УДК 614.8

Ю.А. Абрамов, д.т.н., профессор, НУГЗУ,
Я.Ю. Кальченко, адъюнкт, НУГЗУ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОЖАРНЫХ ИЗВЕЩАТЕЛЕЙ

Применительно к тепловым пожарным извещателям, тест-воздействие в которых осуществляется при помощи внутреннего источника тепла, получено математическое описание реакции обобщенного чувствительного элемента извещателя на такое воздействие.

Ключевые слова: пожарный извещатель, математическая модель, тестирование.

Постановка проблемы. Одним из вариантов тестирования пожарных извещателей является тест-воздействие при помощи внутреннего источника тепла. Техническая реализация такого решения обуславливает наличие математического описания реакции обобщенного чувствительного элемента на такое воздействие.

Анализ последних исследований и публикаций. Принципиально возможно два варианта формирования алгоритма тестирования пожарных извещателей – путем внешнего тест-воздействия или путем внутреннего тест-воздействия. Наиболее полно проработан первый вариант, который реализуется с помощью генераторов тепла, дыма аэрозоля и др. [1]. Второй вариант менее проработан, однако потенциальные возможности при его реализации перекрывают достоинства первого варианта тестирования.

Постановка задачи и ее решение. Целью работы является разработка обобщенной математической модели применительно к тепловым пожарным извещателям, тест-воздействие в которых осуществляется при помощи внутреннего источника тепла.

Рассмотрим тепловой пожарный извещатель, который снабжен автономным электрическим нагревателем и микровентилятором. С помощью этих дополнительных элементов обеспечивается формирование теплового тест-воздействия на чувствительный элемент пожарного извещателя. В качестве чувствительного элемента теплового пожарного извещателя будем рассматривать обобщенный терморезистивный чувствительный элемент, который может иметь форму прямоугольной пластины, цилиндра или шара.

Пусть с помощью автономного электрического нагревателя и микровентилятора обеспечивается поступление на обобщенный терморезистивный чувствительный элемент пожарного извещателя теплового потока $\mathrm{q} = \mathrm{const}$. Тогда температура чувствительного элемента $T(\mathrm{r}, t)$ будет описываться уравнением

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]-m^2\left[T(r,t)-T_0\right] \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$T(r,0)=T_0;$$
$$\lambda\frac{\partial T(R,t)}{\partial r}=q, \quad (2)$$

где a,λ – коэффициент температуропроводности и теплопроводность материала чувствительного элемента; T_0 – температура окружающей среды; R – характерный размер чувствительного элемента; ν – параметр, характеризующий форму чувствительного элемента($\nu=-0{,}5$ – для пластины, $\nu=0$ – для цилиндра, $\nu=0{,}5$ – для шара); m^2 – параметр, определяемый выражением

$$m^2=\frac{2\alpha}{c\rho R}; \quad (3)$$

α – коэффициент теплопередачи; c,ρ – удельная теплоемкость и плотность материала чувствительного элемента.

Введем обозначения

$$T(r,t)-T_0=\theta(r,t)=M(r,t)exp\left(-m^2t\right), \quad (4)$$

вследствие чего уравнение (1) и условия (2) трансформируются к виду

$$\frac{\partial M(r,t)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 M(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial M(r,t)}{\partial r}\right]; \quad (5)$$

$$M(r,0)=0;\ \lambda\frac{\partial M(R,t)}{\partial r}=q\,exp\left(m^2t\right). \quad (6)$$

Для решения уравнения (5) применим к нему интегральное преобразование

$$\overline{M}(\mu_n,t)=\int_0^R r^{\nu+1}J_\nu\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr, \quad (7)$$

где $J_\nu\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$ – функция Бесселя ν-го порядка; μ_n – n-й корень трансцендентного уравнения

$$J_{\nu+1}(\mu)=0, \tag{8}$$

вследствие чего получим

$$\frac{d\overline{M}(\mu_n,t)}{dt}+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\overline{M}(\mu_n,t)=\frac{aqR^{2\nu+1}}{\lambda\mu_n^{\nu}}J_{\nu}(\mu_n)exp\left(m^2t\right). \tag{9}$$

После применения к (9) интегрального преобразования Лапласа, результат решения полученного дифференциального уравнения можно записать следующим образом

$$\tilde{M}(\mu_n,p)=\int_0^{\infty}\overline{M}(\mu_n,t)exp(-pt)dt=$$

$$=\frac{aqR^{2\nu+1}}{\lambda\mu_n^{\nu}}J_{\nu}(\mu_n)\left[\left(p-m^2\right)\left[p+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]\right]^{-1}, \tag{10}$$

где p – комплексное число.

