

Н.И. Ободан, Н.А. Гук, А.С. Магас

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОБРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассмотрена обратная граничная задача теории бифуркаций нелинейной краевой задачи для уравнения Кармана. Сформулирован функционал, минимизация которого дает возможность определить сочетания минимальных значений жесткостей опорного контура, при которых реализуется особая точка решения. Установлены условия непрерывности решений для граничных задач, построен алгоритм решения задачи оптимизации. В результате численного эксперимента установлено существование минимальных значений каждой из жесткостей, независимых от значения остальных.

Розглянуто обернену граничну задачу теорії біфуркацій нелінійної крайової задачі для рівняння Кармана. Сформульовано функціонал, мінімізація якого дає можливість визначити сполучення мінімальних значень жорсткостей опорного контура, за яких реалізується особлива точка розв'язку. Встановлено умови безперервності розв'язків для граничних задач, побудовано алгоритм розв'язання задачі оптимізації. В результаті числового експерименту встановлено існування мінімальних значень кожної з жорсткостей, незалежних від значень інших.

Inverse boundary problem of bifurcation theory for nonlinear boundary problem for the Karman's equation is considered. Functional of inverse problem is formulated. Combination minimum values of boundary circuit rigidities, which are implemented at singular point solutions, are determined as a result of minimization the functional. Terms continuity solutions for boundary problems are set, an algorithm for solving the optimization problem is built. The existences of the minimum values of stiffness are established as a result of numerical experiment.

Ключевые слова: обратная задача, бифуркация, уравнения Кармана, обобщенное решение, минимальная жесткость опор.

Введение. Задача определения минимальной жесткости опорного контура в системах, описываемых нелинейным уравнением Кармана, когда при заданном значении правой части решение соответствующей краевой задачи находится в особой точке, является обратной задачей теории бифуркаций. В отличие от классической задачи на собственные значения, здесь собственными параметрами, определяющими особую точку, явля-

ются значения жесткости опорного контура, входящие в граничные условия для прямой и обратной задач.

Метод обратных задач в теории бифуркации достаточно представлен в научных исследованиях, особенно в биологических, химических и механических задачах [2–7; 9–11].

Здесь обычно рассматривается классическая постановка, аналогичная прямой задаче на собственные значения, когда параметр, собственное значение которого определяется, входит в разрешающие соотношения линейно [2]. В том случае, когда задача определения особой точки решения формулируется как оптимизационная [7; 10], основным требованием к функционалу качества является его выпуклость и непрерывность.

Для обеспечения указанных свойств необходимо, чтобы функции, описывающие прямую задачу, обладали специальными свойствами, т.к. в общем случае соответствующий функционал не является выпуклым и непрерывным.

Ниже рассматривается обратная задача теории бифуркации для нелинейного уравнения Кармана, в зависимости от характера граничных условий.

Постановка задачи. Рассматривается задача определения свойств системы, описываемой нелинейной моделью Кармана, характеризующихся условием

$$\int_{\Omega} K^T(x)K(x)d\Omega \Rightarrow \min, \underline{K} \leq K(x) \leq \bar{K}, \quad (1)$$

$$\text{при } L(\tilde{u}(x), \lambda F(x)) = 0, x \in \Omega, G(\tilde{u}, K(x)) = 0, x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\text{и } \tilde{L} = \text{grad}_{L_j}(\tilde{u}, \lambda F(x)) = 0, \text{ при } \tilde{u}(x) = u^*(x), K(x) = K^*(x), \lambda = \lambda^*, \quad (3)$$

где $\Omega \in R^2$ – область с границей $\Gamma \in C_1^2$, на которой рассматривается система, $\Omega: \{-L \leq x_1 \leq L, -\varphi \leq x_2 \leq \varphi, x = \{x_1, x_2\}\}$.

$K(x)$ – вектор-функция, характеризующая «жесткость» граничных условий; $L(\cdot)$ – нелинейный оператор Кармана; $\tilde{u}(x)$ – вектор неизвестных функций задачи; $F(x)$ – правая часть; λ – параметр; $\tilde{u}^*(x)$, $K^*(x)$, λ^* – значения функций $K(x)$ и $\tilde{u}(x)$, при которых реализуется особая точка (λ^*, \tilde{u}^*) .

