

*Р.Г. Мелещенко, преподаватель, НУГЗУ,
В.К. Мунтян, к.т.н., доцент, зав. каф., НУГЗУ*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРОВ СБРОСА ВОДЫ С ПОЖАРНОГО САМОЛЕТА АН-32П

(представлено д-ром техн. наук Комяк В.М.)

На основе аппроксимации экспериментальных данных уточнена модель пространственного распределения слоя воды водяного пятна при осуществлении сброса с пожарного самолета Ан-32П. Получена зависимость данного распределения от высоты сброса. Проведен статистический анализ модели, показана ее адекватность.

Ключевые слова: модель, толщина слоя воды, пожарный самолет Ан-32П.

Постановка проблемы. Одним из основных параметров, влияющим на эффективность применения авиации для тушения пожаров, является количественная характеристика водяного пятна, образующегося на поверхности земли. В силу неравномерного распределения воды в пределах водяного пятна эффективность ее использования для тушения пожара в пределах накрываемой площади различна. Учитывая, что количественные характеристики водяного пятна зависят не только от конкретной системы сброса самолета, но и от параметров его полета в момент сброса, исследование этих характеристик может позволить повысить эффективность применения авиации для тушения пожаров.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [1, 2] описана процедура проведения серии экспериментов, осуществленная с участием авторов, по определению распределения толщины слоя воды cap-and-grid методом. Там же приведены модели, аппроксимирующие экспериментальные данные. При этом не была проведена проверка адекватности данных моделей.

Постановка задачи и ее решение. Целью работы является уточнение математической модели зависимости толщины слоя воды водяного пятна и ее статистический анализ.

Отличительной особенностью водяного пятна, получаемого при сбросе с самолета Ан-32П, является его относительно небольшие габариты (объясняемые малым объемом резервуаров и значительным потерями рассеянной воды). При этом при локализации пожара необходимо перед его кромкой получить непрерывную переувлажненную противопожарную полосу (ПП), что, как показывает опыт пожаротушения, в виду малого размера пятна и наличия дисперсии отклонения его центра при сбросе, является достаточно затруднительным.

Поэтому для решения задачи создания непрерывной ПП необходимо, в том числе, построить математическую модель толщины слоя воды в зависимости от высоты сброса и координаты точки внутри водяного пятна (далее именуемой как модель водяного пятна) на основании полученных экспериментальных данных.

В серии экспериментов [1] были осуществлены 56 сбросов воды (при разных высотах сброса) на экспериментальную площадку 150 м × 60 м. В виду наличия дисперсии в прицеливании только К=48 сбросов привели к невыходу границ водяного пятна (пороговое значение 0.1 мм) за пределы экспериментальной площадки.

При каждом сбросе осуществлены замеры толщины водяного слоя с использованием *cup-and-grid* метода на решетке $I = 16 \times J = 13$ (с размером ячейки $\Delta_x \times \Delta_y = 10 \times 5$ м). Данные сбросы осуществлялись $N = 16$ сериями по $M = 3$ сброса при значениях высоты сброса H_n (от 40 м до 70 м с шагом в 2 м). Значения высоты сброса контролировались по навигационным приборам самолета, погрешностью значений пренебрегали. Полученные данные толщины водяного слоя далее обозначены как δ_{ij}^{mn} ($i=1 \div I, j=1 \div J, n=1 \div N, m=1 \div M$).

Изначально была проведена оценка эффективного объема воды $V_{эф}$ (м^3), достигшего поверхности земли, в зависимости от высоты сброса H .

Оценка осуществлялась согласно выражению

$$V_{эф_n} = V_{эф}(H_n) = \frac{s}{M} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M \delta_{ij}^{mn}, \quad (1)$$

где $s = 10 \times 5 = 50 \text{ м}^2$ – площадь ячейки, δ_{ij}^{mn} – толщина (10^{-3} м) слоя воды водяного пятна в ij узле при m -ом сбросе в n -ой серии.

Малое рассеяние величины эффективного объема внутри каждой серии (т.е. при каждом значении высоты сброса H_n) подтверждает высокую степень воспроизводимости результатов, тем самым, демонстрируя наличие статистической связи между изменениями высотой сброса H и эффективным объемом $V_{эф}$. В частности, корреляционное отношение [3] дает значение $\eta = 0.99$.

