

# МАШИНОБУДУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЯ МЕТАЛІВ МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

MACHINE BUILDING  
PROCESS METALLURGY  
MATERIALS SCIENCE

УДК 539.379:621.743

Н.Г. Сурьянинов, д-р техн. наук, проф.,  
Т.Г. Низдропа, бакалавр,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ КОНТУРА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Введение.** Расчетная схема тонкостенного стержня соответствует целому ряду реальных конструкций и сооружений. Это, в первую очередь, практически все прокатные профили из разных материалов, сортамент которых огромен и постоянно расширяется. Это также элементы рам машин, крановые конструкции корпуса судов и летательных аппаратов, пролетные строения мостов, плиты перекрытий, ядра жесткости зданий и др.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Основы теории расчета тонкостенных стержней разработаны в середине прошлого века. Необходимость уйти в этих теориях от сложных уравнений общей теории оболочек привела к введению некоторых упрощающих гипотез. Одной из основных таких гипотез является предположение об отсутствии деформации контура поперечного сечения тонкостенного стержня. Однако более поздние исследования показали, что отрицание деформации контура во многих случаях ведет к значительным погрешностям в расчетах. На это указал и один из основоположников теорий расчета тонкостенных стержней — проф. В.З. Власов [1, 2], который предложил подход к расчету замкнутого коробчатого профиля с двумя осями симметрии, учитывающий деформацию контура сечения [2].

**Целью работы** является разработка общего подхода учета деформации и депланации контура поперечного сечения тонкостенного стержня, применимого для стержней замкнутого, открытого и комбинированного профилей.

**Изложение основного материала исследования.** В соответствии с концепцией вариационного метода Канторовича-Власова [3], позволяющего от двумерной задачи перейти к одномерной, перемещения некоторой точки  $M(z, s)$ , выбранной на срединной поверхности тонкостенного стержня (см. рисунок), можно представить в виде

---

DOI: 10.15276/oru.1.43.2014.03

© Н.Г. Сурьянинов, Т.Г. Низдропа, 2014

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m u_i(z) \varphi_i(s); \quad (1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^h v_k(z) \psi_k(s), \quad (2)$$

где  $z$  — расстояние от начальной плоскости  $z = 0$ ;

$s$  — расстояние по контуру сечения от начальной образующей  $s = 0$ ;

$m$  и  $n$  — числа степеней свободы элементарной поперечной полоски стержня в отношении продольных и поперечных перемещений, соответственно.

Непрерывные линейно независимые функции  $\varphi_i(s)$  и  $\psi_k(s)$  в (1) и (2) выбираются заранее и представляют собой обобщенные координаты деформации элементарной поперечной плоскости стержня из плоскости сечения и в плоскости сечения, соответственно.

Соответствующие этим обобщенным координатам функции  $u_i$  и  $v_k$  являются искомыми и представляют собой обобщенные продольные и поперечные перемещения. Причем,  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$ , и  $u_3(z)$  — это функции изменения по длине стержня продольных перемещений при растяжении (сжатии) и изгибе в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а остальные ( $m-3$ ) функции  $u_m(z)$  определяют деформацию поперечных сечений;  $v_1(z)$ ,  $v_2(z)$ ,  $v_3(z)$  определяют перемещения полоски в целом как плоской системы без изменения ее формы. И, наконец, остальные ( $n-3$ ) функции  $v_n(z)$  соответствуют деформации контура поперечного сечения.

Соответствующая система линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u_m(z)$  и  $v_k(z)$  имеет вид [2]

$$\begin{cases} \gamma \sum_{i=1}^m a_{ji} u_i'' - \sum_{i=1}^m b_{ji} u_i' - \sum_{k=1}^n c_{jk} v_k' + \frac{1}{G} p_j = 0; \\ \sum_{i=1}^m c_{hi} u_i' + \sum_{k=1}^n r_{hk} v_k'' - \gamma \sum_{k=1}^n s_{hk} v_k + \frac{1}{G} q_h = 0; \\ (j = 1, 2, \dots, m; h = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (3)$$

