

УДК 539.421.013

С.С. Гутыря, д-р техн. наук, проф.,  
Ю.М. Хомяк, канд. техн. наук, доц.,  
Й. Ариза Де Мигель, магистр,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ ТРУБЧАТЫХ ОСЕЙ ПРИ РАЗВИТИИ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

*С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель. Характеристики міцності трубчастих осей при розвитку втомної тріщини.* Запропоновано методика розрахунку номінальних характеристик міцності трубчастих осей, яка вперше враховує зміни цих характеристик при розвитку втомної тріщини. Отримано уніфіковані вирази, що зв'язують міцність осі з товщиною стінки і розмірами тріщини.

*Ключові слова:* трубчаста вісь, геометричні характеристики, кінетика тріщини.

*С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель. Характеристики прочности трубчатых осей при развитии усталостной трещины.* Предложена методика расчета номинальных характеристик прочности трубчатых осей, впервые учитывающая изменение этих характеристик по мере развития усталостной трещины. Получены унифицированные уравнения, связывающие прочность оси с толщиной стенки и размерами трещины.

*Ключевые слова:* трубчатая ось, геометрические характеристики, кинетика трещины.

*S.S. Gutyria, Yu.M. Khomiak, J. Arisa De Miguel. The strength characteristics of tubular axles in the development of fatigue cracks.* A method to calculate nominal strength characteristics of tubular axles, which for the first time takes into account the change of these characteristics with the development of fatigue cracks, has been proposed. The unified equations, which link the strength of the axle to the wall thickness and the sizes of crack, have been obtained.

*Keywords:* tubular axle, geometrical characteristics, kinetics of crack.

Оси и валы трубчатой конструкции широко применяются в современном машиностроении благодаря рациональному распределению материала, что обеспечивает их высокую нагрузочную способность. Наличие внутренней полости также обеспечивает возможность подачи смазки, охлаждающих или нагревающих сред, размещения вспомогательных устройств, приборов для контроля и др. Обоснованные рекомендации по выбору геометрических параметров трубчатых осей в справочной литературе отсутствуют либо недостаточно информативны, что ограничивает возможности их оптимального проектирования.

В этой связи актуальной научной задачей представляется разработка методики сравнительного анализа трубчатых конструкций осей по различным критериям при наличии усталостных трещин. Неоспоримые преимущества при этом имеют аналитические методы исследований, отличающиеся высокой наглядностью, математической строгостью, простотой контроля результатов и адаптивностью к инженерным расчетам [1, 2].

В качестве расчетной модели рассмотрена трубчатая ось с характерными диаметрами  $D_h$  и  $d$ , ослабленная сегментной трещиной  $AB$ , длина которой характеризуется полярным углом  $2\varphi$ . В обозначениях характеристик прочности установлены следующие индексы:  $h$  — для трубчатых осей,  $s$  — для сплошных осей,  $g$  — при наличии усталостной трещины (рис. 1).

Площадь сечения трубчатой оси, ослабленной трещиной, представлена в виде

$$A_{hg} = 0,125D_h^2\Phi_1(k_h, \varphi), \quad (1)$$

где  $k_h = d/D_h$  — коэффициент пустотелости;

$$\Phi_1(k_h, \varphi) = 2\pi(1 - k_h^2) - 2\varphi + \sin 2\varphi.$$

Положение главной центральной оси  $Z$  определяется ординатой центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{S_{Z'_{hg}}}{A_{hg}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{\Phi_1(k_h, \varphi)}, \quad (2)$$

где  $S_{Z'_{hg}}$  — статический момент сечения трубчатой оси, ослабленной трещиной, относительно оси  $Z'$ .

Моменты инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей  $CY$  и  $CZ$  имеют вид

$$I_{yhg} = \frac{D_h^4}{256} \left[ \Phi_2(k_h, \varphi) + \frac{32}{3} \cdot \sin^3 \varphi \cos \varphi \right], \quad (3)$$

$$I_{zhg} = \frac{D_h^4}{256} \left[ \Phi_2(k_h, \varphi) - \frac{128}{9} \cdot \frac{\sin^6 \varphi}{\Phi_1(k_h, \varphi)} \right], \quad (4)$$

где  $\Phi_2(k_h, \varphi) = 4\pi(1 - k_h^4) - 4\varphi + \sin 4\varphi$ .

