УДК 519.233+519.244]:004.738.5 doi:10.15421/321619

О.О. Ящук, Я.С. Бондаренко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПОСЛІДОВНИЙ АНАЛІЗ В ЗАДАЧІ A/B-ТЕСТУВАННЯ

Розглянуто послідовний аналіз у задачі A/B-тестування сторінок сайту, який потребує меншого числа спостережень порівняно з класичною перевіркою статистичних гіпотез. Це дозволяє прискорити тестування та приймати рішення щодо ефективності варіацій веб-сторінок якнайшвидше. Розроблено програмні реалізації A/B-тестування у випадку класичної та послідовної перевірки статистичних гіпотез на мові програмування R.

Рассмотрен последовательный анализ в задаче A/B-тестирования страниц сайта, который требует меньшего числа наблюдений по сравнению с классической проверкой статистических гипотез. Это позволяет ускорить тестирование и принимать решение об эффективности вариаций веб-страниц быстрее. Разработаны программные реализации A/B-тестирования при классической и последовательной проверке статистических гипотез на языке программирования R.

Sequential testing with likelihood ratios which requires fewer observations than classical hypothesis testing is proposed. It allows to speed up A/B testing. Decisions about effectiveness of variations of web pages are made as soon as possible. Software implementation of A/B testing has been developed in R.

Ключові слова: точкове оцінювання параметрів, побудова довірчих інтервалів для невідомих параметрів, перевірка статистичних гіпотез, A/B-тестування.

1. Вступ

A/B тестування є потужний інструмент для підвищення якості сайту. A/B-тестування дозволяє оцінювати кількісні показники роботи двох варіацій веб-сторінки, а також порівнювати їх між собою. Спліт-тестування допомагає досліджувати ефективність змін сторінки, наприклад додавання нових елементів дизайну або закликів до дії. Практичний сенс застосування цього методу полягає в пошуці та впровадженні компонентів сторінки, що збільшує її результативність. За допомогою A/B-тестування можна впливати на конверсію, стимулювати збут і підвищувати прибутковість веб-проекту. Отже, актуальність проблематики, пов’язаної з вивченням математичної моделі A/B тестування, є безперечна.

Кожен бізнес веб-сайт прагне, щоб відвідувачі перетворювалися з простих відвідувачів на відвідувачів, які б виконували бажані для власників сайту дії. A/B тестування – метод, що визначає, яка варіація веб-сторінки є більш ефективна. Конверсія – це відношення кількості відвідувачів сторінки, які виконали цільову дію, до загальної кількості відвідувачів сторінки. Під час A/B тестування потік відвідувач поділяється навпіл. Дві версії веб-сторінки A та B в один і той самий час пропонують двом групам відвідувачів. Версію веб-сторінки, яка має більший процент конверсії, вважають кращою. Веб-сторінку, на яку спрямовують потік відвідувачів для визначення процента конверсії називають цільовою сторінкою. Збільшення продажів та збільшення кількості зареєстрованих користувачів (збільшення процента конверсії) складає мету A/B тестування.

Дослідженням з даної тема тики присвячена робота [1] вчених Стенфордського університету, які дійшли висновку щодо доцільності застосування послідовної перевірки статистичних гіпотез [2 – 5] за неперервного моніторингу результатів A/B-тестування, зокрема, вони застосували підхід J.Ville и A.Wald. Послідовний аналіз – це метод перевірки статистичних гіпотез, характерною рисою якого є те, що кількість спостережень, необхідних для процесу перевірки, не задана наперед, а залежить від результату самих спостережень, тобто є випадкова величина, на відміну від традиційних критеріїв. Перевага даного методу полягає в тому, що він потребує в середньому приблизно в два рази менше спостережень, ніж рівносильна йому перевірка з фіксованою кількістю спостережень.

2. Постановка задачі

Метою дослідження є реалізація класичної та послідовної перевірки статистичних гіпотез, запропонованої M. Girshick [6], та ілюстрація переваг послідовного аналізу в задачі A/B тестування сторінок сайту.