Корреляционное отношение η (в отличие от выборочного коэффициента корреляции) не указывает на вид линии регрессии. Поэтому первоначально было осуществлено построение линейной линии регрессии, однако проверка ее по критерию Фишера [4], возможная благодаря наличию кратных испытаний ($M > 1$), не подтвердила адекватность модели, в связи с чем было осуществлено построение квадратичной регрессионной модели

$$\hat{V}_{\text{эф}}(H) = 12.8 - 0.273H + 0.00134H^2. \quad (2)$$

Точность данной модели лимитирована точностью фиксации величины δ_{ij}^{mn} ($\Delta\delta_{ij}^{mn} = 10^{-4} \text{ м}$, поэтому

$$\Delta V_{\text{эф}} = \Delta \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M \delta_{ij}^{mn} \right) \sim 10^{-1} \text{ м}^3).$$

Статистический анализ модели (2) подтвердил ее адекватность по критерию Фишера [4]. Обработка данных позволила найти $F_{\text{эмн}} = 2.01$. Величина $F_{\text{эмн}}$ имеет распределение Фишера с $k_1 = N - L$ и $k_2 = N(M - 1)$ числами степеней свободы. Задавая уровень значимости $\alpha = 0.05$, $k_1 = 16 - 3 = 13$, $k_2 = 16(2 - 1) = 32$, находим критическое значение $F_{\text{кр}} = 2.04$ [4]. Адекватность модели (2) подтверждается выполнением неравенства $F_{\text{эмн}} < F_{\text{кр}}$.

На рис. 1 приведен график данной регрессионной модели. Модель позволяет оценить $V_{\text{эф}}(H)$ в диапазоне высот $40 \text{ м} \leq H \leq 70 \text{ м}$. Ниже модель (2) использована в качестве косвенного подтверждения модели водяного пятна.

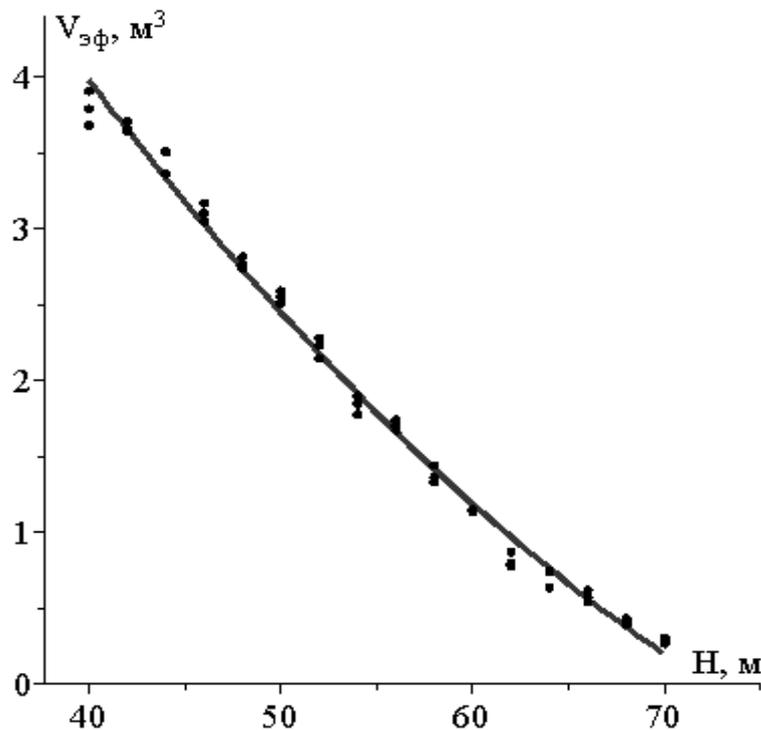


Рис. 1. График модели $V_{\text{эф}}(H)$. Точки – значения $s \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \delta_{ij}^{mn}$

Данные оценки подтверждают существенные конструкционные недостатки системы сброса воды самолета Ан-32П – даже сброс на минимально допустимой высоте (40 м) приводит к 50% потерям воды. Таким образом, система сброса воды является несовершенной, поэтому особенно актуальным является вопрос эффективного использования воды. Решение данной задачи возможно путем нахождения оптимальных параметров сброса, для чего необходимо построение модели водяного пятна.

По результатам экспериментальных данных получены графики (гистограммы) пространственного распределения толщины $\delta(x, y)$ слоя воды водяного пятна (некоторые из них приведены на рис. 2).