Учтем, что имеет место [2]

$$\overline{f_1}(\mu_n,t)=L^{-1}\left[\left(p-m^2\right)^{-1}\right]=exp\left(m^2t\right); \tag{11}$$

$$\overline{f_2}(\mu_n,t)=L^{-1}\left[\left[p+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]^{-1}\right]=exp\left[-a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2t\right], \tag{12}$$

где L^{-1} – оператор обратного интегрального преобразования Лапласа.

Тогда в соответствии с теоремой Бореля о свертке [3] можно записать

$$\overline{M}(\mu_n,t)=\frac{aqR^{2\nu+1}}{\lambda\mu_n^{\nu}}J_{\nu}(\mu_n)\int_0^t\overline{f_1}(\mu_n,\tau)\overline{f_2}(\mu_n,t-\tau)d\tau,$$

что с учетом (4), (11) и (12) приводит к следующему результату

$$\overline{\theta}(\mu_n,t)=\frac{aqR^{2\nu+1}J_{\nu}(\mu_n)}{\lambda\mu_n^{\nu}\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]}\left[1-exp\left[-\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]t\right]\right], \tag{13}$$

где $\overline{\theta}(\mu_n,t)$ – результат применения к функции $\theta(r,t)$ интегрального преобразования вида (7).

Выражение, определяющее распределение температуры в обобщенном терморезистивном чувствительном элементе, в соответствии с формулой обращения [4]

$$\theta(r,t)=\frac{\bar{\theta}(\mu_0,t)}{\|\psi_0\|^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\|\psi_n\|^2}\bar{\theta}(\mu_n,t), \tag{14}$$

где

$$\|\psi_0\|^2=\frac{R^{2(\nu+1)}}{2(\nu+1)}; \qquad \|\psi_n\|^2=\frac{R^{2(\nu+1)}}{2\mu_n^{2\nu}}J_\nu^2(\mu_n); \tag{15}$$

$$\mu_0=0;\ \psi_n\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\frac{R^\nu}{(\mu_n r)^\nu}J_\nu\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

можно записать следующим образом

$$\theta(r,t)=\frac{2(\nu+1)\bar{\theta}(0,t)}{R^{2(\nu+1)}}+\frac{2aqR^{\nu-1}}{\lambda r^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]J_\nu(\mu_n)}\times$$

$$\times\left[1-exp\left[-\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]t\right]\right]. \tag{16}$$

Рассмотрим частные случаи, определяемые формой чувствительного элемента пожарного извещателя.

1. Чуствительный элемент – прямоугольная пластина, т.е. $\nu=-0{,}5$.

Учтем соотношения [5]

$$J_{-0,5}(\mu_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_n^{-0,5}\cos\mu_n;\ J_{-0,5}\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{R}{\mu_n r}\right)^{0,5}\cos\frac{\mu_n r}{R}. \tag{17}$$

Тогда выражение (16) трансформируется к виду

$$\theta(r,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{aq}{\lambda m^2 R}\left[1-\exp\left(-m^2t\right)\right]+\frac{2aq}{\lambda R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\mu_n r}{R}}{\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]\cos\mu_n}\times$$

$$\times\left[1-\exp\left[-\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]t\right]\right], \tag{18}$$

где $\mu_n - n-$й корень трансцендентного уравнения

$$J_{0,5}(\mu)=0. \tag{19}$$

2. Чувствительный элемент – цилиндр, т.е. $\nu=0.$

Выражение (16) принимает вид

$$\theta(r,t)=\frac{2aq}{\lambda m^2 R}\left[1-exp\left(-m^2 t\right)\right]+\frac{2aq}{\lambda R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]J_0(\mu_n)}\times$$

$$\times\left[1-exp\left[-\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]t\right]\right], \tag{20}$$

где $\mu_n - n-$ й корень трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)=0. \tag{21}$$

3. Чувствительный элемент – шар, т.е. $\nu=0{,}5.$

Учтем соотношение [5]

$$J_{0,5}(\mu_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_n^{-0,5}\sin\mu_n;\, J_{0,5}\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{R}{\mu_n r}\right)^{0,5}\sin\frac{\mu_n r}{R}. \tag{22}$$