Задача об определении вектор-функции $K(x)$, удовлетворяющей условиям (1), (2), (3), формулируется как обратная:

$$K(x) = \text{argmin}_K J(K), K \in \tilde{K}, \quad (4)$$

$$\text{где } J = \int K^T(x)K(x)d\Omega$$

при предварительном выполнении условий (2), (3), а также ограничений $K_i - \underline{K}_i \geq 0, \bar{K}_i - K_i \geq 0, i = 1, 2$.

Математическая модель. Введем множество корректности

$$\tilde{K} = \left\{ K, K \in C_T^2, \underline{K} \leq K \leq \bar{K}, \underline{c} \leq \frac{dK}{dU} \leq \bar{c}, \text{sign} \underline{c} = \text{sign} \bar{c} \right\}, \quad (5)$$

и на области Ω рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv A_1^{ijkl} \nabla_{ij} \nabla_{kl} \tilde{u}_1 - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} \tilde{u}_2 (B_{ij} + \nabla_{ij} \tilde{u}_1) - \lambda F(x_1, x_2) = 0, \\ L_2 &\equiv A_2^{ijkl} \nabla_{ij} \nabla_{kl} \tilde{u}_2 + 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} \tilde{u}_1 (B_{ij} + \nabla_{ij} \tilde{u}_1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

при следующих типах граничных условий на Γ_l :

- 1) $\tilde{u}_l = u_l^*$, $\nabla_i \tilde{u}_l = \theta_i^*$ на Γ_l , $i=1,2$, $l=i$;
- 2) $\tilde{u}_l = u_l^*$, на Γ_l , $i=1,2$, $l=i+2$;
- 3) $\nabla_i \tilde{u}_l = \theta_i^*$, на Γ_l , $i=1,2$, $l=i+4$;
- 4) $\nabla_{ii} \tilde{u}_l = K_1(x) \nabla_i \tilde{u}_l$, $\nabla_{ii} (\nabla_i \tilde{u})_l = K_2(x) \tilde{u}_l$ на Γ_l , $i=1,2$, $l=i+6$
при $\tilde{u}_2 = 0$, $\nabla_i \tilde{u}_2 = 0$, $i=1,2$.

Здесь $\tilde{u} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}^T$; $K(x) = \{K_1(x), K_2(x)\}^T$; $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$,

$$\nabla_{kp} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_p}, \quad k, p = 1, 2.$$

Примем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Соответствующее краевой задаче (6), (7) обобщенное решение имеет вид

$$(\tilde{u}_1 \cdot \varphi_1)_{V_{1\Omega}} = - \left(u_1 \cdot \varphi_1 \right)_{V_{1\Omega}} + \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left[B_{ij} \varphi_1 - \nabla_i \varphi_1 \nabla_j (u_1^* + \tilde{u}_1) \right] \nabla_{kl} \tilde{u}_2 d\Omega, \quad (8)$$

$$(\tilde{u}_2 \cdot \varphi_2)_{V_{2\Omega}} = - \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left[(\tilde{u}_1 + u_1^*) B_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_i (\tilde{u}_1 + u_1^*) \nabla_j (\tilde{u}_1 + u_1^*) \right] \nabla_{kl} \varphi_2.$$

где пространства $V_{1\Omega}$, $V_{2\Omega}$ вводятся скалярными произведениями

$$(\tilde{u}_1, \varphi_1)_{V_{1\Omega}} = \int_{\Omega} A_1^{ijkl} \nabla_{ij} \tilde{u}_1 \nabla_{kl} \varphi_1 d\Omega + \int_{\Gamma_1} K_1 \tilde{u}_1 \varphi_1 dS + \int_{\Gamma_1} K_2 \nabla_i \tilde{u}_1 \nabla_j \varphi_1 dS, \quad (9)$$

$$(\tilde{u}_2, \varphi_2)_{V_{2\Omega}} = \int_{\Omega} A_2^{ijkl} \nabla_{ij} \tilde{u}_1 \nabla_{kl} \varphi_2 d\Omega$$

и нормами

$$\|\tilde{u}_1\|_{V_{1\Omega}}^2 = \int_{\Omega} A_1^{ijkl} \nabla_{ij} \tilde{u}_1 \nabla_{kl} \tilde{u}_1 d\Omega + \int_{\Gamma} K_1 \tilde{u}_1^2 dS + \int_{\Gamma} K_2 \nabla_i \tilde{u}_1 \nabla_j \tilde{u}_1 dS,$$

$$\|\tilde{u}_2\|_{V_{2\Omega}}^2 = \int_{\Omega} A_2^{ijkl} \nabla_{ij} \tilde{u}_2 \nabla_{kl} \tilde{u}_2 d\Omega$$

соответственно.