Качественный анализ графиков позволил выявить следующие закономерности:

- наблюдается неравномерное (с четко выраженным пиком $\delta_{\max}^{mn} = \max(\delta_{ij}^{mn})_{i=1..I, j=1..J}$) распределение слоя воды внутри границ водяного пятна при каждом m -ом сбросе;

- прослеживается убывающая монотонная зависимость максимальной толщины слоя δ_{\max}^{mn} от высоты сброса H_n ($m = 1..M, n = 1..N$);

- распределение толщины слоя воды симметрично вдоль направления полета самолета и несимметрично относительно поперечной линии, проходящей через пик;

- изолинии $L(x, y, \delta^*) = 0$ толщины слоя воды при фиксированной толщине слоя, т.е. при $\delta = \delta^*$ ($0 \leq \delta^* \leq \delta_{\max}^{mn}$), могут быть аппроксимированы биэллипсами, задаваемыми тремя полуосями, с вершиной в пике, размер полуосей зависит от значения δ ; сами полуоси далее будут обозначаться: a_1 – вдоль направления движения самолета, a_2 – против движения самолета, b – перпендикулярно движению;

- величины полуосей a_1 и a_2 немонотонно изменяются в зависимости от высоты сброса воды H , при этом $a_1 > a_2$ при всех значениях H_n ; полуось b убывает с высотой монотонно;

- границы водяного пятна (при толщине слоя воды $\delta = 10^{-4}$ м) ограничивают площадь, величина которой снижается с ростом высоты сброса H .

Данные закономерности позволяют определить вид общей модели $\delta(x, y, H)$, задаваемой в локальной декартовой системе координат с центром в пике водяного пятна и ориентацией оси Ox вдоль направления полета, в виде двумерной поверхности (при фиксированной высоте сброса H), подобной гауссовой

