УДК 517.5 doi:10.15421/321609

Т.В. Наконечная
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ, ПОРОЖДЕННЫМ БИНАРНЫМ ПОПОЛНЕНИЕМ ДАННЫХ НА КЛАССАХ $\tilde{W}_p^m$

Розглянуто задачу наближення періодичних, неперервно диференційованих, з обмеженою старшою похідною на відрізку $\left[-1,1\right]$ функцій лінійним оператором, побудованим на базі бінарного поповнення даних.

Рассмотрена задача приближения периодических, непрерывно дифференцируемых, с ограниченной старшей производной на отрезке $\left[-1,1\right]$ функций линейным оператором, построенным на основе бинарного пополнения данных.

It is considered the problem of the approximation of periodic continuously differentiable with bounded higher derivative on the interval $\left[-1,1\right]$ functions, by linear operator, built on the basis of binary data replenishment.

Ключевые слова. Теория приближения, бинарное пополнение данных, оценки уклонения.

Введение. Одной из классических задач теории приближения функций является восстановление функции по ее значениям в равноотстоящих узлах. В настоящее время известно достаточно большое число методов решения данной проблемы. Для периодических функций – это интерполяционные тригонометрические полиномы и периодические сплайны; для функций, заданных на отрезке – классические интерполяционные полиномы или локальные интерполяционные сплайны, сплайны, асимптотически совпадающие с интерполяционными [1]. Однако в последнее время в теории приближения широкое применение получили методы, основанные на вычислительном аспекте, такие, как *wavelets* [2] или бинарное пополнение [3].

Постановка задачи. Введем обозначения, необходимые нам в дальнейшем. Пусть $h>0$ и $\left\{x_i\right\}_{i\in Z}=\left\{x_{i,0}\right\}_{i\in Z}=\left\{ih\right\}_{i\in Z}$ – равномерное разбиение оси с шагом h. Обозначим через $C_{[-1,1]}$ линейное пространство всех непрерывных, ограниченных на отрезке $[-1,1]$ 2-периодических функций с нормой $\|f\|_{C_{[-1,\,1]}} = \max\limits_{-1\le x\le 1}|f(x)|$.

Далее, обозначим через $\tilde{W}^m_{p[-1,\,1]} = \tilde{W}^m_p$, где $m = 1, 2,...;\ 1 \le p \le \infty$, класс 2-периодических функций, у которых $(m-1)$- я производная абсолютно непрерывна на периоде, а $\left\|f^{(m)}\right\|_p \le 1$.

Введём в рассмотрение один метод пополнения данных.

Пусть $f(x_i) = f_i = f_{i,0}$, где $i \in Z$. Через каждые 4 точки (x_ν, f_ν) $(\nu = i-1,\ i,\ i+1,\ i+2;\ \ i \in Z)$ проведем интерполяционную кубическую параболу и вычислим ее значение в точке $x_{i+1/2} = x_i + 0{,}5h$. Это приводит к формуле

$$f_{i+1/2;0} = \frac{-f_{i-1,0} + 9f_{i,0} + 9f_{i+1,0} - f_{i+2,0}}{16} = \frac{f_{i+1,0} + f_{i,0}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i+1,0} + f_{i,0}}{2}\right),$$

где $\Delta^2 z_i = z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}$ – вторая центральная разность в точке z_i.

Положим теперь

$$x_{2i,1} = x_{i,0}, \qquad f_{2i,1} = f_{i,0} \qquad (i \in Z),$$

$$x_{2i+1,1} = \frac{x_{i,0} + x_{i+1,0}}{2}, \qquad f_{2i+1,1} = f_{i+1/2,0} \qquad (i \in Z).$$

Таким образом, мы получили значения функции $f_{i,1}$ в точках $x_{i,1}$ $(i \in Z)$.