Здесь введена замена

$$\tilde{u}_1 \sim u_1^* + \tilde{u}_1,$$

$$u_1^* = u_1^0 + u_{\Pi}, \quad \tilde{u}_2 \sim \tilde{u}_2,$$

где u_1^0 функция, удовлетворяющая условию (7), а u_{Π} дается условием

$$(u_{\Pi} \cdot \varphi_1)_{V_{1\Omega}} = \lambda \int F(x) \varphi_1 d\Omega.$$

Допустимые граничные значения функций u^0 и $\nabla_i u^0$, $i=1,2$ определим из условия, что заданные функции u_i^* и $\theta^* = \{\theta_i^*\}$, $i=1,2$ могут быть продолжены внутрь области Ω как функции из $W_{2\Omega}^{(2)}$, $W_{2\Omega}^{(1)}$. Для этого введём пространства $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ и $W_{2\Gamma}^{(1/2)}$, определяемые как замыкание множества $u \in C_{\Gamma}^2(C_{\Gamma}^1)$ в соответствующей норме [1]. Тогда необходимо $u^* \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ и $\theta^* \in W_{2\Gamma}^{(1/2)}$, здесь $W_{2\Omega}^{(2)}$, $W_{2\Omega}^{(1)}$ – пространства Соболева.

При этом [1]

$$\|u^0\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \leq m \left(\|u^*\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}} + \|\theta^*\|_{W_{2\Gamma}^{(1/2)}} \right).$$

По теореме Рисса из соотношений (8) следует

$$\tilde{u}_1 = G_1(\tilde{u}_1, u_1^*), \quad \tilde{u}_2 = G_2(\tilde{u}_1, u_1^*),$$

при этом

$$\begin{aligned} \left(G_1(\tilde{u}_1, u_1^*) \cdot \varphi_1 \right)_{V_{1\Omega}} &= - \left(u_1 \cdot \varphi_1 \right)_{V_{1\Omega}}^0 + \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left[B_{ij} \varphi_1 - \right. \\ &\quad \left. - \nabla_i \varphi_j \nabla_j (u_1^* + \tilde{u}_1) \right] \nabla_{kl} \tilde{u}_2 d\Omega, \\ \left(G_2(\tilde{u}_1, u_1^*) \cdot \varphi_2 \right)_{V_{2\Omega}} &= - \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left[(\tilde{u}_1 + u_1^*) B_{ij} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \nabla_i (\tilde{u}_1 + u_1^*) \nabla_j (\tilde{u}_1 + u_1^*) \right] \nabla_{kl} \varphi_2 d\Omega. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что пространства $V_{1\Omega}$, $V_{2\Omega}$ и $W_{2\Omega}^{(2)}$, $W_{2\Omega}^{(1)}$ эквивалентны [1].

Покажем, что операторы $G_1(\tilde{u}_1, u_1^*)$, $G_2(\tilde{u}_1, u_1^*)$ усиленно непрерывны в $V_{1\Omega}$, $V_{2\Omega}$ соответственно по u^0 . Пусть $u_{1n}^0 \rightarrow u_1^0$ в $V_{1\Omega}$.

Тогда из $u_{\Pi n} \Rightarrow u_{\Pi}$ в $V_{1\Omega}$ следует $u_{1n}^* \rightarrow u_1^*$ в $V_{1\Omega}$.

Из равенства (10) имеем

$$\begin{aligned} & \left(G_2(\tilde{u}_1, u_1^*) - G_2(u_1^*(\tilde{u}_1, u_{1n}^*)) \cdot \Phi_2 \right)_{V_{2\Omega}} = \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left\{ B_{ij}(u_1^* - u_{1n}^*) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left[\nabla_i u_1^* \nabla_j u_1 + \nabla_i u_1 \nabla_j u_1^* - \nabla_i u_{1n}^* \nabla_j u_1 - \right. \\ & \left. \left. - \nabla_i u_1 \nabla_j u_{1n}^* + \nabla_i u_1^* \nabla_j u_1^* - \nabla_i u_{1n}^* \nabla_j u_{1n}^* \right] \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