3. Класична перевірка статистичних гіпотез під час A/B-тестування

У двох групах (контрольній та експериментальній) проведемо незалежні випробування Бернуллі з імовірністю успіху p_{cont} в одному випробуванні в контрольній групі та ймовірністю успіху $p_{\exp}$ в одному випробуванні в експериментальній групі. Імовірності успіху p_{cont} та $p_{\exp}$ невідомі. Відносно невідомих параметрів висуваємо нульову гіпотезу $H_0 : p_{cont} = p_{\exp}$ (експериментальна та контрольна групи мають однакову ймовірність успіху). Відтак побудуємо критерій для перевірки нульової гіпотези. Нульова гіпотеза може мати різні альтернативи: двосторонню $H_1: p_{cont} \neq p_{\exp}$ (експериментальна та контрольна групи мають різні ймовірності успіху) або односторонні $H_1: p_{cont} > p_{\exp}$ та $H_1: p_{cont} < p_{\exp}$. Оцінка $\frac{\mu_{cont}}{n_{cont}}$ (частота успіху) є незміщена, спроможна оцінка для параметра p_{cont} в контрольній групі; оцінка $\frac{\mu_{\exp}}{n_{\exp}}$ (частота успіху) є незміщена, спроможна оцінка для параметра $p_{\exp}$ в експериментальній групі. Оцінка $\hat{p} = \frac{\mu_{cont} + \mu_{\exp}}{n_{cont} + n_{\exp}}$ виступає об'єднаною частотою успіху в двох групах.

Критерій χ^2 порівняння двох імовірностей [7]. Якщо гіпотезу $H_0: p_{cont} = p_{\exp}$ відхиляти за

$$\chi^2 = \frac{\left| \frac{\mu_{cont}}{n_{cont}} - \frac{\mu_{\exp}}{n_{\exp}} \right|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_{cont}} + \frac{1}{n_{\exp}} \right)}} \geq z_{1-\alpha/2}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю α гіпотеза буде відхилятися, коли вона справедлива (альтернатива $H_1: p_{cont} \neq p_{\exp}$).

Або, що те ж саме, гіпотеза $H_0: p_{cont} - p_{\exp} = 0$ відхилятиметься, якщо $\hat{\theta} = \frac{\mu_{cont}}{n_{cont}} - \frac{\mu_{\exp}}{n_{\exp}}$ лежить за межами довірчого інтервалу

$$\left(-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_{cont}} + \frac{1}{n_{\exp}} \right)}; \quad z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_{cont}} + \frac{1}{n_{\exp}} \right)} \right),$$

і не відхилятиметься в супротивному разі.

Обчислення обсягу вибірок контрольної та експериментальної груп. Мінімальний обсяг вибірок контрольної та експериментальної груп, який забезпечує задані ймовірність помилки I роду α, потужність критерію $1-\beta$, різницю рівнів конверсії θ та базовий рівень конверсії p у разі перевірки простої гіпотези $H_0 : p_{cont} - p_{\exp} = 0$ проти простої альтернативи $H_0 : p_{cont} - p_{\exp} = \theta$, дорівнює

$$n = \frac{2(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 p(1-p)}{\theta^2}.$$

Наприклад, за $\alpha = 0{,}05, 1-\beta = 0{,}8,\ p = 0{,}1,\ \theta = 0{,}02$ мінімальний обсяг вибірки кожної групи дорівнюватиме 3533.