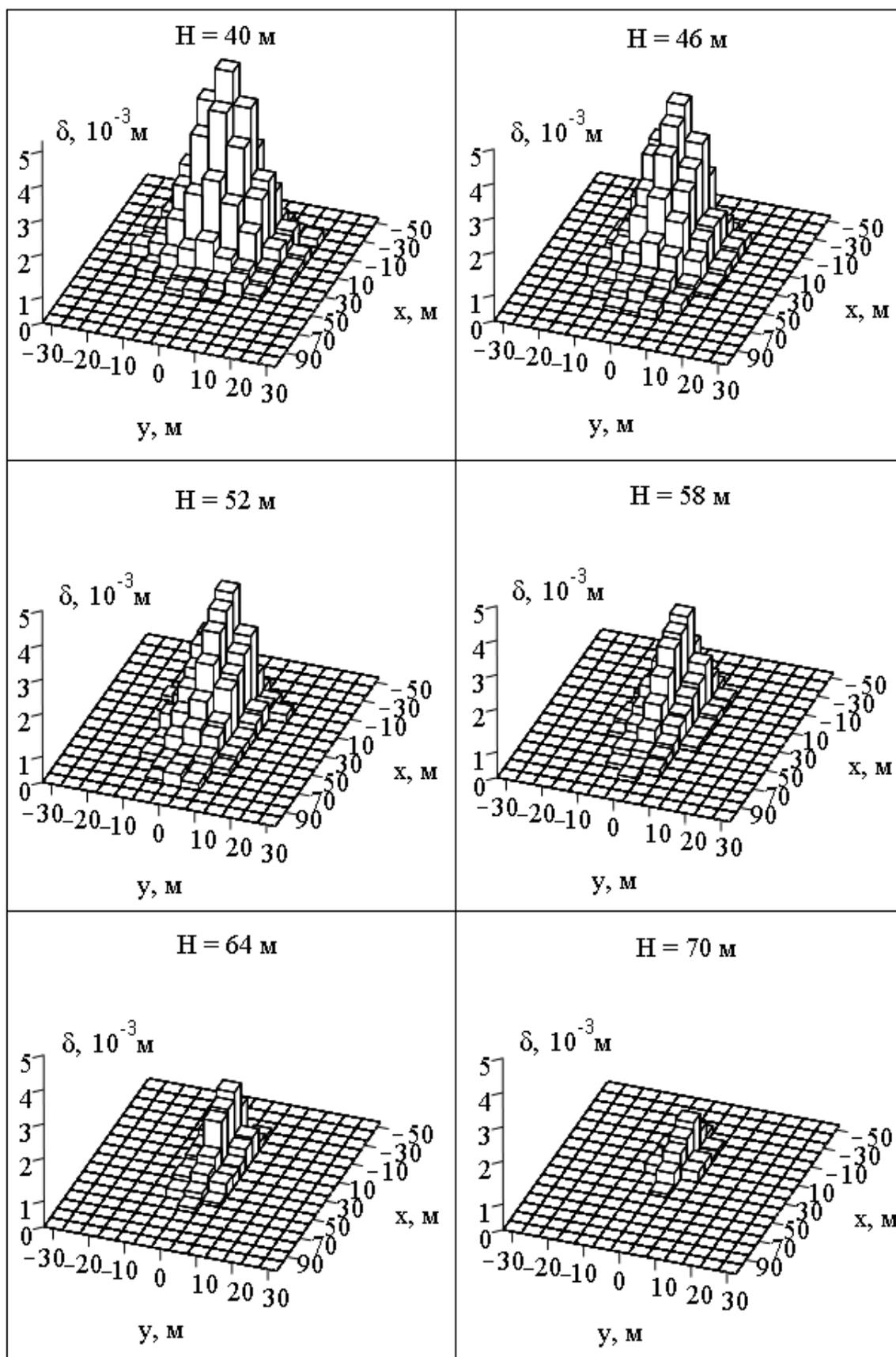


Рис. 2. Примеры иллюстрации пространственного распределения слоя воды по данным экспериментальных сбросов

$$\delta(x, y, H) = \begin{cases} D(H) \cdot \exp\left(-\left[\frac{x}{A_2(H)}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{y}{B(H)}\right]^2\right), & x < 0; \\ D(H) \cdot \exp\left(-\left[\frac{x}{A_1(H)}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{y}{B(H)}\right]^2\right), & x \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $D(H)$ – пиковое значение толщины слоя; $A_1(H)$, $A_2(H)$, $B(H)$, $D(H)$ – зависимости, получаемые ниже.

Выбор такого представления модели осуществлен в виду того, что выражение (3) при фиксации толщины $\delta = \delta^*$ задает именно биэллипс

$$L(x, y, H, \delta): \begin{cases} \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & x < 0; \\ \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(H, \delta^*) &= A_1(H) \sqrt{\ln\left(\frac{D(H)}{\delta^*}\right)}; & a_2(H, \delta^*) &= A_2(H) \sqrt{\ln\left(\frac{D(H)}{\delta^*}\right)}; \\ b(H, \delta^*) &= B(H) \sqrt{\ln\left(\frac{D(H)}{\delta^*}\right)}, \end{aligned} \quad (5)$$

при условии, что $\delta^* < D(H)$.

Вид зависимостей $A_1(H)$, $A_2(H)$, $B(H)$, $D(H)$ был осуществлен методом наименьших квадратов.

В виду случайного характера распределения координаты центра сброса в качестве начала локальной системы координат при каждом m -ом сбросе с высоты H_n выбирался узел (\tilde{i}, \tilde{j}) с максимальным значением толщины водяного слоя. Данное значение обозначим как $\tilde{\delta}_{mn} = \max(\delta_{ij}^{mn}) \Big|_{\substack{i=1..I \\ j=1..J}}$ ($m=1..M, n=1..N$).

Нахождение зависимостей $A_1(H)$, $A_2(H)$, $B(H)$, $D(H)$ из выражения (3), в виду громоздкости и кусочного характера данного выражения, не удалось осуществить непосредственным решением задачи

$$L = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [\delta_{ij}^{mn} - \delta(A_1(H), A_2(H), B(H), D(H))]^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

даже в предположении о линейном характере этих зависимостей.

Поэтому решение осуществлялось иначе и состояло из выполнения трех этапов (из которых первые два связаны с кусочным характером выражения (3)):

1) нахождение набора $M \times N$ векторов значений $(A_1^{mn}, B^{mn}, D^{mn})$ путем решения задачи

$$L_1^{mn}(A_1, B, D) = \sum_{i=\tilde{i}}^I \sum_{j=1}^J \left(\delta_{ij}^{mn} - D \cdot \exp\left(-\left[\frac{i \cdot \Delta_x}{A_1}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{j \cdot \Delta_y}{B}\right]^2\right) \right)^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

что эквивалентно решению системы $3 \times M \times N$ уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial(L_1^{mn}(A_1, B, D))}{\partial A_1} = 0; \\ \frac{\partial(L_1^{mn}(A_1, B, D))}{\partial B} = 0; \\ \frac{\partial(L_1^{mn}(A_1, B, D))}{\partial D} = 0. \end{cases}$$

2) нахождение набора значений (A_2^{mn}) для $M \times N$ путем решения задачи

$$L_2^{mn}(A_2) = \sum_{i=1}^{I-\tilde{i}} \sum_{j=1}^J \left(\delta_{ij}^{mn} - D^{mn} \cdot \exp\left(-\left[\frac{i \cdot \Delta_x}{A_2}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{j \cdot \Delta_y}{B^{mn}}\right]^2\right) \right)^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

что эквивалентно решению системы $M \times N$ уравнений

$$\frac{\partial(L_2^{mn}(A_2))}{\partial A_2} = 0,$$

при ранее найденных значениях B^{mn} и D^{mn} .

