный диаметры частиц, полная, удельная поверхность дисперсной фазы. Показатели определяют технологические параметры дисперсных систем — насыпную массу, плотность упаковки, текучесть и др., влияющие на качество порошков и изделий из них — электро-, радиоматериалов, люминофоров, композитов, абразивов, пигментов и др. Внедрение новых технологий, использующих порошковые материалы, повышение требований к качеству продукции и ее конкурентоспособности, к снижению себестоимости обусловливает необходимость получения порошков с заданным ДС. Наиболее

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

информативной характеристикой ДС является функция распределения частиц по размерным параметрам, например, эквивалентным диаметрам, позволяющая определять содержание любой фракции дисперсной фазы в порошке.

Результат анализа ДС порошков на основе дифференциальных методов чаще всего представляют гистограммой плотности вероятности $F$ распределения частиц по размерному параметру, обычно — эквивалентному диаметру. Для аналитического описания закона распределения однокомпонентных порошков были предложены различные выражения [1], представляющие собой их математическую модель по размерным параметрам частиц. Законы распределения, описывающие распределения частиц, получаемых в технологических процессах измельчения, распыления, дробления и т.д., являются в основном одномодальными [1, 2]. При проведении анализа часто неизвестен вид закона распределения, которому подчиняются порошки. Для выяснения вида закона распределения по экспериментальным результатам анализа ДС применяют проверку с помощью статистических гипотез. Степень соответствия, т.е. количественная оценка между выдвинутой гипотезой и статистическими критериями устанавливается с помощью критериев согласия, например, $\chi^2$, Колмогорова.

Известные критерии согласия дают методику оценки степени приближения выбранного аналитического закона распределения к эмпирическому закону распределения в виде гистограммы или полигона [1]. Эта методика не рассматривает вопрос о выборе аналитического закона для проверки его согласия с эмпирическим. Недостаток такой методики подбора аппроксимирующих распределений состоит в неоднозначности выбора, поскольку известно несколько аналитических законов, которыми сглаживают эмпирические распределения, удовлетворяя известным критериям согласия. Это вызывает необходимость разработки методики однозначного выбора аналитического закона распределения из множества других, описывающих порошки.

В основу распознавания вида известных законов распределения следует положить новый подход, обеспечивающий уменьшение вычислительных операций и соответственно уменьшение времени расчетов. Для этого необходимо введение новых критериев — инвариантов, которые целесообразно представить в виде безразмерных комплексов, представляющих определенные функции от статистических параметров и принимающих постоянные значения. Это значит, что для каждого закона распределения должны быть однозначно определены инварианты, которые соответствуют только этому закону. Предлагается единая методологии поиска инвариантов распознавания известных непрерывных одномодальных законов распределения для описания порошков.

Если закон имеет $i$ независимых параметров, можно получить функциональную зависимость между $(i+1)$-ми начальными моментами $m_k$ (0; 1;…; $i$+1), т.е. параметрическую функцию начальных моментов, содержащую параметры закона распределения. Отсюда следует, что существует $i+1$ уравнений для выражения моментов, в которых содержится $i$ параметров. Поэтому нахождение зависимости между моментами сводится к исключению $i$ параметров из $i+1$ уравнений. Записав эту зависимость в неявном виде, получим инвариант, который для данного закона принимает нулевые значения, т.е.

$$f(m_1, m_2, ..., m_k) = 0 .$$

Для законов распределений, имеющих различное число параметров, необходимо ввести параметрические функции начальных моментов

$$\phi_{ik}(P_{1,} ..., P_i) = \int_0^\infty x^k f(x, P_1, ..., P_i)dx \quad (i,k=1,\dots,4),$$

где $\varphi_{ik}(P_1,\dots,P_i)$ — соответственно параметрические функции $k$ моментов $i$ параметров;

$f(\delta, P_1,\dots,P_i)$ — плотности вероятности распределений, содержащие $i$ параметров;

$\delta$ — случайный размерный параметр, например, диаметр частиц дисперсной фазы;

$k$ — порядок момента.

Для получения инварианта однопараметрической плотности вероятности $f(x,P)$ при $P=P_1$ достаточно знать два начальных момента

$$m_1=\varphi_{11}(P) \text{ при } k=1 \quad \text{и} \quad m_2=\varphi_{21}(P) \text{ при } k=2.$$

Запишем обратные функции для последних двух равенств

$$\psi_{11}(m_1)=P \text{ и } \psi_{21}(m_2)=P.$$

Исключая из них параметр $P$, получим $\psi_{11}(m_1)=\psi_{21}(m_2)$. Отсюда следует, что второй начальный момент можно представить функцией от первого, т. е. $m_2=\psi(m_1)$.

Итак, для каждого однопараметрического закона распределения существует функция зависимости $m_2$ от $m_1$. Таким образом, критерий распознавания такого закона можно представить в явном виде как $m_2=\psi(m_1)$ или в неявном виде как

$$\Omega_1(m_1, m_2)=0, \tag{1}$$

где $m_1$, $m_2$ — известные начальные эмпирические моменты.