Реалізація A/B-тестування. Під час A/B тестування контрольній групі відвідувачів пропонують для перегляду сторінку A, експериментальній групі відвідувачів – сторінку B (варіацію A). Для збереження чистоти експерименту будемо ідентифікувати відвідувачів під час A/B тестування, а за повторних відвідувань сайту пропонуватимемо їм для перегляду ту саму сторінку A або B з попереднього відвідування. Висуваємо нульову гіпотезу про однаковий рівень конверсії в обох групах $H_0 : p_{cont} = p_{\exp}$. Моделюємо потік відвідувачів сайту. Кожен відвідувач з імовірністю ½ може потрапити до контрольної групи і з імовірністю ½ може потрапити до експериментальної групи. Після того як відвідувач опинився в одній із двох груп, змоделюємо його поведінку. Поведінку відвідувача однозначно визначаємо двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в контрольній групі, то подія «успіх» відбувається з імовірністю p_{cont}, якщо ж відвідувач опинився в експериментальній групі, то подія «успіх» відбувається з імовірністю $p_{\exp}$. За кожного $n = n_{cont} + n_{\exp}$ слід перевіряти нульову гіпотезу $H_0 : p_{cont} - p_{\exp} = 0$.

На рис. 1, 2 зображено результати реалізацій A/B тестування за таких параметрів: : $p_{cont} = 0{,}1,\ p_{\exp} = 0{,}12,\ n = 20000,\ \alpha = 0{,}05$.

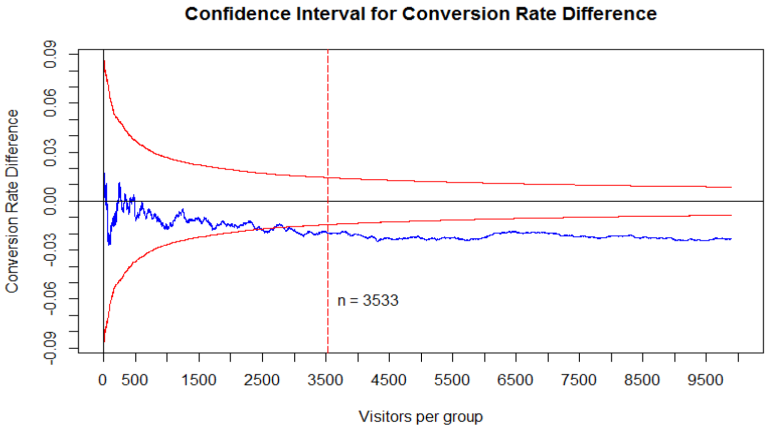

Рис. 1. Тест 1. Довірчий інтервал для Conversion Rate Difference

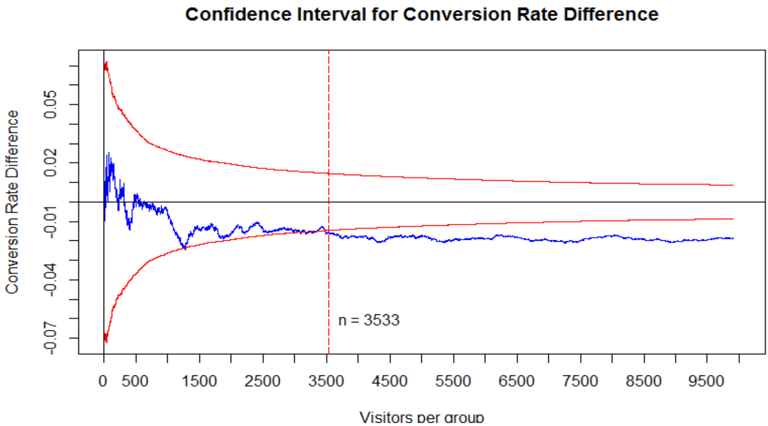

Рис. 2. Тест 2. Довірчий інтервал для Conversion Rate Difference

Тепер необхідно дочекатися, доки мінімальний обсяг однієї з груп дорівнюватиме 3533 і тільки тоді приймати рішення – відхиляти чи не відхиляти нульову гіпотезу.

4. Послідовна перевірка статистичних гіпотез під час A/B-тестування

Розглянемо метод послідовної перевірки гіпотез, для якого фіксовані помилки першого та другого роду та який потребує меншої кількості спостережень, що дозволить прискорювати A/B тестування та якнайшвидше приймати рішення щодо ефективності варіації веб-сторінки. Далі позначатимемо : $p_{cont} = p_1, p_{\exp} = p_2$.