где  $\gamma = \frac{E}{G}$ ;

$$a_{ji} = \int_A \varphi_j(s) \varphi_i(s) dA;$$

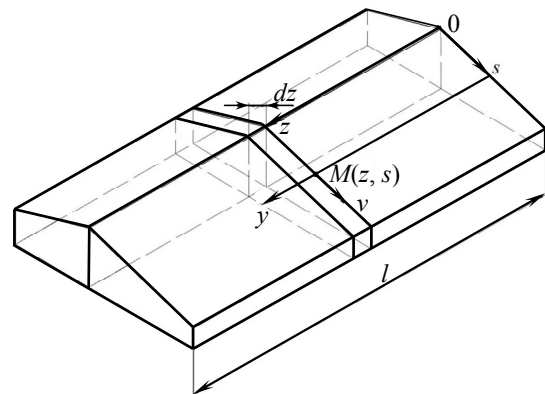
$$b_{ji} = \int_A \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) dA;$$

$$c_{jk} = \int_A \varphi_j'(s) \psi_k(s) dA;$$

$$c_{hi} = \int_A \psi_h(s) \varphi_i'(s) dA;$$

$$r_{hk} = \int_A \psi_h(s) \psi_k(s) dA;$$

$$s_{hk} = \frac{1}{E} \int_L \frac{M_h(s) M_k(s)}{EI} dS.$$



Стержень произвольного сечения

Уравнения (3) значительно упрощаются, если обобщенные координаты  $\varphi_i(s)$  и  $\psi_k(s)$  являются взаимноортогональными, т.е. подчиняются условиям

$$\begin{cases} a_{ji} = \int_A \varphi_j(s) \varphi_i(s) = 0 & \text{при } j \neq i; \\ r_{hk} = \int_A \psi_k(s) \psi_h(s) = 0 & \text{при } h \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

При этом уравнение (3) переписывается в виде

$$\begin{cases} \gamma a_{jj} u_j'' - \sum_{i=1}^m b_{ji} u_i - \sum_{k=1}^n c_{jk} v_k' + \frac{1}{G} p_j = 0; \\ \sum_{i=1}^m c_{hi} u_i' + r_{hh} v_h'' - \gamma \sum_{k=1}^n s_{hk} v_k + \frac{1}{G} q_h = 0; \\ (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (5)$$

Свободные члены в системах (3) и (5) являются известными функциями от  $z$  и при заданных поверхностных силах  $p(z, s)$  и  $q(z, s)$  вычисляются по формулам

$$\begin{cases} p_j = \int_L p \varphi_j(s) dS; \\ q_h = \int_L q \psi_h(s) dS. \end{cases} \quad (6)$$

Суть предполагаемого подхода к построению систем взаимноортогональных функций  $\varphi_m(s)$  и  $\psi_n(s)$  состоит в следующем. Следуя [2], первые четыре функции  $\varphi_m(s)$  для любого стержня (открытого, замкнутого или комбинированного) имеют вид

$$\varphi_1(s) = 1; \quad \varphi_2(s) = x(s); \quad \varphi_3(s) = y(s); \quad \varphi_4(s) = \omega(s), \quad (7)$$

где  $x(s)$ ,  $y(s)$ , — координаты произвольной точки контура относительно главных центральных осей сечения  $x$  и  $y$ ;

$\omega$  — секториальная площадь.

Функции (7) являются взаимноортогональными.

Если поперечное сечение стержня имеет число степеней свободы из плоскости  $m > 4$ , то ординаты эпюр функций (7) можно представить в виде

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1^T(s) = \|1 \quad 1 \quad 1 \dots 1\|; \\ \bar{\varphi}_2^T(s) = \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \dots x_m\|; \\ \bar{\varphi}_3^T(s) = \|y_1 \quad y_2 \quad y_3 \dots y_m\|; \\ \bar{\varphi}_4^T(s) = \|\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \dots \omega_m\|, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \dots \omega_m$  — ординаты эпюры секториальных площадей, построенной из центра изгиба поперечного сечения;

индекс “ $T$ ” здесь и далее означает транспонирование матрицы.