Левая часть равенства (1) является критерием распознавания однопараметрического закона по двум начальным моментам $m_1$ и $m_2$. Чем ближе значение $\Omega_1$ к нулю, тем лучше сглаживается эмпирическое распределение однопараметрическим законом. Итак, для каждого однопараметрического закона существует двухмерная функция $\Omega_1(m_1, m_2)$, которая принимает нулевые значения только для этого закона.

Аналогично рассуждая, запишем функции распознавания для двухпараметрических законов

$$\begin{cases} \varphi_{12}(P_1,P_2)=m_1, \\ \varphi_{22}(P_1,P_2)=m_2, \\ \varphi_{32}(P_1,P_2)=m_3. \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) получим обратные функции

$$P_2=\phi_{12}(P_1,m_1); \quad P_2=\phi_{22}(P_1,m_2); \quad P_2=\phi_{32}(P_1,m_3),$$

которые сводятся к двум равенствам

$$\phi_{12}(P_1,m_1)=\phi_{22}(P_1,m_2)$$
$$\phi_{12}(P_1,m_1)=\phi_{32}(P_1,m_3).$$

Отсюда две обратные функции $\xi_1$, $\xi_2$

$$\xi_1(m_1,m_2)=P_1, \quad \xi_2(m_1,m_3)=P_1.$$

После приравнивания левых частей этих равенств

$$\xi_1(m_1,m_2)=\xi_2(m_1,m_3).$$

Откуда следует существование неявной функции трех переменных, которая обращается в нуль при подстановке первых трех начальных моментов, т.е.

$$\xi(m_1,m_2,m_3)=0.$$

Аналогично для распределений с тремя и четырьмя параметрами можно получить необходимые для распознавания законов признаки

$$\eta(m_1,m_2,m_3,m_4)=0.$$

Получена обобщенная классификация инвариантов распознавания законов распределения дисперсной фазы порошков по размерным параметрам, принимающих нулевые значения для каждого закона (табл. 1).

Выполним классификацию известных непрерывных одномодальных законов распределения по размерности множества параметров [2]:

— однопараметрические: показательно-степенной, Релея, экспоненциальный, Мартина, Годена–Андреева, Андреасена, Ромашова;

— двухпараметрические: гамма-распределение, $m$-распределение (Накагами), Эрланга $R$-го порядка, Вейбулла, Вейнига, Розина-Раммлера, Авдеева, Нукаяма-Танасавы, Загустина, нормальный, логнормальный;

— трехпараметрические: Свенссона;

— четырехпараметрические: Пирсона.

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

*Таблица 1*

*Классификация инвариантов распознавания законов распределения дисперсной фазы порошков по размерным параметрам*

| Количество параметров закона распределения | Инварианты распознавания |
|---|---|
| 1 | $\Omega(m_1, m_2) = 0$ |
| 2 | $\xi(m_1, m_2, m_3) = 0$ |
| 3 | $\eta(m_1, m_2, m_3, m_4) = 0$ |

Анализ законов, описывающих ДС порошков, показывает, что их можно классифицировать по количеству параметров [1, 3]. Отметим, что существуют некоторые законы распределения, которые путем замены обозначения параметров сводятся к одному. Так, законы Релея и Розина-Раммлера являются распределением Вейбулла; закон Андреасена можно свести к гамма-распределению, а законы Ромашова, Вейнига, Загустина и Авдеева либо сводятся к распределению Нукаяма-Танасавы, либо являются его частными случаями. Отсюда следует, что инварианты достаточно определить для девяти законов (табл. 2).

На основе предложенной методологии разработана и реализована методика распознавания законов распределения, содержащая вычисление значений девяти табличных инвариантов и определение минимального модуля их значений. Закон с наименьшим модулем значения инварианта принимается для аппроксимации эмпирического распределения. Если минимальное значение инварианта по абсолютной величине больше 0,05, то ни один из восьми законов не выбирается. Выбирается закон Пирсона, наиболее общий из одномодальных распределений, т.к. включает 12 известных классических законов распределений (Гаусса, Коши, гамма и т.д.). В обобщенном виде алгоритм предложенной методики распознавания законов распределения показан на рисунке.


*Алгоритм распознавания законов распределения*

По вычисленным значениям параметров можно определить, какой конкретный теоретический закон распределения следует выбрать для аппроксимации гистограммы. Затем, вычисляя среднеквадратическое отклонение эмпирической гистограммы от теоретической, можно судить о пригодности аппроксимации теоретического закона распределения.