Нехай $\xi_1,...,\xi_n$ - вибірка з розподілу $P(x_1, p_1) = p_1^{x1}(1-p_1)^{1-x1}$, $x_1 = 0,1$; $\eta_1,...,\eta_n$ - вибірка з розподілу $P(x_2, p_2) = p_2^{x2}(1-p_2)^{1-x2}$, $x_2 = 0,1$. Параметри p_1, p_2 невідомі. Відносно параметрів p_1, p_2 висуваємо гіпотезу $H_0 : p_1 \le p_2$, альтернативна їй гіпотеза $H_1 : p_1 > p_2$. Необхідно побудувати послідовний критерій для перевірки гіпотези H_0. Виберемо деяку величину p_1^0 параметра p_1 і деяку величину p_2^0 параметра p_2, при цьому величини p_1^0 та p_2^0 обиремо такими, що $p_1^0 < p_2^0$.

Нехай нульова гіпотеза $H_0 : p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0$ - це гіпотеза про те, що спільний розподіл величин ξ та η задається добутком

$$P(\xi, p_1^0)P(\eta, p_2^0) = \left(p_1^0\right)^{x1}\left(1-p_1^0\right)^{1-x1}\left(p_2^0\right)^{x2}\left(1-p_2^0\right)^{1-x2}, x1 = 0,1; x2 = 0,1.$$

Альтернативна гіпотеза $H_1 : p_1 = p_2^0, p_2 = p_1^0$ - це гіпотеза про те, що спільний розподіл величин ξ та η задається добутком

$$P(\xi, p_2^0)P(\eta, p_1^0) = \left(p_2^0\right)^{x1}\left(1-p_2^0\right)^{1-x1}\left(p_1^0\right)^{x2}\left(1-p_1^0\right)^{1-x2}, x1 = 0,1; x2 = 0,1.$$

Припустимо, що спостереження проводимо парами, кожна пара складається з одного спостереження величини ξ та одного спостереження величини η. Для проведення перевірки необхідно вибрати дві постійні B та A і на кожній стадії експерименту рахувати величину відношення

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{P(x_{11}, p_2^0)P(x_{21}, p_1^0)P(x_{12}, p_2^0)P(x_{22}, p_1^0)...P(x_{1n}, p_2^0)P(x_{2n}, p_1^0)}{P(x_{11}, p_1^0)P(x_{21}, p_2^0)P(x_{12}, p_1^0)P(x_{22}, p_2^0)...P(x_{1n}, p_1^0)P(x_{2n}, p_2^0)},$$

де x_{11}- перше спостереження величини ξ; x_{21}- перше спостереження величини η; x_{12}- друге спостереження величини ξ; x_{22}- друге спостереження величини η і т. д.

Експеримент продовжуємо до тих пір, поки відношення $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}}$ залишиться в проміжку між B та A. Гіпотеза H_0 приймається, якщо $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}} \le B$, і відхиляється, якщо $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}} \ge A$.

Спільний розподіл за справедливої гіпотези H_0 дорівнює

$$p_{1n} = P(x_{11}, p_2^0)P(x_{21}, p_1^0)...P(x_{1n}, p_2^0)P(x_{2n}, p_1^0) =$$
$$= \left(p_2^0\right)^{x11}\left(1-p_2^0\right)^{1-x11}\left(p_1^0\right)^{x21}\left(1-p_1^0\right)^{1-x21}...\left(p_2^0\right)^{x1n}\left(1-p_2^0\right)^{1-x1n}\left(p_1^0\right)^{x2n}\left(1-p_1^0\right)^{1-x2n}.$$

Спільний розподіл за справедливої гіпотези H_1 дорівнює

$$p_{0n} = P(x_{11}, p_1^0)P(x_{21}, p_2^0)...P(x_{1n}, p_1^0)P(x_{2n}, p_2^0) =$$
$$= \left(p_1^0\right)^{x11}\left(1-p_1^0\right)^{1-x11}\left(p_2^0\right)^{x21}\left(1-p_2^0\right)^{1-x21}...\left(p_1^0\right)^{x1n}\left(1-p_1^0\right)^{1-x1n}\left(p_2^0\right)^{x2n}\left(1-p_2^0\right)^{1-x2n}.$$