На рис. 3 в виде точек изображены значения $A_1^{mn}, A_2^{mn}, B^{mn}, D^{mn}$ при высотах сброса H_n . Для указанных данных получены корреляционные отношения $\eta(A_1) = 0.97$; $\eta(A_2) = 0.86$; $\eta(B) = 0.99$; $\eta(D) = 0.99$, указывающие на сильную корреляционную зависимость данных и на правомочность нахождения уравнений регрессии;

3) МНК-аппроксимация полученных значений $(A_1^{mn}, A_2^{mn}, B^{mn}, D^{mn})$ как функций высоты сброса H .

Изначально осуществлялись попытки построения $P_k(H)$ полиномиальных моделей для указанных зависимостей при различных значениях k , начиная с $k=1$. Параллельно осуществлялась проверка адекватности каждой из моделей при уровне значимости $\alpha = 0.05$. В случае их неадекватности, порядок полинома k увеличивался до достижения моделями адекватности.

В результате получены зависимости (для $H \in [40; 70]$)

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_1(H) &= -176.4 + 7.919H - 0.07152H^2 \\
 \hat{A}_2(H) &= 64.6 - 1.842H + 0.01619H^2 \\
 \hat{B}(H) &= 32.9 - 0.7223H + 0.00437H^2 \\
 \hat{D}(H) &= 10.4 - 0.132H,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

при этом размерности величин $[H] = [\hat{A}_1] = [\hat{A}_2] = [\hat{B}] = м$, $[\hat{D}] = 10^{-3} м$.

На рис. 3 представлены графики данных функций. При реализации всех этапов использовались возможности программного продукта Maple. Подставляя (9) в (3), получим модель $\delta(x, y, H)$ водяного пятна в локальной системе координат, связанной с эпицентром пикового значения толщины $\tilde{\delta}$ слоя воды.

На рис. 4 приведены графики выражения (3) при разных значениях высоты сброса H .

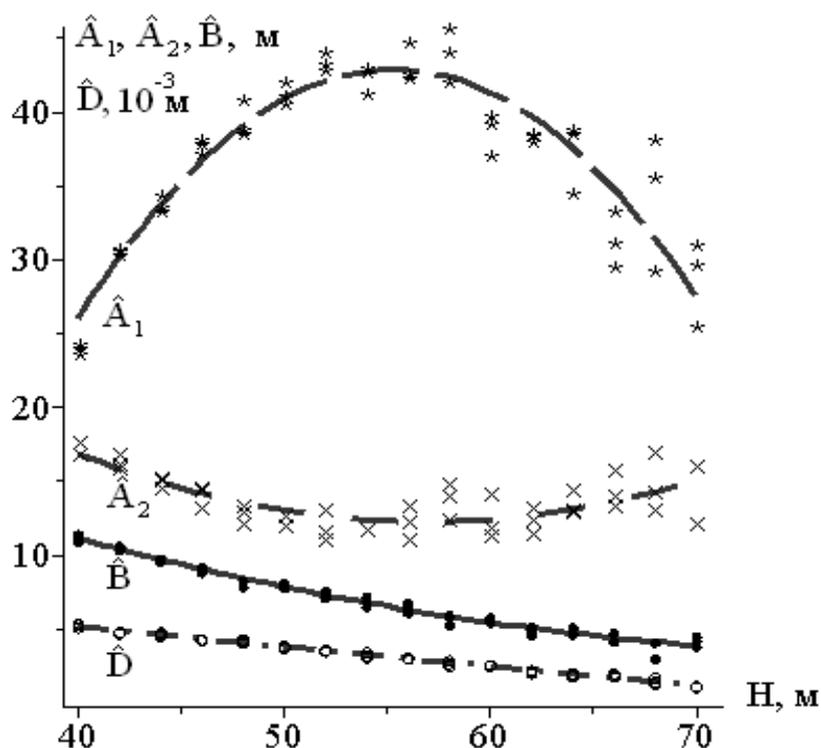


Рис. 3. Точки: $A_1^{mn}(H_n)$, $A_2^{mn}(H_n)$, $B^{mn}(H_n)$, $D^{mn}(H_n)$. Линии: $\hat{A}_1(H)$, $\hat{A}_2(H)$, $\hat{B}(H)$, $\hat{D}(H)$

Для моделей (9), соответственно, получено $F_{\text{эмп}}^{\hat{A}_1} = 2.00$, $F_{\text{эмп}}^{\hat{A}_2} = 1.53$, $F_{\text{эмп}}^{\hat{B}} = 1.18$ при $F_{\text{кр}}(0.05; 13; 32) = 2.04$ и $F_{\text{эмп}}^{\hat{D}} = 1.97$ при $F_{\text{кр}}(0.05; 14; 32) = 2.01$. Для всех моделей выполнен критерий $F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$.