Из уравнений (2) и (4) получено выражение для момента сопротивления сечения трубчатой оси относительно оси  $Z$

$$W_{Zhg} = \frac{I_{Zhg}}{y_{g \max}} = \frac{D_h^3}{384} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_1(k_h, \varphi)}, \quad (5)$$

где  $y_{g \max} = 0,5D_h \cos \varphi + |y_c|$  — ордината линии  $AB$  фронта трещины;

$$\Psi_1(k_h, \varphi) = 3\Phi_2(k_h, \varphi) \cos \varphi + 4\sin^3 \varphi;$$

$$\Psi_2(k_h, \varphi) = 9\Phi_1(k_h, \varphi)\Phi_2(k_h, \varphi) - 128\sin^6 \varphi.$$

Формулы (1)...(5) применимы для осей трубчатых (индекс  $h$ ) и сплошных (индекс  $s$ ) при наличии трещины (индекс  $g$ ) или ее отсутствии (при  $\varphi=0$  индекс  $g$  исключают).

Влияние размера усталостной трещины на уровень максимальных изгибных напряжений при  $D_h=D_s$  отражается соответствующей функцией относительного момента сопротивления

$$\bar{W}_{Zhg}(k_h, \varphi) = \frac{W_{Zhg}}{W_{Zh}} = \frac{1}{12\pi \cdot (1 - k_h^4)} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_1(k_h, \varphi)}. \quad (6)$$

Установлено, что в начальный период развития трещины (угол  $\varphi < 0,4$  рад), несмотря на уменьшение площади сечения  $A_{hg}$ , относительный момент сопротивления (6) возрастает на 1...2% для сплошной и полой осей без трещин (рис. 2). Отмеченная особенность замедляет развитие (вплоть до остановки) малых усталостных трещин при плоском изгибе осей. Как известно, срезка сегментов увеличивает момент сопротивления круга, т.к. при этом осевой момент инерции сечения уменьшается в меньшей степени, чем расстояние до крайнего волокна  $z_{\max}$ . Тем не менее, в известных методиках расчетов осей на выносливость данный аналитически установленный эффект не учитывается [3, 4].

Расчеты показали, что максимальное значение  $\bar{W}_{Zsg} = 1,02$  для сплошной оси соответствует значению угла  $\varphi = 0,37$  рад (см. рисунок 2). В случае, когда одновременно развиваются две трещины на противоположных концах диаметра, т.е. симметрично оси  $Z'$ , максимальная величина  $\bar{W}_{Zsg} = 1,007$  соответствует значениям  $k_h = 0$  и  $\varphi = 0,12$  рад.

При расчетах валов и осей на выносливость необходимо учитывать, что предел выносливости материала при растяжении  $(\sigma_{-1})_p$  ниже, чем при изгибе  $(\sigma_{-1})_и$ . Эмпирически установлено, что для конструкционных сталей отношение  $(\sigma_{-1})_p / (\sigma_{-1})_и = 0,75 \dots 0,85$  [3]. Чем меньше толщина стенки трубчатой оси, тем ближе ее напряженное состояние к однородному растяже-

нию. Соответственно при изменении коэффициента  $k_h$  в диапазоне значений  $(1,0...0]$  отношение  $(\sigma_{-1})_p / (\sigma_{-1})_n \in (0,75...1,0]$ .

Предложено данную особенность сопротивления усталости трубчатых осей учитывать в расчетах с помощью коэффициента однородности их напряженного состояния

$$c_o = 0,25(3 + \sqrt{1 - k_h}) . \quad (7)$$

Предел выносливости трубчатых осей при изгибе определяется выражением

$$(\sigma_{-1})_h = c_o (\sigma_{-1})_n . \quad (8)$$

Из условия равной прочности осей трубчатой и сплошной конструкции следует равенство  $c_o W_{Zh} = W_{Zs}$  и отношение диаметров

$$\bar{D}_{hs} = D_h / D_s = [c_o \cdot (1 - k_h^4)]^{-1/3} . \quad (9)$$

Наибольшее влияние неоднородности напряженного состояния оси на параметр  $\bar{D}_{hs}$  (9) проявляется в диапазоне значений  $k_h=0,6...0,8$ . Здесь различие между значениями функции  $\bar{D}_{hs}$ , вычисленными при  $c_o=1$  и  $c_o$  по формуле (7), достигает 4...6 % (рис. 3).

