

УДК 539.3

**В.Ф. Оробей**, д-р техн. наук, проф.,  
**А.Ф. Дашченко**, д-р техн. наук, проф.,  
**А.М. Лимаренко**, канд. техн. наук, доц.,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ РЕШЕНИЯМИ

*В.Ф. Оробей, О.Ф. Дашченко, А.М. Лимаренко.* **Метод граничных элементов в задачах с неустойчивыми развязками.** Показано застосування алгоритму чисельно-аналітичного варіанта методу граничних елементів для збільшення стійкості розв'язання задач, що мають великі коефіцієнти фундаментальних функцій. Пропонується використовувати метод дискретизації конструкції на малі частини. До дискретизованої системи можна застосувати метод граничних елементів, найбільш ефективний і точний серед існуючих методів. Наведено приклад розв'язання нестійкої однорідної задачі.

*Ключові слова:* нестійкий розв'язок, фундаментальні функції, метод дискретизації, чисельно-аналітичний варіант методу граничних елементів.

*В.Ф. Оробей, А.Ф. Дашченко, А.М. Лимаренко.* **Метод граничных элементов в задачах с неустойчивыми решениями.** Показано применение алгоритма численно-аналитического варианта метода граничных элементов для увеличения устойчивости решения задач, имеющих большие коэффициенты фундаментальных функций. Предлагается использовать метод дискретизации конструкции на малые части. К дискретизированной системе можно применить метод граничных элементов, наиболее эффективный и точный среди существующих методов. Приведен пример решения неустойчивой однородной задачи.

*Ключевые слова:* неустойчивое решение, фундаментальные функции, метод дискретизации, численно-аналитический вариант метода граничных элементов.

*V.F. Orobey, A.F. Dashchenko, A.M. Limarenko.* **Boundary element method in the problems with unstable solutions.** Application of algorithm of the numeral-analytical variant of boundary element the method is shown to increase the stability of solution of the tasks, having large coefficients of fundamental functions. To that end it is suggested to use the method of discretisation of construction on small parts. Further, to the discretized system it is possible to apply the method of boundary elements, as the most effective and exact among the existent methods. An example of a solution of an unstable unidimensional problem is adduced.

*Keywords:* unstable solutions, fundamental functions, method of discretisation, numeral-analytical variant of the boundary element method.

Как правило, решения задач технических наук сводятся к решению одного или нескольких одномерных или многомерных дифференциальных уравнений. Весьма часто решения этих дифференциальных уравнений содержат монотонно возрастающие или убывающие функции типа  $e^{ax}$ ,  $\ln bx$ ,  $\operatorname{sh} cx$ ,  $\operatorname{ch} dx$ , где  $a, b, c, d$  — простые или сложные константы. Эти функции принято относить к “жестким” решениям, поскольку при больших (малых) аргументах получить численный результат решения задачи бывает сложно или даже невозможно. Такие ситуации возникают не только при решении краевых задач, когда  $x=l$ ,  $l$  — граничное значение аргумента, но и при малых значениях старших коэффициентов дифференциальных уравнений, что приводит к большим аргументам фундаментальных функций. Проблема устойчивости решений дифференциальных уравнений является актуальной и широко обсуждается в литературе [1].

В данной работе предлагается повысить устойчивость решений с помощью метода дискретизации, который позволяет уменьшать значения аргументов фундаментальных функций, что затрагивает весьма широкий круг задач. В частности, в строительной механике почти все методы (начальных параметров, перемещений, конечных элементов и др.) допускают дискретизацию объекта, но наиболее эффективным и точным является численно-аналитический вариант

метода граничных элементов (ЧА МГЭ) [2]. Здесь используются точные решения соответствующих дифференциальных уравнений, отсутствуют какие-либо матричные операции при формировании разрешающих систем уравнений, не накапливаются погрешности округлений из-за весьма разреженной матрицы коэффициентов, выполняется непосредственный переход (без промежуточных вычислений) от состояния объекта в граничных точках к состоянию объекта во внутренних точках. Эти и другие преимущества ЧА МГЭ покажем на конкретном примере.

*Однородная задача собственных колебаний неразрезной балки.* Рассмотрим задачу о собственных колебаниях неразрезной балки (рис. 1).