Построим функцию  $\varphi_5(s)$ . Ординаты ее эпюры

$$\bar{\varphi}_5^T(s) = \|\varphi_{51}, \varphi_{52}, \dots, \varphi_{5m}\|. \quad (9)$$

Если выбрать эту функцию ортогональной к четырем предыдущим, то можно записать четыре условия ортогональности:

$$\bar{\varphi}_i(s) \times \bar{\varphi}_5(s) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

Каждое из соотношений (10) представляет собой результат интегрирования соответствующих эпюр на всем поперечном сечении стержня.

Очевидно, что (10) содержат  $m$  неизвестных, и система имеет бесконечное множество решений, но, поскольку представляет любое из них, изначально положим последние  $m - 4$  эле-

мента в (9) равными единице. Тогда из (10) можно однозначно определить оставшиеся четыре ординаты эпюры  $\varphi_5(s)$ .

Аналогичным образом можно построить функцию  $\varphi_6(s)$  и все последующие до  $\varphi_m(s)$  включительно. Построение эпюр производных функций  $\varphi_m(s)$ , которые используются при определении коэффициентов систем (3) и (5), является тривиальным.

Перейдем к построению второй системы взаимноортогональных функций —  $\psi_n(s)$ . Вновь, следуя [2], функции  $\psi_2(s)$  и  $\psi_3(s)$  для любого сечения

$$\begin{aligned}\psi_2(s) &= x'(s); \\ \psi_3(s) &= y'(s).\end{aligned}\tag{11}$$

При таком выборе эпюры функций имеют нулевые ординаты на участках, перпендикулярных осям  $OX$  и  $OY$ , соответственно, а функция  $\psi_1(s)$

$$\psi_1(s) = h_D(s),$$

где  $h_D(s)$  — перпендикуляр из произвольной пока точки  $D$  на любую пластинку стержня.

Для определения точного положения точки  $D$  имеются два условия ортогональности функции  $\psi_1(s)$  с функциями  $\psi_2(s)$  и  $\psi_3(s)$ , причем, первое условие позволяет определить  $x$ -координату точки  $D$ , а второе —  $y$ -координату.

Для построения функции  $\psi_4(s)$  имеются уже три условия ортогональности

$$\bar{\psi}_i(s) \times \bar{\psi}_4(s) = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

и для определения ординат  $\psi_4(s)$  и всех последующих функций  $\psi_n(s)$  можно использовать тот же подход, который описан при построении системы ортогональных функций  $\varphi_m(s)$ , но здесь на первом шаге единичными принимаются все ординаты кроме трех.

Обобщенной контурной деформации соответствуют поперечные изгибающие моменты. Эпюры этих изгибающих моментов в каждом конкретном случае легко строятся методами строительной механики, причем, более удобным обычно оказывается метод перемещений [4].

**Результаты.** Таким образом, изложенная методика позволяет построить две системы взаимно ортогональных функций  $\varphi_m(s)$  и  $\psi_n(s)$ , а затем определить коэффициенты системы дифференциальных уравнений (3). Решение системы (3) можно получить в любом математическом пакете, например, в Skilab, предварительно задав соответствующие граничные условия. Полученные в результате обобщенные продольные и поперечные перемещения  $u_m(z)$  и  $v_n(z)$  позволяют определить все остальные параметры напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня.

**Выводы.** В работе представлен общий подход, основанный на построении двух систем взаимно ортогональных функций, являющихся аппроксимирующими функциями при решении задачи методом Канторовича-Власова, который позволяет определить напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня с учетом деформации и депланации контура сечения. Полученные результаты могут быть использованы для стержней замкнутого, открытого и комбинированного профилей.

## Литература

1. Джанелидзе, Г.Ю. Статика упругих тонкостенных стержней: Современные проблемы механики / Г.Ю. Джанелидзе, Я.Г. Пановко. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 208 с.
2. Бычков, Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д.В. Бычков. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 472 с.
3. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — В 2 т. — Одесса: ВМВ, 2010. — Т. 1. — 416 с. — Т. 2. — 512 с.
4. Бадалаха, И.К. Физические зависимости упругих массивов: монография / И.К. Бадалаха. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. нац. ун-та ж.-д. трансп. им. акад. В. Лазаряна, 2012. — 198 с.

