Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д., 2016

УДК 519.8 doi:10.15421/321615

В.А. Турчина, Н.О. Гранкіна
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗВЕДЕННЯ ДВОХКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ ДО ОДНОКРИТЕРІАЛЬНИХ

Розглянуто нову двохкритеріальну задачу паралельного упорядкування вершин графа та побудовано її математичну модель. Для запропонованої задачі розглянуто метод її розв'язання, заснований на виділенні основного критерію, та наведено результати його роботи.

Рассмотрена новая двухкритериальная задача параллельного упорядочения вершин графа и построена ее математическая модель. Для предложенной задачи рассмотрен метод ее решения, основанный на выделении основного критерия, и приведены результаты его работы.

The paper deals with a new parallel sequencing and assembly line problem with two criteria. The mathematical model for the problem was built, and solution based on the allocation of the main criteria was described.

Ключові слова: задача паралельного упорядкування, багатокритеріальна оптимізація, теорія прийняття рішень, оптимізаційні задачі на графах.

Вступ

Розв’язування задач оптимізації – галузь, в якій кваліфіковане застосування ЕОМ може принести істотні результати. В теперішній час наявні всі передумови до розширення спектра робіт з постановки та розв’язання задач оптимізації в різних сферах людського життя: виробництві, соціології, статистиці, аналізі даних, економіці, політології, будівництві, медицині, біології та ін. Поступово розширюються спектр і можливості програмного забезпечення, що створює нові резерви підвищення рівня економії і якості.

У дискретній оптимізації актуальними є прикладні задачі, що зводяться до побудови розкладу для деякої множини частково впорядкованих робіт. Це, наприклад, задача розпаралелювання обчислень, задача розподілення завдань між робітниками і т.д. [1]. Ці задачі мають назву задач паралельного упорядкування. Уперше були сформульовані як оптимізаційні задачі на графах в [1]. Задачі паралельного упорядкування цікаві як з практичного погляду, так і з теоретичного як оптимізаційні задачі на графах.

Задачі паралельного упорядкування являють собою NP-складні задачі [2], тобто для них вірною є гіпотеза, що не існує алгоритму знаходження точного рішення цих задач, що має поліноміальну складність. Під час розв'язування практичних задач, що належать до класу NP-складних, найчастіше досить знайти наближений розв'язок задачі в загальному чи окремих випадках, класичним способом одержання якого є розбиття задачі на підзадачі, кожну з яких можна розв'язати точно, та об'єднання розв'язків для одержання загального розв'язку задачі.

Для однокритеріальних задач паралельного упорядкування існують точні методи експоненційної складності, зокрема метод гілок і меж, метод зведення задачі до задачі цілочислового програмування та задачі в мережній постановці.

Класичні задачі паралельного упорядкування – це дискретні задачі однокритеріальної оптимізації. В одній із класичних постановок задачі необхідно мінімізувати час виконання робіт. Але у разі моделювання ряду прикладних задач паралельного упорядкування буває недостатньо оптимізувати лише час виконання. В деяких задачах виникає необхідність мінімізувати перерву між виконанням робіт, які слідують одна за одною, тобто час від закінчення однієї роботи до початку іншої, яка безпосередньо за нею слідує.

Беручи до уваги описану додаткову вимогу, у роботі запропоновано постановку двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування, яка має практичний інтерес та ґрунтується на теорії класичних однокритеріальних задач паралельного упорядкування та теорії багатокритеріальної оптимізації. Майже кожна складна практична задача прийняття рішення (як індивідуального, так і групового) є багатокритеріальна. Зважаючи на це, теорія прийняття рішень за наявності багатьох критеріїв, що зараз швидко розвивається, набуває особливого значення.

Метою дослідження є розробка методу розв'язання запропонованої двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування та аналіз його роботи.

Постановка задачі

Велику кількість задач планування та упорядкування можна сформулювати таким чином [1]. Нехай ми маємо n робіт, для кожної з яких ми знаємо точний час її виконання та технологічні особливості, які накладають обмеження на порядок виконання цих робіт. Тоді перед нами постає наступна задача.

Припустимо, що ми маємо h робітників, які здатні з однаковою якістю та за один і той самий час виконати будь-яку з n робіт. При цьому ми вважаємо, що всі роботи потребують однакової кількості часу на виконання і що робітник може приступати до виконання наступної роботи одразу ж після закінчення попередньої. Задача полягає в складанні такої послідовності виконання робіт, яка б враховувала необхідний порядок виконання та за якої всі роботи були б виконані у найкоротший термін.

Ця задача має назву задачі паралельного упорядкування, до того ж вона широко відома в теорії розкладів. Задача являє собою дискретну однокритеріальну задачу оптимізації.