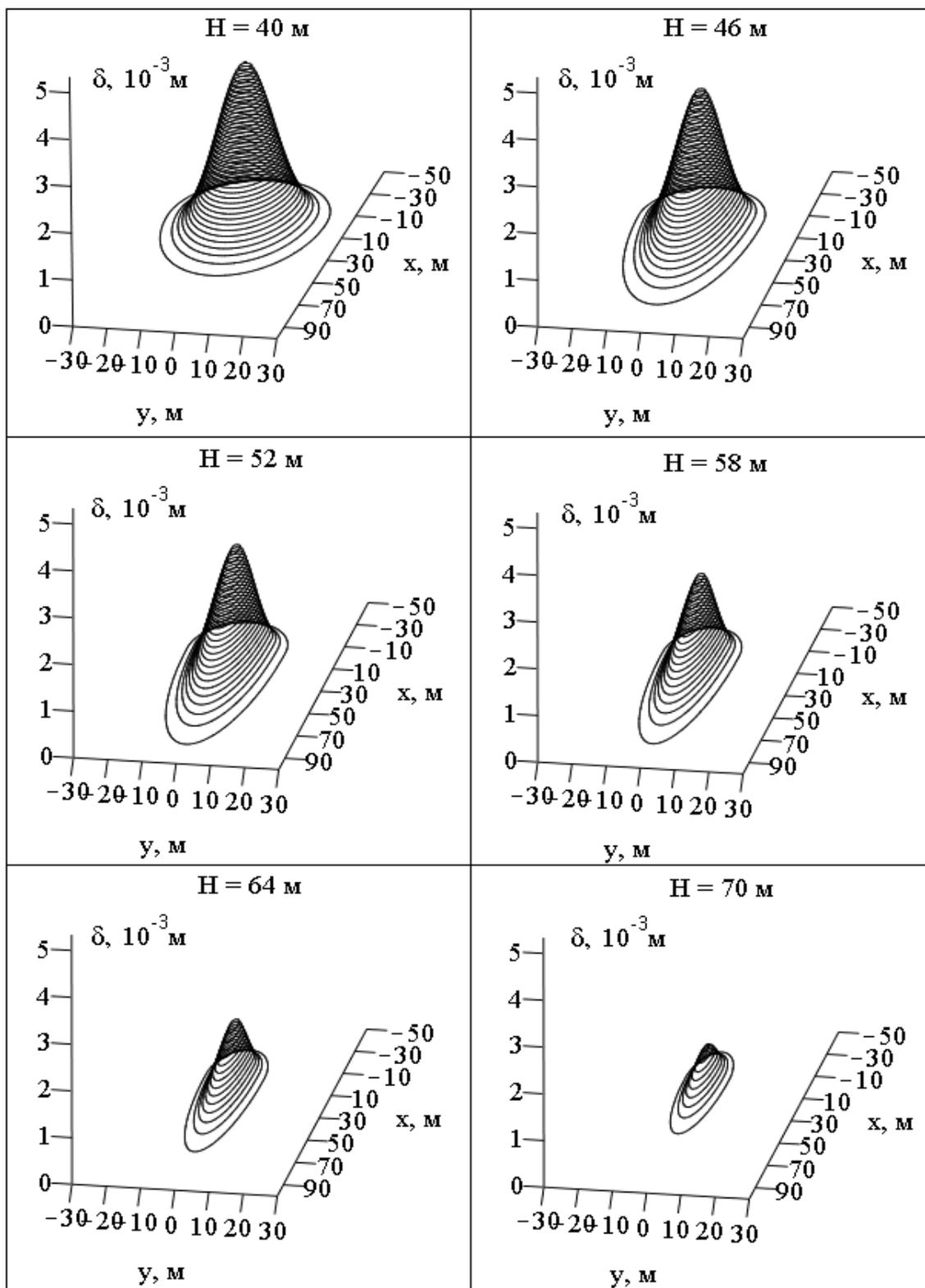


Рис. 4. Примеры иллюстрации пространственного распределения слоя воды согласно (3), (9)

В силу того, что модель (3) не отыскивалась в виде решения задачи (7) проводить проверку адекватности данной модели по Фишеру не представляется возможным. Поэтому качество модели (3), (9) определялось другими методами.