## References

1. Dzhaneldidze, G.Yu. Statika uprugikh tonkostennykh sterzhney: Sovremennyye problemy mekhaniki [Statics of thin-walled rods: Modern problems of mechanics] / G.Yu. Dzhaneldidze, Ya.G. Panovko. — Moscow, 2012. — 208 p.
2. Bychkov, D.V. Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh tonkostennykh konstruksiy [Structural mechanics of rod thin-walled structures] / D.V. Bychkov. — Moscow, 2012. — 472 p.
3. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov [Numerical-analytical boundary elements method] / Dashchenko A.F., Kolomiyyets L.V., Orobey V.F., Surianinov N. G. — In 2 volumes. — Odessa, 2010. — Vol.1 — 416 p. — Vol.2 — 512 p.
4. Badalakhа, I.K. Fizicheskie zavisimosti uprugikh massivov: monografiya [Physical dependences of elastic arrays: monograph] / I.K. Badalakhа. — Dnepropetrovsk, 2012. — 198 p.

## АНОТАЦІЯ / АННОТАЦИЯ / ABSTRACT

*М.Г. Сур'янінов, Т.Г. Ніздроп.* **Врахування деформації контуру поперечного перерізу в розрахунках тонкостінних стрижнів.** Однією з основних гіпотез в теорії розрахунку тонкостінних стрижнів є припущення про відсутність деформації контуру поперечного перерізу. Однак дослідження показали, що заперечення деформації контуру в багатьох випадках веде до значних похибок в розрахунках. Відомо також, що значний вплив на напружено-деформований стан тонкостінних стрижнів надає депланація контуру перерізу. Викладено загальний підхід до врахування цих явищ, який ґрунтується на побудові двох систем взаємно ортогональних функцій, що є апроксимуючими функціями при розв'язанні задачі методом Канторовича-Власова, а це дозволяє визначити напружено-деформований стан тонкостінного стрижня з урахуванням деформації і депланації контуру перерізу. Отримані в результаті дослідження узагальнені поздовжні і поперечні переміщення дають можливість знайти зусилля, напруження і деформації в стрижнях будь-якого профілю.

*Ключові слова:* тонкостінний стрижень, деформація контуру, депланація, взаємно ортогональні функції.

*Н.Г. Сурьянинов, Т.Г. Низдроп.* **Учет деформации контура поперечного сечения в расчетах тонкостенных стержней.** Одной из основных гипотез в теории расчета тонкостенных стержней является предположение об отсутствии деформации контура поперечного сечения. Однако исследования показали, что отрицание деформации контура во многих случаях ведет к значительным погрешностям в расчетах. Известно также, что значительное влияние на напряженно-деформированное состояние тонкостенных стержней оказывает депланация контура сечения. Изложен общий подход к учету этих явлений, который основывается на построении двух систем взаимно ортогональных функций, являющихся аппроксимирующими функциями при решении задачи методом Канторовича-Власова, что позволяет определить напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня с учетом деформации и депланации контура сечения. Полученные в результате обобщенные продольные и поперечные перемещения дают возможность найти усилия, напряжения и деформации в стержнях любого профиля.

*Ключевые слова:* тонкостенный стержень, деформация контура, депланация, взаимно ортогональные функции.

*N.G. Suryaninov, T.G. Nizdrupa.* **Accounting of cross-sectional deformation of the contour in the calculation of thin-walled rods.** One of the main hypotheses in the calculation of thin-walled rods theory is the assumption that there is no deformation of the contour of the cross section. However, studies have shown that the denial of the contour deformation in many cases leads to significant errors in the calculations. It is also known that a significant influence on the stress-strain state of thin-walled rods's section contour has warping. The article describes the general approach for the accounting of these two phenomena, which is based on the formation of the two systems of orthogonal functions that are approximating functions for solvation of the problem by Kantorovich-Vlasov, which allows to determine the stress- strain state of thin-walled rod, taking into account the deformation and warping of section contour. The resulting generalized longitudinal and transverse movements allow to find a force of stress and strain in the rods of any profile.

*Keywords:* thin-walled rod, contour deformation, warping, mutually orthogonal functions.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 14 апреля 2014 г.