В силу теорем вложения

$$\nabla_i(u_{1n}^*) \rightarrow \nabla_i(u_1^*) \text{ в любом } L_{q\Omega}, \quad q > 1.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \left\| G_2(\tilde{u}_1, u_1^*) - G_2(\tilde{u}_1, u_{1n}^*) \right\|_{V_{2\Omega}} \leq m \left\{ \left\| 1^{ik} 1^{jl} B_{ij} \right\|_{C\Omega} \left\| u_1^* - u_{1n}^* \right\|_{L_1\Omega} + \right. \\ & + \left\| 1^{ik} 1^{jl} \right\|_{C\Omega} \left[\left\| \nabla_j(u_1^* - u_{1n}^*) \right\|_{L_{4\Omega}} \left\| \nabla_i u_1 \right\|_{L_{4\Omega}} + \left\| \nabla_i u_1^* \nabla_j u_1^* - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nabla_i u_{1n}^* \nabla_j u_{1n}^* \right\|_{L_{2\Omega}} \left\| \Phi_2 \right\|_{V_{2\Omega}} \right], \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \left\| G_2(\tilde{u}_1, u_1^*) - G_2(\tilde{u}_1, u_{1n}^*) \right\|_{V_{2\Omega}} \Rightarrow 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\left\| G_1(\tilde{u}_1, u_1^*) - G_1(\tilde{u}_1, u_{1n}^*) \right\|_{V_{1\Omega}} \Rightarrow 0.$$

Таким образом, операторы $G_1(\tilde{u}_1, u_1^*)$, $G_2(\tilde{u}_1, u_{1n}^*)$ усиленно непрерывны в $V_{1\Omega}$ и $V_{2\Omega}$ соответственно.

Зададим $\tilde{u} = u_0 + u$, где u_0 – решение задачи (6), (7), тогда условие, определяющее точку ветвления, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1 &= A_1^{ijkl} (\nabla_{ij} \nabla_{kl} u_1) = \left\{ 1^{ik} 1^{jl} \left[\nabla_{kl} u_2 (B_{ij} + \nabla_{ij} u_1^0) + \nabla_{kl} u_2^0 \nabla_{ij} u_1 \right] \right\} = 0; \\ \tilde{L}_2 &= A_2^{ijkl} (\nabla_{ij} \nabla_{kl} u_2) = \left\{ 1^{ik} 1^{jl} \left[\nabla_{kl} u_1 (B_{ij} + \nabla_{ij} u_1^0) \right] \right\} = 0 \end{aligned};$$

при $u = \{u_1, u_2\}^T \neq 0$, $B_{ij} = \text{const}$, $i, j, k, l = 1, 2$.

Граничные условия для задачи $\tilde{L} = 0$, $\tilde{L} = \{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2\}^T$ имеют вид, аналогичный (7) при нулевых значениях u_1^*, θ_i^* .

Соответствующее обобщённое решение имеет вид

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{V_{\Omega}^1} &= \int 1^{ik} 1^{jl} \left[(B_{ij} v_1 - \nabla_i v_1 \nabla_j u_1^0) \nabla_{kl} u_2 - \nabla_i v_1 \nabla_j u_1 \nabla_{kl} u_2^0 \right] d\Omega; \\ (u_2, v_2)_{V_{\Omega}^2} &= - \int 1^{ik} 1^{jl} \left[(B_{ij} u_1 - \nabla_i u_1^0 (\lambda) \nabla_j u_1) \right] \nabla_{kl} v_2 d\Omega, \quad u \neq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где пространства $V_{1\Omega}$, $V_{2\Omega}$ со скалярным произведением и нормой соответственно определены как (9).

Необходимо отметить, что вектор-функция $K(X)$ входит в обобщенное решение как через функцию $u_0(K)$, так и через граничные условия (7).

Аналогично изложенному выше можно показать, что операторы $\tilde{G}_1(u_1, u_0)$ и $\tilde{G}_2(u_1, u_0)$, определяемые в соответствии с теоремой Рисса из обобщенного решения (11) как

$$u_2 = \tilde{G}_2(u_1, u_0), \quad u_1 = \tilde{G}_1(u_1, u_0),$$

усиленно непрерывны по переменной u_0 , удовлетворяющей условиям (7).

Из непрерывности операторов $\tilde{G}_1(u_1, u_0)$ и $\tilde{G}_2(u_1, u_0)$ по $u^0(K(x))$ следует непрерывность обобщенного решения (11) по $K(x)$.