Тогда выражение (16) можно записать следующим образом

$$\theta(r,t)=3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{aq}{\lambda m^2 R}\left[1-exp\left(-m^2 t\right)\right]+\frac{2aq}{\lambda r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n r}{R}}{\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]\sin\mu_n}\times$$

$$\times\left[1-exp\left[-\left[m^2+a\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2\right]t\right]\right], \tag{23}$$

где $\mu_n - n-$й корень трансцендентного уравнения

$$J_{1,5}(\mu) = 0. \quad (24)$$

Вследствие малости размеров чувствительных элементов пожарного извещателя целесообразно перейти от моделей (18), (20), и (23) к усредненным по объему чувствительного элемента температурам, которые определяются выражением

$$\theta(t) = \omega R^{-\omega} \int_0^R r^{\omega-1} \theta(r,t) dr, \quad (25)$$

где ω – параметр, определяемый формой чувствительного элемента ($\omega = 1$ – для пластины; $\omega = 2$ – для цилиндра; $\omega = 3$ – для шара).

Применение оператора (25) соответственно к (18), (20), и (23) приводит к тому, что интегралы от вторых слагаемых в этих выражениях равны нулю, а усредненная по объему обобщенного чувствительного элемента температура описывается моделью

$$\theta(t) = \frac{Kaq}{\lambda m^2 R}\left[1 - \exp\left(-m^2 t\right)\right], \quad (26)$$

где $K = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ – для прямоугольной пластины; $K = 2$ – для цилиндра; $K = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ – для шара.

Если учесть (3), а также соотношение $a = \lambda(c\rho)^{-1}$, то модель (26) принимает вид

$$\theta(t) = \frac{0{,}5Kq}{\alpha}\left[1 - exp\left(-\frac{2\alpha}{c\rho R}t\right)\right], \quad (27)$$

где параметр α определяется с помощью критериального уравнения [6]

$$\alpha = d_1 \lambda_0 l^{-1} Re^{d_2}\, Pr_1^{d_3}\left(\frac{Pr_1}{Pr_2}\right)^{0{,}25}. \quad (28)$$

Здесь λ_0 – теплопроводность воздушной среды; l – длина чувствительного элемента (для шара $l = R$); $Re, Pr_1, Pr_2,$ – число Рейнольдса и число Прандтля при температуре воздушного потока, падающего на чувствительный элемент, и при температуре поверхности чувствительного элемента соответственно, d_i – параметры, значения которых приведены в табл. 1.

Табл. 1. Значения параметров d_i

Re	d_1	d_2	d_3
$5 < Re < 10^3$	0,5	0,5	0,38
$10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$	0,25	0,6	0,38
$2 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6$	0,023	0,8	0,37

В первом приближении можно положить, что имеет место $Pr_1 = Pr_2$.

Выводы. Математические модели, описывающие тепловые процессы в терморезистивних чувствительных элементах пожарных извещателей, имеющих форму прямоугольной пластины, цилиндра или шара, при воздействии на них постоянного теплового потока, создаваемого от внутреннего источника тепла, совпадают с точностью до постоянного множителя. Их динамические свойства определяются реологическими и геометрическими характеристиками материала чувствительного элемента, а также условиями теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баканов В.В. Тепловые пожарные извещатели. Пути совершенствования / В.В. Баканов, Н.А. Неплохов // Алгоритм безопасности. – 2012. – №3. – С. 26-30.

2. Абрамов Ю.А. Основы пожарной автоматики / Ю.А. Абрамов. – Харьков: ХВПТУ, 1993. – 288 с.

3. Абрамов Ю.А. Операционное исчисление / Ю.А. Абрамов, Н.Ю. Иохвидович, П.С. Червяков. – Харьков: ХВПТУ, 1993. – 36 с.

4. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.

5. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

6. Рябова І.Б. Термодинаміка і теплопередача у пожежній справі / І.Б. Рябова, І.В. Сайчук, А.Я. Шаршанов. – Харків: АПБУ, 2002. – 332 с.

Получено редколлегией 12.10.2016

Ю.О. Абрамов, Я.Ю. Кальченко

Математичне забезпечення тестування теплових пожежних сповіщувачів

Стосовно теплових пожежних сповіщувачів, тест-вплив яких здійснюється за допомогою внутрішнього джерела тепла, отриманий математичний опис реакції узагальненого чутливого елемента сповіщувача на такий вплив.

Ключові слова: пожежний сповіщувач, математична модель, тестування.

Y.A. Abramov, Y.Y. Kalchenko

Mathematical foundation of testing heat detectors

The mathematical description of reaction generalized sensitive detector element to impact of using an internal heat source has been received.

Keywords: fire detector, mathematical model, testing.