Для полученной модели (3), (9) оценивались погрешности:

- максимальная абсолютная погрешность

$$\Delta_{\max} = \max \left(\left| \delta(i \cdot \Delta_x, j \cdot \Delta_y, H_n) - \delta_{ij}^{mn} \right| \Big|_{\substack{i=1 \dots I, m=1 \dots M \\ j=1 \dots J, n=1 \dots N}} \right)$$

Данная погрешность не превосходит погрешность измерения толщины слоя при проведении эксперимента, т.е. $\Delta_{\max} < 10^{-4}$ м;

- средняя относительная погрешность

$$\bar{W} = \frac{100\%}{I \cdot J \cdot M \cdot N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{|\delta(i \cdot \Delta_x, j \cdot \Delta_y, H_n) - \delta_{ij}^{mn}|}{\delta_{ij}^{mn}}$$

равна $\bar{W} = 7.03\%$, что указывает на высокое качество данной модели.

Соответствие полученной модели и экспериментальных данных косвенно подтверждается и хорошим приближением наблюдаемого эффективного объема воды (2) и рассчитанного теоретического эффективного объема

$$V_{\text{эф}}^T(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y, H) dx dy$$

На рис. 5 представлен график данной зависимости в сравнении ее с аналогичным экспериментальным значением. Видно, что всюду, кроме концов интервала, абсолютная погрешность не превышает $\Delta V_{\text{эф}} = 10^{-1} \text{ м}^3$ и там же относительная погрешность W расхождения $V_{\text{эф}}(H)$ и $V_{\text{эф}}^T(H_n)$ не превышает 10%. Подстановка (9) в (5) позволяет получить параметры биэллипсов – полуоси сечений $a_1(H, \delta)$, $a_2(H, \delta)$, $b(H, \delta)$.

Анализ графиков показывает, что модель (3), (9) действительно отображает те качественные закономерности, касающиеся параметров биэллипса, которые были выявлены в ходе проведения эксперимента.

При этом площадь области $S(H, \delta)$ при фиксированной толщине водяного слоя δ (площадь биэллипса), вычисляемая в полярных координатах как

$$S(H, \delta) = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a_1 \cdot b)^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a_1^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{(a_2 \cdot b)^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right]$$

с уменьшением высоты сброса растет монотонно (рис. 6а).

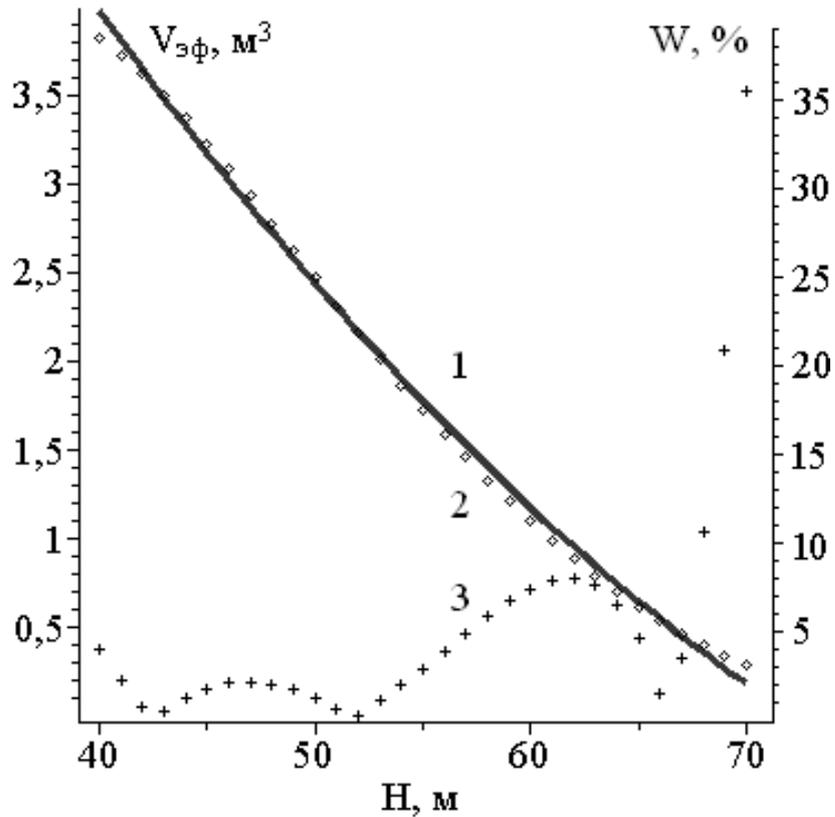


Рис. 5. Графики: 1 – $V_{эф}(H)$; 2 – $V_{эф}^T(H_n)$; 3 – относительная погрешность W (по правой шкале)

Особо примечательным фактом является немонотонность зависимости длины $a_1 + a_2$ (рис. 6б) биэллипса от высоты сброса H , что позволяет в последующем осуществить оптимизацию высоты сброса H .