Метод решения. Задача (2), (3), (4), (7) сводится к конечномерной путем ее дискретизации методом конечных элементов. Решение указанной задачи описывается векторами

$$U^0 = \{U_{0k}\}^T, \quad k = \overline{1, M}, \quad U = \{U_j\}^T, \quad j = \overline{1, M}, \quad K_i = \{K_{ip}\}^T, \quad p = \overline{1, P}, \quad K = \{K_i\}^T,$$

где U_{ok} , U_j , K_{ip} – узловые значения функций u_0 , u , K_i на соответствующих сетках. Процедура метода конечных элементов сводит задачу определения обобщенных решений u_0, u к совместному решению двух систем уравнений: нелинейной алгебраической системы

$$Q_1(U_0, K) = \lambda R, \quad (12)$$

где $Q_1(U_0, K)$ – нелинейная матрица, λR – проекция правой части, и линейной однородной

$$Q_2(U_0, K)U = 0, \quad U \neq 0. \quad (13)$$

Условием существования решения $U \neq 0$ является

$$\Delta = \det Q_2(U_0, K) = 0. \quad (14)$$

Вследствие непрерывности обобщенного решения (11) по K функция $\Delta(K)$ является непрерывной.

Так как для решения уравнений (12) используем метод продолжения по параметру (λ или U_{0k}), то на каждом r -м шаге указанного метода вычислим

$$\Delta U_0^{(r)} = -\bar{Q}_1 \left(U_{0,(r-1)}^{(n-1)}(\lambda) \right)^{-1} \cdot \Delta \bar{R}_r, \quad (15)$$

при этом

$$\bar{Q}_1 \left(U_0^{(n-1)}(\lambda), \lambda^* \right) = Q_2 \left(U_0^{(n-1)}(\lambda), \lambda^* \right), \quad (16)$$

где \bar{Q}_1 – матрица Фреше для функциональной матрицы Q_1 ; ΔR_r – приращение правой части на шаге r .

При реализации метода продолжения по параметру U_{0k} (при $\lambda \rightarrow \lambda^*$) матрица $\bar{Q}_1 \left(U_0^{(n-1)} \right)$ в уравнении (15) заменим матрицей $\tilde{Q}_1 \left(U_0^{(n-1)} \right)$, при построении которой в векторе $U_0^{(n-1)}$ исключим компоненту U_{0k} и включим компоненту $\lambda^{(n-1)}$, а в матрице $\bar{Q}_1 \left(U_0^{(n-1)} \right)$ столбец $\frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial U_{0k}}$ заменим столбцом $\frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \lambda}$. Таким образом, на каждом шаге по параметру можем вычислить значение $\det Q_2^{(n)}(U_0) = \det \bar{Q}_1^{(n)}(U_0)$.

Использование такого подхода при определении вектора U_0 в зависимости от параметра λ обеспечивает его непрерывность, т.к. особая точка решения всегда имеет характер предельной [8].

Введём характеристические функции μ_{1ip} , μ_{2ip}

$$\mu_{1ip} = \begin{cases} 1 & \text{если } (K_{ip} - \underline{K}_i) \leq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}, \quad (17)$$

$$\mu_{2ip} = \begin{cases} 1 & \text{если } (\bar{K}_i - K_{ip}) \leq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Присоединим предварительные условия для функционала (4) к указанному функционалу, записанному в дискретной форме

$$K = \operatorname{argmin}_K \bar{J}(U_0, U, K), \quad K \in \tilde{K}, \quad (18)$$

где $\bar{J} = K^T K + \psi \Delta(K) + \sum_{i,p} \left(\varphi_{1ip} (K_{ip} - \underline{K}_i)^2 \mu_{1ip} + \varphi_{2ip} (\bar{K}_i - K_{ip})^2 \mu_{2ip} \right)$.

Разрешающая система уравнений для определения $K \in \tilde{K}$, удовлетворяющего условию (1), имеет вид

$$2K_{ip} + \psi \frac{\partial \Delta}{\partial K_{ip}} + 2\varphi_{1ip} \Delta_{1ip} \mu_{1ip} + 2\varphi_{2ip} \Delta_{2ip} \mu_{2ip} = 0, \quad (19)$$

$$\Delta|_{U(K)=U_0} = 0, \quad \mu_{1ip} \Delta_{1ip} \geq 0, \quad \mu_{2ip} \Delta_{2ip} \geq 0$$

при $\Delta_{1ip} = (K_{ip} - \underline{K}_i)$, $\Delta_{2ip} = (\bar{K}_i - K_{ip})$, $i = 1, 2$, $p = \overline{1, P}$.