Відношення ймовірностей набуває вигляду

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \left(\frac{p_2^0(1-p_1^0)}{p_1^0(1-p_2^0)}\right)^{\sum x_{1i} - \sum x_{2i}}.$$

Логарифм відношення ймовірностей дорівнює

$$\ln\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \left(\sum x_{1i} - \sum x_{2i}\right)\ln\left(\frac{p_2^0(1-p_1^0)}{p_1^0(1-p_2^0)}\right).$$

M. Girshick [6] установив, що ймовірність того, що послідовний критерій відношення ймовірностей закінчиться прийняттям гіпотези H_0, залежить лише від величини

$$v(p_1, p_2) = \ln\left(\frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}\right).$$

Цю величину можна вважати допустимою мірою відхилення p_1 від p_2. Функція $v(p_1, p_2)$ задовольняє умови: $v(p_1, p_2) = 0$, коли $p_1 = p_2$,

$v(p_1, p_2) < 0$, коли $p_2 > p_1$, $v(p_1, p_2) = -v(p_2, p_1)$.

Вибір чотирьох величин p_1^0, p_2^0, A, B можна зробити, вдаючись до таких міркувань. Нехай d така додатна величина, що прийняття гіпотези H_0 можна вважати помилкою для всіх $v(p_1, p_2) \ge d$, а відхилення гіпотези H_0 – помилкою для всіх $v(p_1, p_2) \le -d$. Ми прагнемо здобути таку методику перевірки, для якої б імовірність відхилення гіпотези H_0 для всіх $v(p_1, p_2) \le -d$ не перевищувала заздалегідь заданої величини α, а ймовірність прийняття гіпотези H_0 для всіх $v(p_1, p_2) \ge d$ не перевищувала заздалегідь заданої величини β. Методика перевірки матиме такі властивості, якщо величини p_1^0, p_2^0, A, B вибрані так, що

$$v(p_1^0, p_2^0) = \ln\left(\frac{p_1^0(1-p_2^0)}{p_2^0(1-p_1^0)}\right) = -d .$$

І послідовний критерій відношення ймовірностей, застосований до перевірки гіпотези H_0 відносно гіпотези H_1 має силу (α, β).

Логарифм відношення ймовірностей набуває вигляду

$$\ln\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \left(\sum x_{1i} - \sum x_{2i}\right)\ln\left(\frac{p_2^0(1-p_1^0)}{p_1^0(1-p_2^0)}\right) = d\left(\sum x_{1i} - \sum x_{2i}\right).$$

Продовжуємо моделювати пари спостережень, поки

$$\frac{\ln B}{d} < \sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i}) < \frac{\ln A}{d},$$

$$\frac{1}{d}\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) < \sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i}) < \frac{1}{d}\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right).$$

Приймаємо гіпотезу $H_0 : p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0$, якщо

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i}) \le \frac{1}{d}\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right),$$

і відхиляємо гіпотезу $H_0 : p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0$, якщо

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i}) \geq \frac{1}{d}\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right).$$

Реалізація A/B-тестування. У разі A/B тестування контрольній групі відвідувачів пропонуємо до перегляду сторінку A, експериментальній групі відвідувачів пропонують для перегляду сторінку B (варіацію A). Висуваємо нульову гіпотезу про однаковий рівень конверсії в обох групах $H_0 : p_1 \leq p_2$. Моделюємо потік відвідувачів сайту. Кожен відвідувач з імовірністю ½ може потрапити до контрольної групи і з такою ж імовірністю може потрапити до експериментальної групи. Після того як відвідувач опинився в одній із двох груп моделюємо його поведінку. Поведінку відвідувача однозначно визначаємо двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в контрольній групі, то подія «успіх» відбувається з імовірністю p_{cont}. Якщо відвідувач опинився в експериментальній групі, то подія «успіх» відбувається з імовірністю $p_{\exp}$. За кожного $n = n_{cont} + n_{\exp}$ перевіряємо нульову гіпотезу $H_0 : p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0$.