З урахуванням вимоги мінімізації перерви між виконанням робіт ми отримуємо багатокритеріальну задачу паралельного упорядкування, що полягає в складанні такої послідовності виконання робіт, за якої мінімізуються час виконання всіх робіт та перерви між роботами, за особливостями технологічного процесу яких вони повинні слідувати одна за одною.

Розглянемо математичну модель запропонованої задачі.

Розглянемо двохкритеріальну задачу паралельного упорядкування $S(G,h,(l,m))$, де $G=\{V,U\}$ – заданий орієнтований граф, V – множина його вершин, U – множина дуг. Множина вершин V графа G відповідає роботам, які необхідно виконати, їх кількість дорівнює n, а множина дуг U графа G відповідає технологічним обмеженням на порядок виконання робіт: між вершинами i та j існує дуга, якщо до виконання роботи j можна приступати тільки після виконання роботи i, h – ширина упорядкування, яка дорівнює кількості робітників. l – це класичний критерій однокритеріальної задачі паралельного упорядкування – довжина упорядкування, який необхідно мінімізувати, m – запропонований додатковий критерій – максимальна перерва між роботами, що слідують одна за одною, який формулюють у такому вигляді:

$$\max_{(i,j)\in U} d_{ij} \to \min, \tag{1}$$

де d_{ij} – абсолютна різниця між місцями вершин i та j в побудованому паралельному упорядкуванні. Іншими словами, у запропонованій задачі другий критерій – це максимальне значення відстані між місцями вершин в упорядкуванні, знайдене по всіх парах вершин, між якими існує дуга в графі G; значення цього критерію необхідно мінімізувати.

Отже, запропонована двохкритеріальна задача паралельного упорядкування полягає в мінімізації векторного критерію f:

$$f=(f_1;f_2)\to \min, \tag{2}$$

де f_1 – довжина паралельного упорядкування, f_2 – максимальне значення відстані між місцями вершин в упорядкуванні, знайдене по всіх парах вершин, між якими існує дуга в графі G – за формулою (1).

Метод, заснований на виділенні основного критерію

Для розв'язання поставленої двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування вершин графа запропоновано метод, заснований на виділенні основного критерію. Розглянемо його ідею детальніше.

Метод головного критерію полягає в оптимізації основного часткового критерію. Відокремимо як основний другий критерій, який являє собою максимальну перерву між роботами, що слідують одна за одною, тобто у термінах задачі паралельного упорядкування максимальне значення відстані між місцями вершин в упорядкуванні знайдене по всіх парах вершин, між якими існують дуги в графі G. Цей критерій візьмемо за основний або виключно важливий, на його основі будемо реалізовувати процедури оптимізації. Для другого критерію задамо гранично допустиме значення: будемо вимагати, щоб довжина упорядкування не перевищувала величини

$$L = \max\left(\underline{l}, \left] \frac{|V|}{h} \right[\right) + \tilde{k}, \qquad (3)$$

де $\underline{l}$ – довжина критичного шляху в графі, розрахована за дугами, $\tilde{k}$ – ціле додатне число, обране з практичних міркувань залежно від графа G.

Отже, замість вихідної двохкритеріальної задачі оптимізації у форматі даного підходу розв'язуємо скалярну задачу оптимізації однієї функції (обраного основного часткового критерію) з побудованими обмеженнями.

Нехай $G = \{V, U\}$ – заданий ациклічний граф. Будемо будувати паралельне упорядкування таким чином. Вважатимемо всі місця в шуканому упорядкуванні порожніми. На кожному кроці в графі G шукаємо множину вершин I, що не мають вхідних дуг. Якщо їх кількість не перевищує заданої ширини упорядкування, то ставимо ці вершини на місце в упорядкуванні, що відповідає кроку алгоритму, на якому ми перебуваємо. Якщо ж їх кількість перевищує ширину упорядкування, то для кожної з цих вершин оцінюємо значення довжини за умови видалення розглядуваної вершини з графа G разом з її вихідними дугами. Нехай G – множина вершин з I, для яких оцінка довжини перевищує L. Видаляємо з розгляду на поточному кроці $\min(|I| - h, |K|)$ вершин з найбільшим значенням оцінки довжини. Кожній з вершин, що залишаються у розгляді, присвоюємо помітку, яка будується на основі місць вершин, з яких виходить дуга у вершину, що розглядається, у вже побудованій частині упорядкування, та місць вершин, з яких виходять дуги у вершини, до яких також виходять дуги з вершини, що розглядається, у вже побудованій частині упорядкування. Розташовуємо вершини у порядку незростання значення їх поміток та ставимо перші h вершин на місце в упорядкуванні, що відповідає кроку алгоритму, на якому ми перебуваємо. Якщо всі вершини розподілено, то упорядкування побудовано. Інакше видаляємо з графа обрані вершини та переходимо на наступний крок.