Для определения множителей φ_{ip} используем метод градиентного спуска:

$$\varphi_{kip}^{(n)} = \varphi_{kip}^{(n-1)} - \xi^{(n-1)} \frac{\partial J(\varphi^{(n-1)})}{\partial \varphi_{kip}}, \quad i = 1, 2, \quad p = \overline{1, P}, \quad (20)$$

где $\xi^{(n-1)} = \arg \min_{\xi} J(\varphi^{(n)})$.

Здесь $\varphi^{(n)} = \{\varphi_k^{(n)}\}$, $\varphi_k^{(n)} = \{\varphi_{ki}^{(n)}\}$, $\varphi_{ki}^{(n)} = \{\varphi_{kip}^{(n)}\}$, $k, i = 1, 2$, $p = \overline{1, P}$.

Если представить $\{K_{ip}, i = 1, 2; p = \overline{1, P}\}$ в виде $K_{ip} = K_0 \cdot k_{ip}$, $k_{11} = 1$, $K_0 \geq 0$, то значения $\psi^{(n)}$, $k_{ip}^{(n)}$, $\mu_{kip}^{(n)}$, $K_0^{(n)}$ можно определить из уравнений (19) при $k_{11} = 1$.

Решение задачи (19) можно получить в результате итеративного процесса:

1. Задим $k_{11} = 1$, $\xi^{(1)} = \xi^*$, $\Delta \xi$, λ^* , $K_0^{(0)}$, $n = 1$, $k_{ip}^{(0)} = 1$, $\varphi_{ip}^{(0)} = 0$, $k, i = 1, 2$, $p = \overline{1, P}$, малое число ε .
2. Определим параметр $\psi^{(n)}$ из первых $(i \times p)$ уравнений (19) при $i = 1$, $p = 1$, $K_0^{(n-1)}$.
3. Определим параметры $k_{ip}^{(n)}$ из $(i \times p)$ уравнений (19) при $K_0^{(n-1)}$, $\varphi_{kip}^{(n-1)}$ $i = 1, 2$, $p = \overline{2, P}$, $i = 2$, $p = 1$.
4. Определим значение $K_0^{(n)}$ из условия $\Delta^{(n)} = 0$.
5. Определим значение $\Delta_{kip}^{(n)}$, $\mu_{kip}^{(n)}$, $k, i = 1, 2$, $p = \overline{1, P}$.

6. Определим множители $\varphi_{kip}^{(n)}$ по формуле (20).

7. Найдем $\xi^{(n-1)} = \arg \min_{\xi} J(\varphi^{(n)})$.

8. Повторим с пункта 2 пока

$$\left\| J(\varphi^{(n)}, k_{ip}^{(n)}, K_0^{(n)}) - J(\varphi^{(n-1)}, k_{ip}^{(n-1)}, K_0^{(n-1)}) \right\| > \varepsilon.$$

Численный пример. С помощью изложенного алгоритма были определены функции $K_i(x)$, $i=1,2$, соответствующих условию (1) при различных значениях λ^* , для цилиндрической панели с параметрами $L/R=3$, $R/h=200$, $\varphi=120^\circ$, $A_1^{1111} = Eh^3/12(1-\mu^2)$, $A_2^{1111} = 12(1-\mu^2)/Eh$, где L , R , h φ – длина, радиус, толщина, угол раствора панели; E , μ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, $E = 2 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 0.3$.

Панель находится под действием равномерного внешнего давления, на криволинейных краях панели реализованы условия жесткого защемления, на продольных краях реализован 4-й тип опирания (7). Функции $K_i(x)$ $i=1,2$ ограничены в соответствии с условием (1), $\underline{K}_1 = 0.3$, $\overline{K}_1 = 1.3$, $\underline{K}_2 = 0$, $\overline{K}_2 = 0.12$.

На рис. 1 приведена зависимость $\lambda^*(K_i)$, где значение K_i – отнесено к его максимальному значению при выполнении граничных условий (7) п.1).