*Таблица 2*

*Инварианты распознавания законов распределения*

| Количество параметров распределения | Закон распределения | Параметры закона | Инвариант, $\omega = 0$ |
|---|---|---|---|
| 1 | Экспоненциальный<br>$\lambda e^{-\lambda x}$ | $\lambda$ | $1-\frac{2}{1+\nu^2}$ |
| | Гамма-распределение<br>$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}$ | $\alpha$<br>$\beta$ | $\frac{2(m_2-m_1^2)}{m_3-m_1m_2}-1$ |
| | Эрланга $R$-го порядка<br>$\frac{\lambda^{R+1}}{\Gamma(R+1)}x^{R}e^{-\lambda x}$ | $\lambda$<br>$R$ | $\frac{(m_3-m_1m_2)(2m_1^2-m_2)}{(m_3-3m_1m_2)(m_1^2--m_2)}-1$ |
| | Вейбулла<br>$k\alpha x^{\alpha-1}e^{-kx^{\alpha}}$ | $\alpha$<br>$k$ | $\alpha_1\left(\frac{m_1^2}{m_2}\right)-\alpha_2\left(\frac{m_1^3}{m_3}\right)$ * |
| 2 | $m$-распределение (Накагами)<br>$\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\delta^2}\right)x^{2m-1}e^{\frac{m}{\delta^2}x^2}\ m\geq\frac{1}{2}$ | $m$<br>$\delta$ | $\frac{m_1^2}{m_2}-\frac{\Gamma^2(m+0,5)}{\Gamma(m)\Gamma(m+1)}$ ** |
| | Нормальный<br>$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(\delta-\delta_m)^2/2\sigma^2}$ | $m$<br>$\delta$ | $\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2$ |
| | Логнормальный<br>$\frac{1}{\delta\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln\delta-\delta_m)^2}{2\sigma^2}\right\}$ | $m$<br>$\delta$ | $\left(\frac{m_1^2}{m_2}\right)-\frac{m_1^3}{m_2}$ |
| | Нукаяма-Танасава<br>$Ax^{a}e^{-a\delta^{k}}$ | $a$,<br>$k$ | $(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$ *** |
| 4 | Пирсона<br>$A\exp\int_0^{\delta}\frac{(\delta-\delta_m)}{b_0+2b_1\delta+b_2\delta^2}d\delta$ | $\delta_m$<br>$b_0$<br>$b_1$<br>$b_2$ | $Sgn(D\lambda)=0$<br>$Sgn(D\lambda+1)=0$ ****<br>$Sgn(D\lambda-1)=0$ |

* $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — корни уравнений $\frac{\Gamma^2(1/\alpha+1)}{\Gamma(2/\alpha+1)}=\frac{m_1^3}{m_2}$; $\frac{\Gamma^3(1/\alpha+1)}{\Gamma(3/\alpha+1)}=\frac{m_1^3}{m_3}$

** $m$ — корень уравнения $\frac{\Gamma(m+0,5)\Gamma(m+1,5)}{\Gamma^2(m+1)}=\frac{m_1m_3}{m_2^2}$

*** $(a_1;b_1)$ и $(a_2;b_2)$ — решения систем уравнений

**** $D=b_{0b_2}-b_1^2$, $\lambda=b_1^2/(b_0b_2)$,

$Sgn$ — сигнатура групп в скобках;

$$\begin{cases}\frac{\Gamma^2((a-1)/b)}{\Gamma((a-2)/b)\Gamma(a/b)}=\frac{m_2^2}{m_1m_3},\\ \frac{\Gamma^2(a/b)}{\Gamma((a-1)/b)\Gamma((a+1)/b)}=\frac{m_1^2}{m_2};\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{\Gamma^2((a-2)/b)}{\Gamma((a-3)/b)\Gamma((a-1)/b)}=\frac{m_3^2}{m_2m_4},\\ \frac{\Gamma^2(a/b)}{\Gamma((a-1)/b)\Gamma((a+1)/b)}=\frac{m_1^3}{m_2}.\end{cases}$$

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

Среднеквадратичное отклонение является наиболее информативной оценкой погрешности измеряемой величины во всем диапазоне ее изменения. Одним из методов проверки адекватности выбранного закона распределения может быть условие

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(P_i - \Delta F_i)^2 \le \varepsilon ,$$

где $P_i$ — параметр, представляющий интервальные эмпирические вероятности;

$\Delta F_i = F_i – F_{i–1}$ — интервальные теоретические вероятности;

ε — максимально допустимое отклонение.

Таким образом, для распознавания закона распределения ДС частиц дисперсных материалов по размерным параметрам на основании экспериментальных данных предложена методика определения инвариантов для 9-ти аналитических законов распределения.

**Литература**

1. Паничкина, В.В. Методы контроля дисперсности и удельной поверхности металлических порошков. / В.В. Паничкина, И.В. Уварова. — К.: Наук. думка, 1973. — 168 с.
2. Коузов, П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. — 3-е изд. перераб. — Л.: Химия, 1987. — 264 с.

**References**

1. Panichkina, V.V. Metody kontrolya dispersnosti i udel’noy poverkhnosti metallicheskikh poroshkov. [Quality monitoring of dispersion and a specific surface of metal powders] / V.V. Panichkina, I.V. Uvarova. — Kyiv, 1973. — 168 p.
2. Kouzov, P.A. Osnovy analiza dispersnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel’chennykh materialov. [Basics of the analysis of disperse structure of industrial dusts and ground materials] / P.A. Kouzov // — 3rd edition. — St. Petersburg, 1987. — 264 p

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. акад. связи им. А.С. Попова Викулин И.М.

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.