Результати роботи методу, заснованого на виділенні основного критерію

Розглянемо результати застосування методу, заснованого на виділенні основного критерію до деяких двохкритеріальних задач паралельного упорядкування.

Розглянемо задачу (2) для графа, що має 8 вершин та 7 дуг (рис. 1).

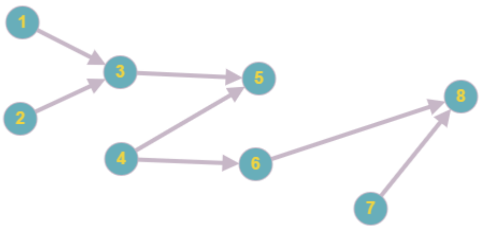

Рис. 1. Приклад графа

Для $h = 2$ паралельне упорядкування, побудоване за методом, заснованим на виділенні основного критерію, має вигляд $< \begin{matrix}1\\2\end{matrix}, \begin{matrix}3\\4\end{matrix}, \begin{matrix}5\\6\end{matrix}, 7, 8 >$, а значення критеріїв для нього такі: $l = 5, m = 2$.

Для $h = 3$ паралельне упорядкування, побудоване за методом, заснованим на виділенні основного критерію, має вигляд $< \begin{matrix}1\\2\\4\end{matrix}, \begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}, \begin{matrix}5\\8\end{matrix} >$, а значення критеріїв для нього наступні: $l = 3, m = 2$.

Отже, для графа, зображеного на рис. 1, за $h = 2$ та $h = 3$ метод дає паралельні упорядкування, що належать до множини ефективних рішень.

Розглянемо також задачу (2) для графа, що має 15 вершин та 19 дуг (рис. 2).

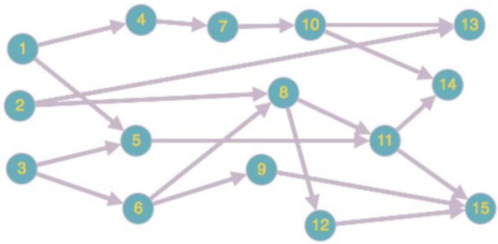

Рис. 2. Приклад графа

Для $h=2$ паралельне упорядкування, побудоване за методом, заснованим на виділенні основного критерію, має вигляд $< \begin{matrix}1\\2\end{matrix}, \begin{matrix}3\\4\end{matrix}, \begin{matrix}5\\6\end{matrix}, \begin{matrix}7\\8\end{matrix}, \begin{matrix}9\\10\end{matrix}, \begin{matrix}11\\13\end{matrix}, \begin{matrix}12\\14\end{matrix}, 15 >$, а значення критеріїв для нього наступні: $l=8, m=5$.

Для $h=3$ паралельне упорядкування, побудоване за методом, заснованим на виділенні основного критерію, має вигляд $< \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}, \begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}, \begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix}, \begin{matrix}10\\11\\12\end{matrix}, \begin{matrix}13\\14\\15\end{matrix} >$, а значення критеріїв для нього наступні: $l=5, m=4$.

Аналогічно, для графа, зображеного на рис. 2, за $h=2$ та $h=3$ метод дає паралельні упорядкування, що належать до множини ефективних рішень.

Висновок

У роботі запропоновано нову двохкритеріальну задачу паралельного упорядкування, що потребує оптимізації двох критеріїв – довжини упорядкування та перерви між виконанням робіт, які слідують одна за одною, тобто часу, що проходить після закінчення однієї роботи до початку іншої, яка безпосередньо за нею слідує, та побудовано її математичну модель.

Для розв'язання поставленої задачі було запропоновано метод, заснований на виділенні основного критерію. На основі результатів обчислювальних експериментів можна зробити висновок, що запропонований метод є доцільний для сформульованої двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування.

Метод, заснований на виділенні основного критерію, може спричиняти неефективне рішення у випадку, коли на першому кроці кількість вершин, що не мають вхідних дуг, більша за ширину упорядкування, яке нам необхідно побудувати, та коли серед цих вершин є такі, з яких виходять дуги до вершин, що стоять близько до кінця критичного шляху графа. Оскільки на першому кроці всі вершини мають нульові помітки, то ми обираємо вершини на перше місце випадковим чином. Отже, такий вибір може призвести до необґрунтованого збільшення значення другого критерію.

Бібліографічні посилання

1. **Hu, T.** Parallel sequencing and assembly line problems [Text] / T. Hu // Operation research. – 1961. – Vol. 9, № 6. – P. 841–848.
2. Теория расписаний и вычислительные машины [Текст] / под ред. Э. Коффмана. – М.: Наука, 1984. – 334 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2016