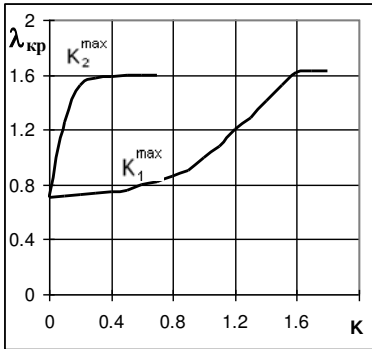


Рис. 1. Зависимость значений λ^* от значений параметров жесткости K_i

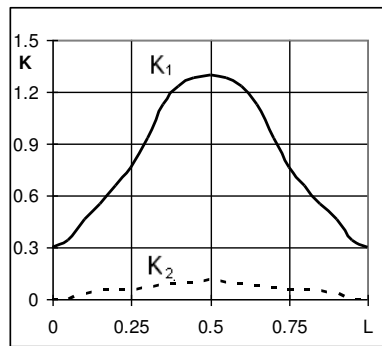


Рис. 2. Распределение функций жёсткости $K_1(x)$, $K_2(x)$ вдоль кромки панели

На рис. 2 приведені розподілення функцій $K_1(x)$, $K_2(x)$ по довжині кромки панелі, що відповідають граничним умовам (7) п.1), при значенні $\lambda^* = 1.3$. Тут значення λ^* віднесено до величини $\lambda_0 = \frac{9,2A^{1111}}{LR\sqrt{Rh}}$.

Висновки. Задача про визначення мінімальної жорсткості граничних умов для рівнянь Кармана, при розв'язанні якої реалізується особа точка при фіксованій правій частині, може бути розв'язана як обернена задача з використанням множини коректності для можливих розв'язків.

Показано, що розв'язуючі оператори задачі Кармана неперервні по функціям, описуваним граничними умовами, при виконанні умови приналежності їх до спеціальних функціональних просторів. Розроблено ітераційний алгоритм визначення функцій мінімальної жорсткості.

Показано, що для розв'язків поставленої задачі з множини коректності може бути побудована залежність функцій, описуваних жорсткістю граничних умов, від значення параметра правої частини, що відповідає особій точці.

Аналіз результатів показав, що при робастному проектуванні розглядаваних систем з точки зору можливості їх біфуркації необхідно враховувати зниження «жорсткості» граничних умов, визначаючи їх можливі мінімальні значення для заданої правої частини.

Бібліографічні посилання

1. **Ворович, І.І.** Математичні проблеми нелинійної теорії пологих оболонок [Текст] / І.І. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
2. **Литвинов, В.Г.** Оптимізація в еліптичних граничних задачах з приложеннями в механіці [Текст] / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
3. **Gaikovich, К.Р.** Inverse Problems in Physical Diagnostics [Text]/ К.Р. Gaikovich – Nova Science Publishers, 2004. – 372 p.
4. **Kamimura, Y.** An inverse problem in bifurcation theory, III [Text] / Y. Kamimura // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1995. – Vol. 123, № 10. – P. 89–110.
5. **Koepl, H.** From Specification to Parameters: A Linearization Approach [Text] / H. Koepl, M. Hafner, J. Lu // A Systems Theoretic Approach to Systems and Synthetic Biology II: Analysis and Design of Cellular Systems. – 2014. – P. 245–256.
6. **Lu, J.** Inverse problems from biomedicine: inference of putative disease mechanisms and robust therapeutic strategies [Text] / J. Lu, E. August, H. Koepl // J Math Biol. – 2013. – 67(1). – P. 143–68.

7. **Lu, J.** Inverse bifurcation analysis: application to simple gene systems [Text] / J. Lu, H.W. Engl, P. Schuster // *Algorithms for Molecular Biology*. – 2006. – 1:11.
8. **Obodan, N.I.** Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells [Text] / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov. – Springer, 2013. – 179 p.
9. **Otero-Muras, I.** A method for inverse bifurcation of biochemical switches: inferring parameters from dose response curves [Text] / I. Otero-Muras, P. Yordanov, J. Stelling // *BMC Systems Biology*. – 2014. – 8:114.
10. **Plesa, T.** Chemical Reaction Systems with a Homoclinic Bifurcation: an Inverse Problem [Text] / T. Plesa, T. Vejchodský R. Erban // Cornell University Library. – 2015. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1510.07205>. – Загл. с экрана.
11. **Shibata, T.** Inverse and direct bifurcation problems [Text] / T. Shibata T. // Graduate School of Engineering, Hiroshima University. – 2014. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1959-05.pdf>. – Загл. с экрана.

Надійшла до редколегії 05.04.2016