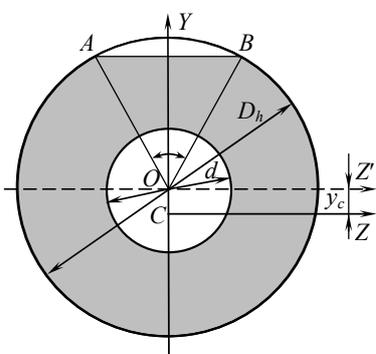


Рис. 1. Поперечное сечение оси по плоскости трещины

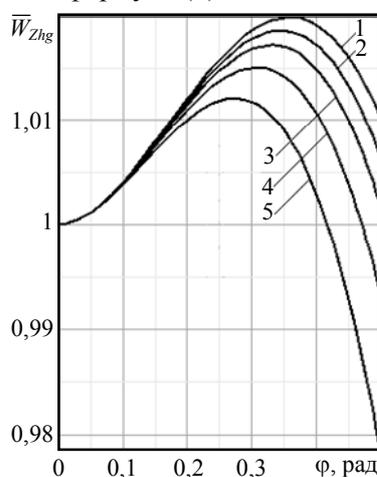


Рис. 2. Графики функции  $\bar{W}_{zhg}(h_g, \varphi)$  при  $k_h=0$  (1), 0,3 (2), 0,4 (3), 0,5 (4), 0,6 (5)

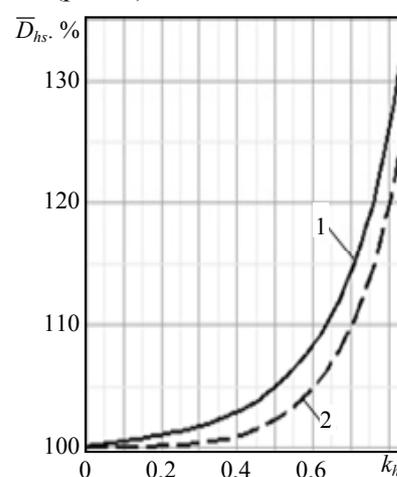


Рис. 3. Графики функции  $\bar{D}_{hs}(k_h)$ : 1 —  $c_o$  соответствует (7), 2 —  $c_o=1$

Изменения относительных характеристик прочности оси (площадь поперечного сечения, момент сопротивления и осевой момент инерции) в процессе развития усталостной трещины определяются функциями

$$\bar{A}_{hs} = \frac{A_{hg}}{A_{sg}} = [c_o (1 - k_h^4)]^{-2/3} \cdot \frac{\Phi_1(k_h, \varphi)}{\Phi_1(0, \varphi)} ; \quad (10)$$

$$\bar{W}_{Zhs} = \frac{W_{Zhg}}{W_{Zsg}} = \frac{1}{c_o (1 - k_h^4)} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_2(0, \varphi)} \cdot \frac{\Psi_1(0, \varphi)}{\Psi_1(k_h, \varphi)} ; \quad (11)$$

$$\bar{I}_{Zhs} = [c_o \cdot (1 - k_h^4)]^{-4/3} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_2(0, \varphi)} \cdot \frac{\Phi_1(0, \varphi)}{\Phi_1(k_h, \varphi)} . \quad (12)$$

Функции (10)...(12) по мере развития трещины убывают, причем с увеличением коэффициента  $k_h$  интенсивность убывания возрастает (рис. 4). Например, для значения  $k_h=0,6$  при

$\varphi=0,6$  рад момент сопро­тивле­ния  $\bar{W}_{Zhs}(k_h, \varphi)$  умень­ша­ет­ся на 6,4 %, а для  $k_h=0,8$  на 21,5 % (рис. 4, б). Момент инерции  $\bar{I}_{Zhs}(k_h, \varphi)$  убывает менее интен­сивно (рис. 4, в).