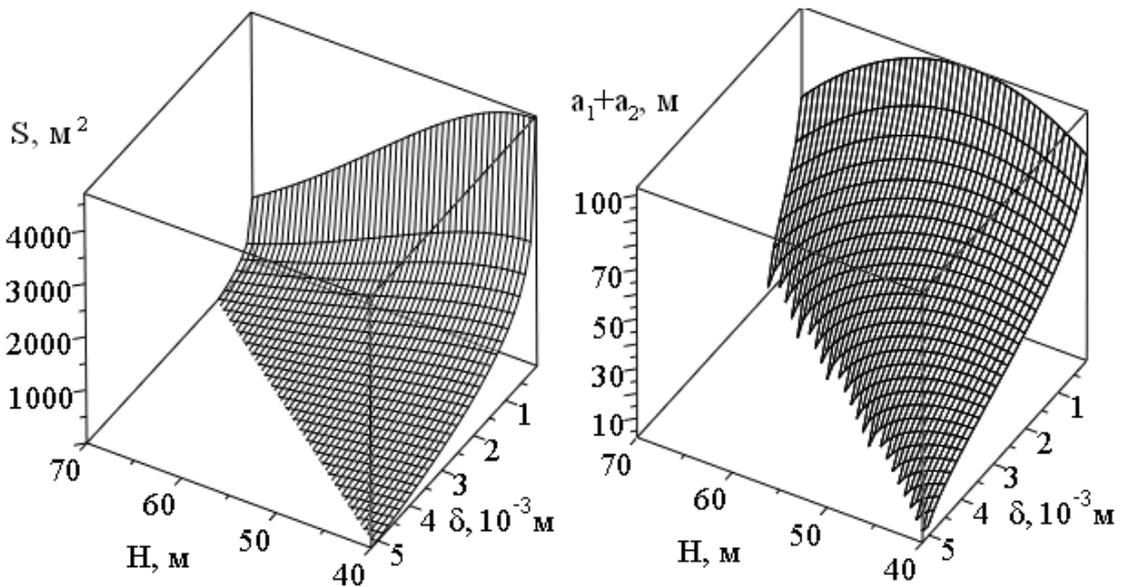


Рис. 6. Графики зависимостей а) $S(H, \delta)$; б) $a_1(H, \delta) + a_2(H, \delta)$

Таким образом, есть основания говорить о корректном отражении качественных закономерностей и адекватном представлении количественных экспериментальных данных моделью (3), (9).

Выводы. На основе количественного анализа экспериментальных данных получена регрессионная модель пространственного распределения слоя воды водяного пятна при осуществлении сброса с пожарного самолета Ан-32П. Получена зависимость данного распределения от высоты сброса. Проведен статистический анализ компонентов модели, показана ее адекватность

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешенко Р.Г. Моделирование параметров сброса воды с пожарного самолета Ан-32П на основании данных полученных Surp-and-grid методом/ Р.Г. Мелешенко, В.К. Мунтян, И.К. Кириченко// Проблемы пожарной безопасности: Сб.научн.тр.-Вып. 28. – Харьков: НУГЗУ, 2010. – С.86-92.

2. Мелешенко Р.Г. Формирование водяного пятна при сбросе воды с пожарного самолета Ан-32П/ Р.Г. Мелешенко, В.К. Мунтян, И.С. Агапова// Проблемы пожарной безопасности: Сб.научн.тр.-Вып. 26. – Харьков: УГЗУ, 2009. – С.79-84.

3. Шашков В.Б. Обработка экспериментальных данных и построение эмпирических формул. Курс лекций. : Учебное пособие.- Оренбург: ОГУ, 2005. – 150 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/ В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

Р.Г. Мелешенко, В.К. Мунтян

Статистичний аналіз параметрів моделі скидання води з пожежного літака Ан-32П

На основі апроксимації експериментальних даних уточнено модель просторового розподілу шару води водяної плями при здійснюванні скидання з пожежного літака Ан-32П. Отримана залежність цього розподілу від висоти скидання. Проведено статистичний аналіз моделі, показана її адекватність.

Ключові слова: модель, товщина шару води, пожежний літак Ан-32П.

R.G. Meleschenko, V.K. Mountyan

Statistical analysis of model parameters discharge of water from a fire plane An-32F

On the basis of experimental data approximation and the refined model of spatial raspad-Loup water layer water stains in the implementation of effluent from fire plane An-P. The obtained dependence of this distribution of the height of the discharge. The conducted statistical analysis-Liz model shown its adequacy.

Keywords: model, the thickness of the layer of water, fire plane An-32F.