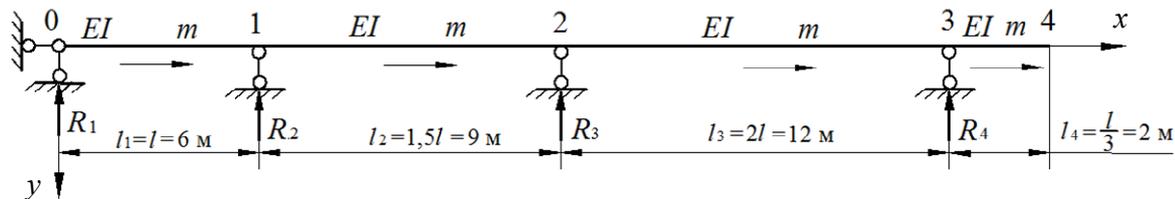


Рис. 1. Расчетная схема неразрезной балки

Балка совершает собственные колебания с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , вызванные внешним воздействием. Дифференциальное уравнение собственных колебаний прямолинейного стержня в амплитудном состоянии

$$v_{(x)}^{IV} + \frac{\omega^2 m}{EI} v(x) = 0 \quad (1)$$

имеет решение в матричной форме акад. А.Н. Крылова

$$\begin{array}{c} EIv(x) \\ EI\phi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{array} = \begin{array}{c} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \lambda^4 A_{14} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\ -\lambda^4 A_{12} & -\lambda^4 A_{13} & \lambda^4 A_{14} & A_{11} \end{array} \begin{array}{c} EIv(0) \\ EI\phi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{array}, \quad (2)$$

где  $EIv(x)$  — прогиб поперечного сечения балки в масштабе жесткости, кНм<sup>3</sup>;

$EI\phi(x)$  — угол поворота сечения в масштабе жесткости, кНм<sup>2</sup>;

$M(x)$  — изгибающий момент в сечении балки, кНм;

$Q(x)$  — поперечная сила в сечении, кН.

Ортонормированные фундаментальные функции (функции А.Н. Крылова) содержат гиперболические функции

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}; \quad A_{11} = \frac{\operatorname{ch}\lambda x + \cos \lambda x}{2}; \quad A_{12} = \frac{\operatorname{sh}\lambda x + \sin \lambda x}{2\lambda}; \quad (3)$$

$$A_{13} = \frac{\operatorname{ch}\lambda x - \cos \lambda x}{2\lambda^2}; \quad A_{14} = \frac{\operatorname{sh}\lambda x - \sin \lambda x}{2\lambda^3}$$

и приводят к неустойчивости решения при определенных больших значениях аргументов. Для формирования разрешающих уравнений разбиваем балку на четыре стержня, составляем матрицы начальных и конечных параметров [2]. Анализ этих матриц приводит к следующей матрице частотного уравнения МГЭ для данной балки:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$A_*(\omega) =$	1	$A_{12}$		$-A_{14}$													
	2	$A_{11}$		$-A_{13}$		$-1$											
	3	$-\lambda^4 A_{14}$		$A_{12}$				$-1$									
	4	$-1$	$-\lambda^4 A_{13}$		$A_{11}$												
	5					$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$									
	6					$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-1$							
	7					$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$			$-1$						
	8			$-1$		$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$									
	9									$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$					
	10									$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-1$			
	11									$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$				$-1$	
	12				$-1$					$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$					
	13													$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
	14													$-1$	$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$
	15														$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$
	16														$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$

Определяя методом перебора корни частотного уравнения

$$|A_*(\omega)| = 0, \tag{5}$$

находим первые одиннадцать частот собственных колебаний балки как

$$\omega_1 = 0,0835 \sqrt{\frac{EI}{m}} \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = 0,1795 \sqrt{\frac{EI}{m}} \text{ с}^{-1}; \quad \dots; \quad \omega_{11} = 1,8745 \sqrt{\frac{EI}{m}} \text{ с}^{-1}. \tag{6}$$