В случае  $D_h=D_s$  изменения прочностных характеристик трубчатой оси по мере развития трещины определяются функциями

$$\bar{A}_{hg} = \frac{A_h - A_{hg}}{A_h} = 1 - \frac{\Phi_1(k_h, \varphi)}{\Phi_1(k_h, 0)}, \quad (13)$$

$$\bar{W}_{Zhg} = \frac{W_{Zh} - W_{Zhg}}{W_{Zh}} = 1 - \frac{\Psi_1(k_h, 0)}{\Psi_1(k_h, \varphi)} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_2(k_h, 0)}. \quad (14)$$

$$\bar{I}_{Zhg} = \frac{I_{Zh} - I_{Zhg}}{I_{Zh}} = 1 - \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{9\Phi_1(k_h, \varphi)\Phi_2(k_h, 0)}. \quad (15)$$

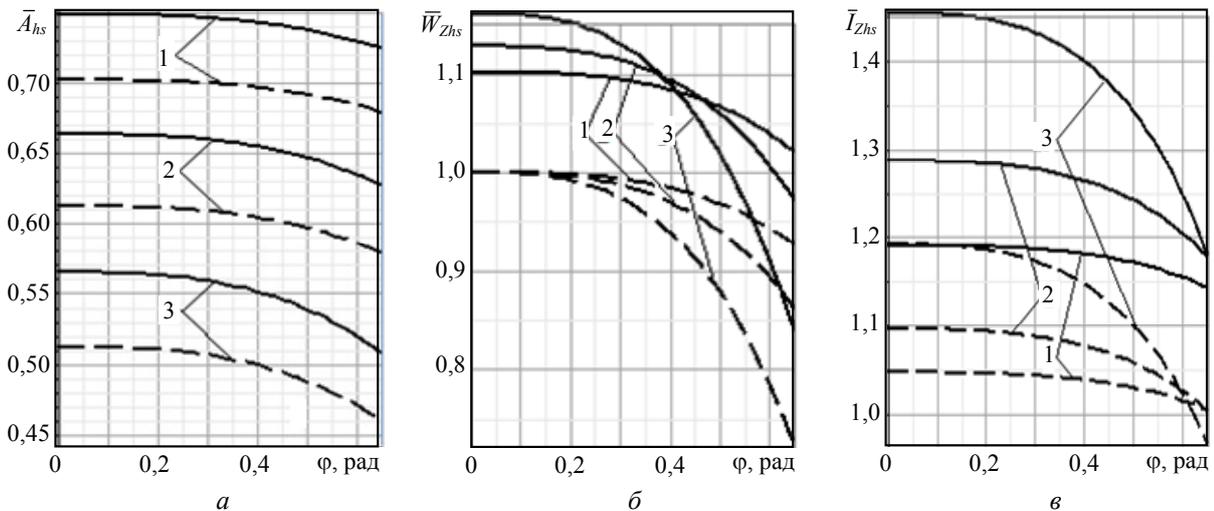


Рис. 4. Графики функций  $\bar{A}_{hg}(h_g, \varphi)$  (а),  $\bar{W}_{Zhg}(h_g, \varphi)$  (б) и  $\bar{I}_{Zhg}(h_g, \varphi)$  (в)

(кривые соответствуют:  $k_h=0,6$  (1); 0,7 (2); 0,8 (3); сплошные кривые получены при значениях  $c_0$  по формуле (7), штриховые — при  $c_0=1$ )

Значения относительных характеристик  $\bar{W}_{Zhg}(k_h, 0)$  и  $\bar{I}_{Zhg}(k_h, 0)$  при отсутствии усталостных трещин указывают, что замена сплошной оси на трубчатую равного наружного диаметра для значений коэффициента  $k_h < 0,5$  приводит к незначительному, до 5 %, понижению прочности и жесткости — до 10 %. При возникновении и развитии трещины до величины угла  $\varphi < 0,45$  рад уменьшение площади сечения практически не зависит от величины коэффициента  $k_h$  (рис. 5, а). Интенсивность уменьшения площади сечения по мере дальнейшего роста трещины резко возрастает при  $k_h \geq 0,75$ .

Осевой момент инерции поперечного сечения оси, ослабленного трещиной, при условии равенства диаметров  $D_h=D_s$  уменьшается более интенсивно, например, для  $k_h=0,8$  — на 44 % при  $\varphi=0,6$  рад (рис. 5, б).

Степень рациональности использования материала в трубчатых осях и валах определяется их сравнением со сплошными конструкциями той же массы, что эквивалентно одинаковой площади сечений. По данным справочной литературы для трубчатой оси с коэффициентом  $k_h=0,8$  диаметр  $D_h$  больше, чем для сплошного сечения  $D_s$  в 1,67 раза, а момент сопротивления — в 2,73 раза. При этом влияние усталостных трещин на характеристики прочности не учитывается.