Полученный набор будем использовать в качестве исходного, далее повторяем процедуру пополнения данных, что приводит к рекуррентным формулам

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1};\ \ f_{2i,k} = f_{i,k-1}\ (i \in Z,\ k \in N) \text{ и } x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2},$$

$$f_{2i+1,k} = \frac{f_{i+1,k-1} + f_{i,k-1}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i+1,k-1} + f_{i,k-1}}{2}\right) \quad (i \in Z,\ k \in N).$$

Для каждого фиксированного k построим ломаную $g_{k,h}(f, x)$, принимающую значения $f_{i,k}$ в узлах $x_{i,k}$. В работе [4] было доказано, что равномерный предел при $k \to \infty$ последовательности ломаных

$\left\{g_{k,h}(f,x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ существует и единствен. Более того, получена оценка скорости сходимости последовательности $\left\{g_{k,h}(f,x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ к нему.

Основные результаты. Данная работа посвящена вычислению оценок сверху уклонения ломаной $g_{1,h}(f,x)$ от функций из классов $\tilde{W}_p^m$ для $m=1;\ \dfrac{3}{2}\le p\le\infty$ и $m=2;\ p=1,2,3,\infty$.

Теорема. Пусть $h=\dfrac{1}{n}\ (n\in N)$ и $f\in\ \tilde{W}_p^m$, ($m=1,2;\ \ 1\le p\le\infty$). Тогда будут иметь место следующие оценки сверху:

$$\sup_{f\in\tilde{W}_p^1}\left\|f\ -g_{1,h}(f)\right\|_C\le B_p h^{1-1/p}\ , \tag{1}$$

где $B_p=0{,}5\left(1+2^{-A(p)}\right)^{1-1/p}$, $A(p)=\dfrac{2p+1}{p-1}$, если $p\in\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right]$ и $B_\infty=\dfrac{5}{8}h$.

$$\sup_{f\in\tilde{W}_p^2}\left\|f-\ g_{1,h}(f)\right\|_C\le C_p h^{2-1/p}\ , \tag{2}$$

где $C_1=\dfrac{49}{256}$; $C_2=\dfrac{15\sqrt{55}}{1024}$; $C_3=\dfrac{9(\sqrt{3}+1)}{640}$ и $C_\infty=\dfrac{9}{64}$.

Доказательство. В силу свойств аппарата восстановления $g_{k,h}\left(f,x\right)$, $(k=1,2,...)$;

$$g_{k,h}\left(f\left(\cdot-ih\right),x\right)=g_{k,h}\left(f,x-ih\right),\ \left(i\in Z\right)$$

и

$$g_{k,h}\left(f\left(h-\cdot\right),x\right)=g_{k,h}\left(f,h-x\right),$$

нам достаточно исследовать случай, когда $x\in\left[0;\ 0{,}5h\right]$. Для удобства вычислений будем считать, что $x=0{,}5h-\varepsilon h$, где $\varepsilon\in\left[0;0{,}5\right]$.

Для любой функции $f\in C_{[-1;1]}$ будет верно следующее представление:

$$\left|f(x)-g_{1,h}(f,x)\right|=\left|f(0{,}5h-\varepsilon h)-\frac{1}{16}\left(-f(-h)+9f(0)+9f(h)-f(2h)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\left(f(-h)+7f(0)-9f(h)+f(2h)\right)\varepsilon\right|\ \ =\left|\int_{-h}^{2h}f(t)dK_\varepsilon(t)\right|,$$

где $K_\varepsilon(t)$ – кусочно-постоянная, в среднем равная нулю на периоде функция, задаваемая следующим образом:

$$K_\varepsilon(t)=\begin{cases} 0 \quad , & t\le -h \\ \dfrac{1}{16}-\dfrac{\varepsilon}{8}\ , & -h<t\le\ 0 \\ -\dfrac{1}{2}-\varepsilon, & 0<t\le\dfrac{h}{2}-\varepsilon h \\ \dfrac{1}{2}-\varepsilon\ , & \dfrac{h}{2}-\varepsilon h<t\le h \\ -\dfrac{1}{16}+\dfrac{\varepsilon}{8}, & h<t<2h \\ 0 \quad , & t\ge 2h. \end{cases}.$$