Для построения форм собственных колебаний неразрезной балки воспользуемся уравнением метода начальных параметров

$$EIv(x) = - \left[ EIv(0)A_{11}(x) + EI\phi(0)A_{12}(x) - M(0)A_{13}(x) - Q(0)A_{14}(x) - \begin{matrix} - \\ x > l_1 \\ R_2 A_{14}(x - l_1) \end{matrix} - \begin{matrix} - \\ x > l_1 + l_2 \\ R_3 A_{14}(x - l_1 - l_2) \end{matrix} - \begin{matrix} - \\ x > l_1 + l_2 + l_3 \\ R_4 A_{14}(x - l_1 - l_2 - l_3) \end{matrix} \right]; \tag{7}$$

$$R_2 = -Q_{(l_1)}^{0-1} + Q_{(0)}^{1-2}; \quad R_3 = -Q_{(l_2)}^{1-2} + Q_{(0)}^{2-3}; \quad R_4 = -Q_{(l_3)}^{2-3} + Q_{(0)}^{3-4},$$

где начальные параметры и реакции балки определяются при соответствующей частоте собственных колебаний и условии, что прогиб консольного сечения  $EIv(29 \text{ м}) = 1 \text{ кНм}^3$ . Для рассматриваемой балки первая форма колебаний (рис. 2) и последующие не имеет участков с потерей устойчивости вычислений. Но, уже с одиннадцатой формы (рис. 3) четко выявляется потеря устойчивости вычислений, и метод перемещений становится бесполезным для изучения поведения балки при собственных колебаниях.

Если воспользоваться относительными начальными параметрами (поделенными на  $EIv(l_4)^{3-4}$ ) каждого стержня (см. таблицу), вычисленными для  $\omega_{11}$ , и построить форму колебаний (рис. 4), то видно, что даже в условиях локальной дискретизации неустойчивость вычислений исчезает и становится возможным изучение поведения конструкции при одиннадцатой и последующих формах колебаний. Далее рост частоты приведет к потере устойчивости вычислений и при локальной дискретизации. В этом случае нужно применить глобальную, по всей длине балки, дискретизацию, коэффициенты фундаментальных функций опять уменьшатся и устойчивость вычислений восстановится. Аналогично можно устранять неустойчивость других

типов задач как однородных, так и неоднородных, поскольку ЧА МГЭ в наиболее полной мере среди других методов приспособлен для расчета различных дискретизированных систем.

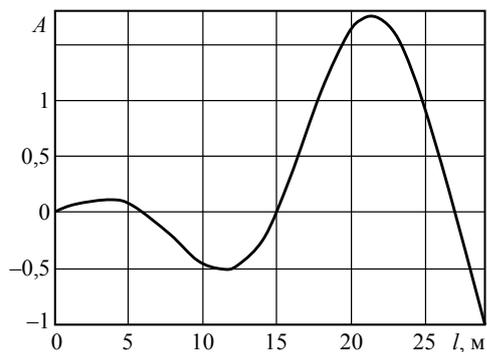


Рис. 2. Первая форма колебаний неразрезной балки

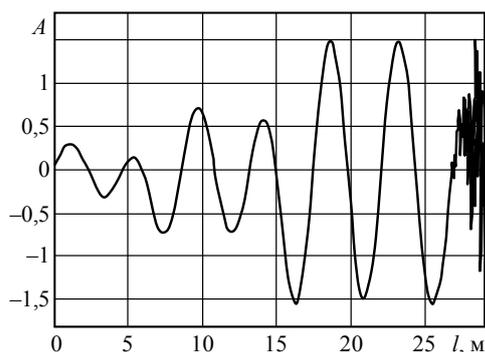


Рис. 3. Одиннадцатая форма колебаний с потерей устойчивости вычислений

Относительные граничные параметры отдельных стержней балки

Граничные параметры	№ п/п	Граничные параметры
$Q(l_1) = -0,4386 \text{ м}^{-3}$	9	$EIV(l_4) = 1,0000$
$EI\phi(0) = -0,4014 \text{ м}^{-1}$	10	$EI\phi(0) = 1,3564 \text{ м}^{-1}$
$Q(l_2) = 0,3660 \text{ м}^{-3}$	11	$M(0) = -1,5898 \text{ м}^{-2}$
$Q(0) = -0,7531 \text{ м}^{-3}$	12	$Q(0) = 4,7198 \text{ м}^{-3}$
$Q(l_3) = -5,0261 \text{ м}^{-3}$	13	$EI\phi(l_4) = 1,1257 \text{ м}^{-1}$
$EI\phi(0) = 0,5175 \text{ м}^{-1}$	14	$EI\phi(0) = -0,9942 \text{ м}^{-1}$
$M(0) = -1,0288 \text{ м}^{-2}$	15	$M(0) = -2,3098 \text{ м}^{-2}$
$Q(0) = 2,3786 \text{ м}^{-3}$	16	$Q(0) = 0,9919 \text{ м}^{-3}$