На рис. 3 зображено результати реалізацій A/B тестування за таких параметрів: : $p_1^0 = 0{,}1,\ p_2^0 = 0{,}11,\ \alpha = 0{,}05,\ \beta = 0{,}2$.

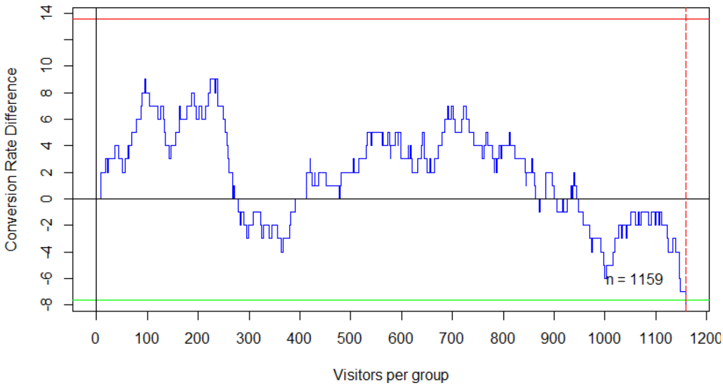

Рис. 3. Тест 1. Довірчий інтервал для Conversion Rate Difference. Тестування завершено прийняттям нульової гіпотези на 1159 кроці

На рис. 4 зображено результати реалізацій A/B тестування за таких параметрів: : $p_1^0 = 0{,}1,\ p_2^0 = 0{,}12,\ \alpha = 0{,}05,\ \beta = 0{,}2$.

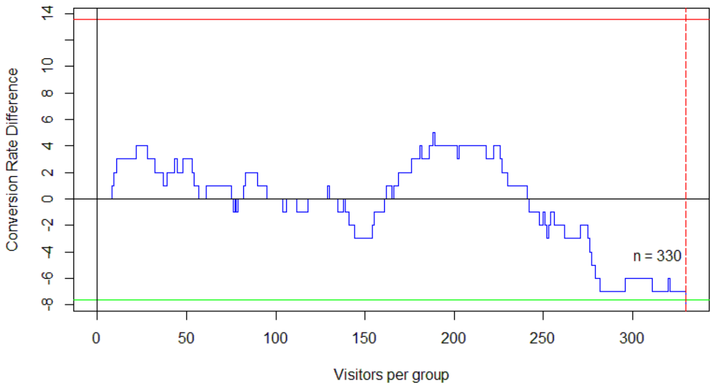

Рис. 4. Тест 2. Довірчий інтервал для Conversion Rate Difference. Тестування завершено прийняттям нульової гіпотези на 330 кроці

На рис. 5 зображено результати реалізацій A/B тестування за таких параметрів: : $p_1^0 = 0{,}1,\ p_2^0 = 0{,}14,\ \alpha = 0{,}05,\ \beta = 0{,}2$.

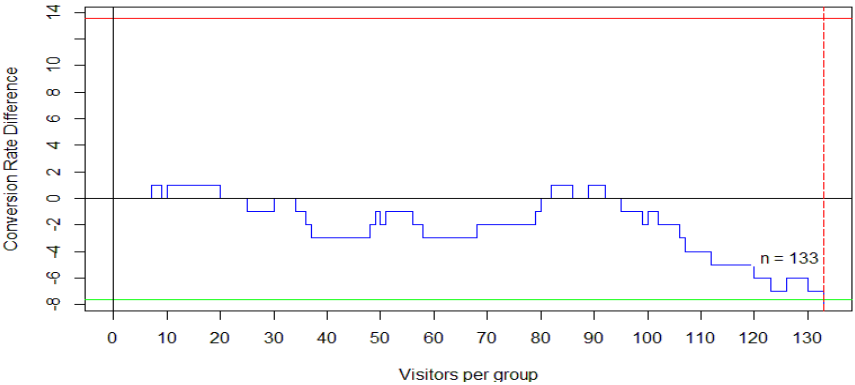

Рис. 5. Тест 3. Довірчий інтервал для Conversion Rate Difference. Тестування завершено прийняттям нульової гіпотези на 133 кроці