Пусть теперь $f\in\tilde{W}_p^1\ (1\le p\le\infty)$. Тогда с помощью интегрирования по частям и на основании интегрального неравенства Гёльдера получим

$$\left\|f-g_{1,h}(f)\right\|_C=\left|\int_{-h}^{2h}f(t)dK_\varepsilon(t)\right|=\left|f(t)K_\varepsilon(t)\Big|_{-h}^{2h}-\int_{-h}^{2h}f'(t)K_\varepsilon(t)dt\right|\le$$

$$\le\int_{-h}^{2h}\left|f'(t)\right|\cdot\left|K_\varepsilon(t)\right|dt\le\left\|f'\right\|_p\cdot\left\|K_\varepsilon\right\|_q\ ,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Непосредственным образом можно убедиться в том, что для любого $1\le q<\infty$ и $0\le\varepsilon\le 0{,}5$ верно равенство

$$\left\|K_\varepsilon\right\|_q^q=\int_{-h}^{2h}\left|K_\varepsilon(t)\right|^q dt\ =$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^q+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^q+\frac{2}{8^q}\cdot\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^q\right]h.$$

Н.П. Корнейчук в [5] доказал, что для всех $u>0$ и $\alpha\in[0;3]$ справедливо неравенство

$$2^\alpha\left(u^\alpha+u\right)\le\left(1+u\right)^{\alpha+1}, \tag{3}$$

которое для $\alpha>3$ и некоторого $u>0$ уже не выполняется.

Из неравенства (3) следует, что функция $\varphi(x)=x^\alpha$ для любых $x>0$, $y>0$ и $\forall\alpha\in[0;3]$ удовлетворяет неравенству

$$xy^{\alpha}+yx^{\alpha}\le\frac{1}{2^{\alpha}}(x+y)^{\alpha+1}. \qquad (4)$$

На основании неравенства (4) мы получаем, что для всех $q\in[1;3]$ и $0\le\varepsilon\le 0{,}5$ верно неравенство

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{q}+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{q}\le\frac{1}{2^{q}}.$$

Таким образом, для всех $q\in[1;3]$ и $0\le\varepsilon\le 0{,}5$ получаем

$$\|K_{\varepsilon}\|_{q}^{q}\le\max_{0\le\varepsilon\le 0{,}5}\left(\frac{1}{2^{q}}+\frac{2}{8^{q}}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{q}\right)h=\frac{1}{2^{q}}+\frac{2}{16^{q}}=\|K_{0}\|_{q}^{q}.$$

Следовательно, для всех $p\in[3/2;+\infty]$ мы получили оценку сверху

$$\sup_{f\in\tilde{W}_{p}^{1}}\|f-g_{1,h}(f)\|_{C}\le\frac{1}{2}\left[\left(1+2^{-\frac{2p+1}{p-1}}\right)h\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

В случае, когда $p=\infty$, мы получаем

$$\sup_{f\in\tilde{W}_{\infty}^{1}}\left\|f-g_{1,h}(f)\right\|_{C}\le\|f'\|_{\infty}\|K_{\varepsilon}\|_{1}\le\max_{0\le\varepsilon\le\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{8}-\frac{\varepsilon}{4}-2\varepsilon^{2}\right)h=\|K_{0}\|_{1}=\frac{5}{8}h.$$

Пусть теперь $f\in\tilde{W}_{p}^{2}$ $(1\le p\le\infty)$. Тогда

$$\left|f-g_{1,h}(f,x)\right|=\left|\int_{-h}^{2h}f'(t)K_{\varepsilon}(t)dt\right|=\left|f'(t)M_{\varepsilon}(t)\Big|_{-h}^{2h}-\int_{-h}^{2h}M_{\varepsilon}(t)f''(t)dt\right|,$$

где $M_{\varepsilon}(t)=\int_{-h}^{t}K_{\varepsilon}(u)du.$

В силу свойств функции $K_{\varepsilon}(t)$ мы получаем, что $M_{\varepsilon}(-h)=M_{\varepsilon}(2h)=0$. Следовательно, по аналогии с предыдущим

$$\sup_{f\in\tilde{W}_{p}^{2}}\|f-g_{1,h}(f)\|_{C}\le\sup_{f\in\tilde{W}_{p}^{2}}\int_{-h}^{2h}|M_{\varepsilon}(t)|\cdot|f''(t)|dt\le\|M_{\varepsilon}\|_{q}\le F(q,z)^{\frac{1}{q}}\cdot h^{\frac{1+q}{q}},$$

где $F(q,z) = \dfrac{(8-z)^q\left((z-1)^{q+1}+1+2z\right)}{z(1+q)\cdot 4^{3q}}$, а $z=4(1+2\varepsilon)$ и $4\le z\le 8$.