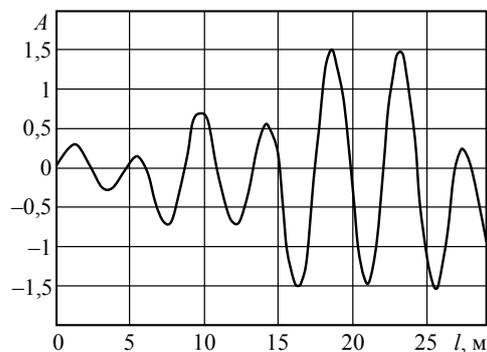


Рис. 4. Одиннадцатая форма колебаний без потери устойчивости вычислений

Исходя из представленного материала можно утверждать, что численно-аналитический вариант метода граничных элементов [2] позволяет повысить устойчивость “жестких” решений дифференциальных уравнений, если применять его в комбинации с методом дискретизации объектов.

### Литература

1. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. — М.: Наука, 1985. — 448 с.
2. Численные методы в механике. / В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец и др. — Одесса, СТАНДАРТЬ, 2005. — 563 с.

### References

1. Fedoryuk, M.V. Obyknovennyye differentsial'nye uravnenia [Ordinary differential equations]. / M.V. Fedoryuk — Moscow, 1985. — 448 p.

2. Chislennyye metody v mekhanike [Numerical methods in mechanics]. / V.A. Bazhenov, A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiets and others — Odessa, STANDART, 2005. — 563 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 26 февраля 2013 г.

УДК 620.173:624.073

**И.В. Павленко**, магистр, Одес. нац. политехн. ун-т,  
**В.О. Курган**, магистр, 3-д элеватор. оборудования,  
г. Одесса

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

*И.В. Павленко, В.О. Курган.* **Експериментальні дослідження напружено-деформованого стану ортотропних пластин.** Виконано експериментальні дослідження ортотропної пластини при двох варіантах граничних умов і двох варіантах зовнішнього навантаження. Отримано результати порівнюються з результатами розрахунків методом скінченних елементів, а при шарнірному опиранні пластини по всьому контуру — з відомим аналітичним розв'язком у подвійних тригонометричних рядах.

*Ключові слова:* ортотропна пластина, експеримент, метод скінченних елементів, напруження, прогин.

*И.В. Павленко, В.О. Курган.* **Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния ортотропных пластин.** Выполнены экспериментальные исследования ортотропной пластины при двух вариантах граничных условий и двух вариантах внешней нагрузки. Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов методом конечных элементов, а при шарнирном опирании пластины по всему контуру — с известным аналитическим решением в двойных тригонометрических рядах.

*Ключевые слова:* ортотропная пластина, эксперимент, метод конечных элементов, напряжение, прогиб.

*I.V. Pavlenko, V.O. Kurgan.* **Experimental studies of stress-strain state of orthotropic plates.** The experimental studies of an orthotropic plate are conducted under two variants of the border conditions and two variants of the external load. The obtained results are compared with the results calculated by the finite elements method, and under joint fastening of the plates on the whole sidebar — with the known analytical solution in double trigonometric rows.

*Keywords:* orthotropic plate, experiment, the finite elements method, stress, bending.

Развитие различных отраслей машиностроения, авиационно-космической техники, судостроения, строительства и др. ставит задачи расчета экономичных тонкостенных систем и, в частности, пластин.

При этом на современном этапе уровень развития производства характеризуется широким внедрением новых технологий производства высокопрочных материалов, обладающих ортотропными (ортогонально анизотропными) свойствами.

К таким материалам относятся стеклопластики, композиционные материалы, армированные последовательно чередующимися слоями волокон в двух взаимно перпендикулярных направлениях; клееные древесные плиты; листовые прокатные металлы, у которых при переходе в пластическую стадию работы, начинает проявляться анизотропия; и др.