5. Порівняння класичної та послідовної перевірок статистичних гіпотез у разі A/B-тестування

За класичної перевірки статистичних гіпотез за допомогою критерію χ^2 мінімальний обсяг вибірок контрольної та експериментальної груп, який забезпечує задані ймовірність помилки I роду α, потужність критерію $1-\beta$, різницю рівнів конверсії θ та базовий рівень конверсії p у випадку перевірки простої гіпотези $H_0 : p_{cont} - p_{\exp} = 0$ проти простої альтернативи $H_0 : p_{cont} - p_{\exp} = \theta$, дорівнює

$$n = \frac{2(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 p(1-p)}{\theta^2}.$$

Цю фіксовану кількість спостережень n, необхідних у випадку класичної перевірки гіпотез, порівнюємо з середньою кількістю спостережень $\hat{n}$, необхідних за послідовної перевірки гіпотез (див. таблицю).

Порівняння критерію χ^2 та послідовного критерію для 1000 тестувань

Гіпотеза, що перевіряється $H_0 : p_{cont} < p_{\exp}$		$\alpha = 0{,}05$ $\beta = 0{,}2$		Показник зменшення кількості відвідувачів, %
		Критерій χ^2 n	Критерій Girshick $\hat{n}$	
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}11$	14132	1017	92
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}12$	3533	337	90
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}13$	1571	175	88
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}14$	884	105	88
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}15$	566	70	87
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}16$	393	47	88
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}17$	289	36	87

Закінчення таблиці

$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}18$	221	35	84
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}19$	175	31	82
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}20$	142	19	86
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}21$	117	18	84
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}22$	99	15	84
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}23$	84	14	83
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}24$	73	14	80
$p^0_{cont} = 0{,}1$	$p^0_{\exp} = 0{,}11$	63	13	79

6. Висновки

У роботі розглянуто класичну та послідовну перевірки статистичних гіпотез та проілюстровано переваги послідовного аналізу в задачі A/B-тестування сторінок сайту, а саме: у разі застосування послідовного критерію в середньому необхідна менша кількість спостережень, ніж за класичного критерію χ^2 з фіксованою кількістю спостережень тієї ж сили. Тому метод послідовного аналізу має широку сферу застосування і є ефективним в різних галузях, наприклад під час вибіркового контролю продукції або за статистичної обробки результатів фізичних експериментів.

Бібліографічні посилання

1. **Pekelis, L.** The New Stats Engine [Электронный ресурс] / L. Pekelis, D. Walsh, R. Johari. – Режим доступа: http://pages.optimizely.com/rs/optimizely/images/stats_engine_technical_paper.pdf
2. **Lai, T.** Sequential analysis: Some classical problems and new challenges [Text] / T. Lai. – Statistica Sinica, 2001. – P. 303–408.
3. **Robbins, H.** Statistical methods related to the law of the iterated logarithm [Text] / H. Robbins // Ann. Math. Statist. – 1970. – P. 1397–1409.
4. **Siegmund, D.** Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals [Text] / D. Siegmund. – Springer, 1985.
5. **Вальд, А.** Последовательный анализ [Текст]/ А. Вальд. – М., 1960.
6. **Girshick, M.A.** Contributions of the theory of sequential analysis [Электронный ресурс] / M.A. Girshick. – Режим доступа: http://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177730976. – Загл. с экрана.
7. **Ван дер Варден, Б.Л.** Математическая статистика [Текст]/ Б.Л. Ван дер Варден. – М., 1960.

Надійшла до редколегії 21.05.2016