Пусть $p=\infty$, тогда $q=1$ и $F(1;z)=\dfrac{(8-z)\cdot(z^2+2)}{128z}$. Так как $F'(1,z)=-\dfrac{(z-2)(z^2-2z-4)}{64z^2}<0$ для всех $z\in[4;8]$, то функция $F(1,z)$ монотонно убывает на отрезке $[4;8]$ и, следовательно,

$$\max_{4\le z\le 8} F(1,z)=F(1,4)=\frac{9}{64}.$$

Таким образом, $\sup\limits_{f\in\tilde{W}_\infty^2}\left\|f-g_{1,h}\right\|_C\le\left\|M_0\right\|_1=\dfrac{9}{64}h^2$.

Пусть теперь $p=3$, тогда $q=3/2$ и

$$F\left(\frac{3}{2},z\right)=\frac{\left(8-z\right)^{3/2}\left((z-1)^{5/2}+1+2z\right)}{1280z}.$$

Как и в предыдущем случае, вычисляя первую производную функции $F(3/2;z)$, непосредственным образом можно убедиться в том, что $F'(3/2;z)\le 0$ для $z\in[4;8]$, и, следовательно,

$$\max_{4\le z\le 8} F\left(\frac{3}{2},z\right)=F\left(\frac{3}{2},4\right)=\frac{9(\sqrt{3}+1)}{640},$$

$$\sup_{f\in\tilde{W}_3^2}\left\|f-g_{1,h}\right\|_C=\left\|M_0\right\|_{3/2}=\frac{9\left(\sqrt{3}+1\right)}{640}h^{5/3}.$$

Пусть теперь $p=2$, тогда $q=2$ и $F(2,z) = \dfrac{\left(8-z\right)^2(z^2-3z+5)}{12288}$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\max_{4\le z\le 8} F(2,z)=F\left(2,\frac{17}{4}\right)=\left(\frac{15}{1024}\right)^2\cdot 55.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in\tilde{W}_2^2}\left\|f-g_{1,h}(f)\right\|_C \le \max_{0\le\varepsilon\le 0,5}\left\|M_\varepsilon\right\|_2=\left\|M_{1/32}\right\|_2=\frac{15}{1024}\sqrt{55}\,h^{3/2}.$$

Пусть теперь, наконец, $p=1$, $q=\infty$. Тогда

$$\sup_{f\in\tilde{W}_1^2}\left\|f-g_{1,h}(f)\right\|_C \le \max_{0\le\varepsilon\le 0,5}\left\|M_\varepsilon\right\|_\infty=\left\|M_{1/16}\right\|_\infty=\frac{49}{256}\,h\,.$$

Выводы. На основании полученных результатов можно высказать предположение, что существует $p^*\in(2,3)$ такое, что для $p^*<p\le\infty$ уклонение ломаной $g_{1,h}(f,x)$ от функции $f\in\tilde{W}_p^2$ будет максимальным в середине отрезка разбиения, а для $1\le p\le p^*$ этот факт будет неверным.

Библиографические ссылки

1. **Лигун, А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых [Текст] / А.А. Лигун, А.А. Шумейко. – К., 1997. – 358 с.
2. **Holschneider, M**. Wavelets. An analysis Tool [Text] / M. Holschneider. – Oxford. Oxford University Press, 1995. – 203 p.
3. **Dubuc, S.** Interpolation through an Interactive Scheme [Text] / S. Dubuc // Journal of Math. An. and Appl. – 1986. – P. 185 – 204.
4. **Лигун, А. А.** Исследование линейных операторов, порожденных методами пополнения данных [Текст] / А. А. Лигун, А.А. Шумейко // Мат. моделювання. – 2000. – № 2(5). – С. 11 – 19.
5. **Корнейчук, Н.П.** Точные константы в теории приближения [Текст] / Н.П. Корнейчук – К., 1987. – 423 с.

Надійшла до редколегії 11.03.2016