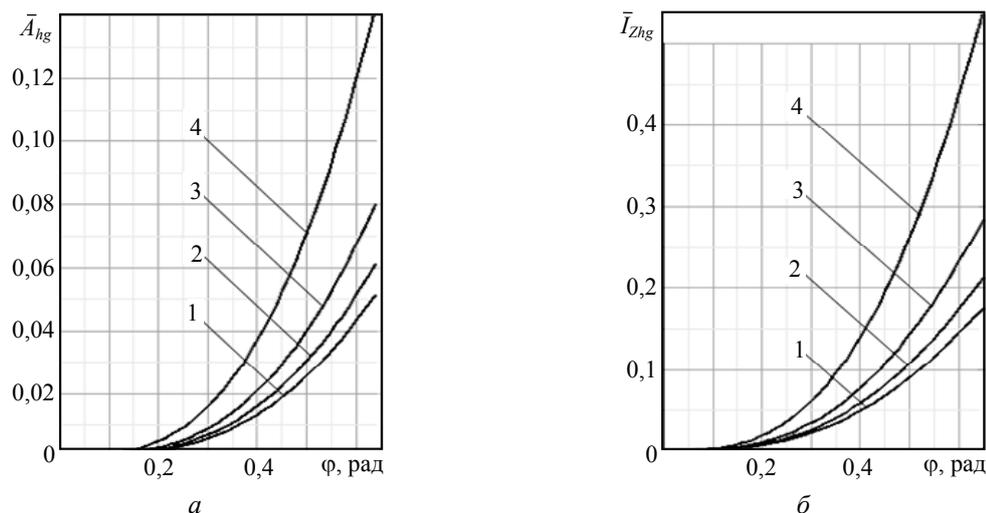


Рис. 5. Графики функций  $\bar{A}_{hg}(h_g, \varphi)$  (а) и  $\bar{I}_{zhg}(h_g, \varphi)$  (б):  
кривые соответствуют  $k_h=0$  (1); 0,4 (2); 0,6 (3); 0,8 (4)

Для сопоставления осей трубчатой и сплошной конструкции одинаковой массы предложен критерий

$$\bar{D} = \frac{D_h}{D_s} = \frac{1}{\sqrt{1-k_h^2}}. \quad (16)$$

Изменение площади сечения и нагрузочной способности осей при трещинах одинакового размера определяются отношениями

$$\bar{A}_{hsg} = \frac{1}{1-k_h^2} \cdot \frac{\Phi_1(k_h, \varphi)}{\Phi_1(0, \varphi)}, \quad \bar{W}_{zhsg} = \frac{W_{zhg}}{W_{zsg}} = \frac{1}{(1-k_h^2)^{3/2}} \cdot \frac{\Psi_2(k_h, \varphi)}{\Psi_2(0, \varphi)} \cdot \frac{\Psi_1(0, \varphi)}{\Psi_1(k_h, \varphi)}. \quad (17)$$

Вычисления свидетельствуют о резком повышении значений функции  $\bar{W}_{zhsg}(k_h, 0)$  с увеличением  $k_h$ , например, в интервале  $k_h=0,6 \dots 0,8$  эта функция возрастает в 1,6 раза. По мере развития усталостной трещины площадь сечения убывает значительно меньше, чем относительный момент сопротивления. Например, при  $\varphi=0,7$  рад уменьшение  $\bar{W}_{zhsg}(k_h, \varphi)$  для  $k_h=0,6$  и 0,8 составляет соответственно 2,4 и 17 %. Следовательно, при возникновении трещины выносливость трубчатых конструкций с  $k_h > 0,75$  резко снижается. Результаты расчетов подтверждаются фрактографией усталостного излома тихоходного вала ( $k_h=0,6$ ) косозубого редуктора гидравлической турбины мощностью 1400 кВт. Установлено, что пересечение линией фронта  $AB$  внутренней поверхности вала не приводит к его немедленному разрушению [5].

При значениях  $k_h > 0,75$  критическим положением для линии  $AB$  можно принять касание поверхности отверстия, определяемое углом  $\varphi_{кр} = \arccos k_h$  (см. рисунок 1). В результате условие живучести трубчатых осей по критерию усталостного разрушения в виде  $k_h < 0,75 \dots 0,8$  можно считать теоретически и практически обоснованным.

Влияние усталостной трещины на изгибную жесткость оси определяется осевыми моментами инерции. Анализ функций (3) и (4) удобно выполнить для их относительной разности  $\bar{I}_{YZ} = (I_{Yhg} - I_{Zhg}) / I_{Yhg}$ .

Установлено значительное изменение разности моментов инерции. Например, при  $\varphi=0,7$  для сплошной оси различие достигает 19 %, для трубчатой с  $k_h=0,8$  — 38 %.

В результате выполненных исследований предложена методика расчета номинальных характеристик прочности трубчатых осей, впервые учитывающая изменение этих характеристик

по мере развития усталостной трещины. Получены аналитические выражения, связывающие характеристики прочности с толщиной стенки оси и размерами трещины. Расчеты показали, что при возникновении трещины выносливость трубчатых конструкций с  $k_h > 0,75$  резко снижается.

Для уточнения комплекса предложенных аналитических характеристик прочности необходимо исследования влияния концентраторов напряжений и эксплуатационных факторов на кинетику усталостного разрушения трубчатых осей.

### Литература

1. Araque de los Rios, O. Estudio sobre la resistencia y rigidez de ejes huecos. / O. Araque de los Rios, J.J. Cabello Eras // *Scientia et Technica*. — 2006. — Año 12, № 30. — P. 219 — 224.
2. Гутыря, С.С. Номинальные напряжения в трубчатых осях при развитии поверхностных усталостных трещин / С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Ариза Де Мигель // *Вісн. СевНТУ: зб. наук. пр.: Механіка, енергетика, екологія*. — Севастополь: СевНТУ, 2013. — Вип. 137. — С. 173 — 177.
3. Avilés, R. Análisis de fatiga en máquinas / R. Avilés. — Madrid: Paraninfo, 2005. — P. 464.
4. Boardman, B. Fatigue Resistance of Steels / B. Boardman // *ASM Handbook, Vol. 1: Properties and Selection: Irons, Steels and High-Performance Alloys*. — ASM Intern., 1990. — P. 673 — 688.
5. Bhaumik, S.K. Fatigue failure of a hollow power transmission shaft / S.K. Bhaumik, R. Rangaraju, M.A. Parameswara, M.A. Venkataswamy, T.A. Bhaskaran, R.V. Krishnan // *Eng. failure analysis*, 2002. — № 9. — P. 457 — 467.

### References

1. Araque de los Rios, O. Estudio sobre la resistencia y rigidez de ejes huecos [Study of the strength and stiffness of hollow axles] / O. Araque de los Rios, J.J. Cabello Eras // *Scientia et Technica*, 2006, Año 12, # 30. — pp. 219 — 224.
2. Gutyrya, S.S. Nominal'nye napryazheniya v trubchatykh osyakh pri razvitii poverkhnostnykh ustalostnykh treshchin [Rated tensions in hollow axes when superficial fatigue cracks emerge] / S.S. Gutyrya, Yu.M. Khomiak, J. Ariza De Miguel // *Visn. SevNTU: zb. nauk. pr.: Mekhanika, enerhetyka, ekolohiia*. [Herald of SevNTU: Coll. sci. papers. Mechanics, power engineering, ecology]. — Sevastopol', 2013. — Issue 137. — pp. 173 — 177.
3. Avilés, R. Análisis de fatiga en máquinas [Fatigue analysis on machines] / R. Avilés. — Madrid: Paraninfo, 2005. — pp. 464.
4. Boardman, B. Fatigue resistance of steels / B. Boardman. // *ASM Handbook, Vol. 1: Properties and Selection: Irons, Steels and High-Performance Alloys*. ASM Internat., — 1990. — pp. 673 — 688.
5. Bhaumik, S.K. Fatigue failure of a hollow power transmission shaft / S.K. Bhaumik, R. Rangaraju, M.A. Parameswara, M.A. Venkataswamy, T.A. Bhaskaran, R.V. Krishnan // *Engineering failure analysis*, 2002. — # 9. — pp. 457 — 467.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Кравченко В.П.

Поступила в редакцию 19 ноября 2013 г.