Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д., 2016

УДК 519.85 doi:10.15421/321606

Е.М. Киселева[*], С.А. Ус[**], О.Д. Станина[***]

[*]*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

[**]*ГВУЗ «Национальный горный университет»*

[***]*ГВУЗ «Украинский химико-технологический университет»*

О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Предложены математические модели задач оптимального разбиения множеств с дополнительными связями, являющиеся двухэтапными задачами размещения предприятий. Рассмотрены модели с фиксированными центрами подмножеств и с размещением центров при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа и без ограничений.

Запропоновано математичні моделі задач оптимального розбиття множин із додатковими зв'язками, які являють собою двохетапні задачі розміщення підприємств. Розглянуто моделі з фіксованими центрами підмножин і з розміщенням центрів за наявністю обмежень на потужність підприємств першого етапу і без обмежень.

The mathematical models of problems of optimal sets partition with additional links were suggested. They are two-stage facility location problem. The different types of models were considered. Namely, the models with fixed centers and when the location of centers must be define, the models with restrictions on the first-stage enterprises capacity and without restrictions.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, задачи размещения-распределения, многоэтапные задачи размещения

Введение. Одним из активно развивающихся направлений современного бесконечномерного математического программирования является исследование непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ). Интерес к таким задачам вызван тем, что они дают возможность моделирования широкого класса теоретических и практических задач оптимизации. В настоящее время сформулированы линейные, нелинейные, динамические задачи ОРМ, а также задачи ОРМ в условиях неопределенности [3 – 5]. В работе [5] полно представлены теоретические сведения, касающиеся моделей и методов решения линейных непрерывных задач оптимального разбиения множеств, приведена обширная библиография. В

[3] подробно изучены нелинейные и динамические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств и широкий спектр практических приложений; в работе [4] представлены приложения результатов теории ОРМ к решению различных задач теории и практики. Нужно отметить, что для всех указанных задач разработаны научно обоснованные методы решения и на их основе сформулированы эффективные алгоритмы, составной частью которых является r-алгоритм Н.З. Шора.

Приведем содержательную постановку однопродуктовой линейной задачи ОРМ как бесконечномерной задачи размещения.

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек $\tau_1,\tau_2,...,\tau_N$, причем координаты некоторых из них (или даже всех) могут быть заранее неизвестны. При этом известна величина спроса $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, а также стоимость доставки единицы продукции $c_i(x,\tau_i)$, $i=\overline{1,N}$, из пункта производства τ_i в пункт потребления x. Предполагаем, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов, а объем продукции, выпускаемой i-м производителем, определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должен превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, и определить координаты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ центров этих подмножеств так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальными.

Эту задачу можно описать в виде такой математической модели [5].

Задача А1. (Непрерывная линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров $\tau_1, \ldots, \tau_N$ этих подмножеств соответственно).

Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ и определить координаты центров этих подмножеств $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ так, чтобы функционал

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x,\tau_i)+a_i)\rho(x)dx$$

достигал минимального значения при условиях, что

$$\int\limits_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i \ , \ i = 1, \ldots, p \ ;$$

$$\int\limits_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i \ , \ i = p+1, \ldots, N \ ;$$

$$\{\Omega_1, ..., \ \Omega_N\} \in \textstyle\sum_{\Omega}^N \ , \ \ \tau = \left(\tau_1, ..., \tau_N\right) \in \Omega^N \ ,$$

где $\sum_{\Omega}^N = \left\{ \{\Omega_1, ..., \Omega_N\} : \ \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \ne j, \ i, j = \overline{1, N} \right\}$,

$x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\right) \in \Omega$; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$; $a_1, a_2, \ldots a_N$, $b_1, ..., b_N$ – заданные неотрицательные числа, при этом выполняются следующие условия разрешимости задачи:

$$S = \int\limits_{\Omega} \rho(x)dx \le \sum_{i=1}^{N} b_i \ , \ 0 < b_i \le S \ , \ i = 1, \ldots, N \ .$$

Описание метода и алгоритма решения этой задачи можно найти в монографии [5].

Однако в практической деятельности часто возникают ситуации, в которых кроме непрерывно распределенного потребителя (или поставщика) необходимо учитывать связи с некоторыми уже существующими объектами (ими могут быть, например, транспортные узлы, в т.ч. железнодорожные станции, распределительные сети, существующие предприятия второго цикла производства). К таким задачам относят, например, задачи размещения предприятий горно-обогатительного цикла [11], пунктов сбора и переработки природного сырья [6], оптимизации распределительных систем [9], кроме того, они возникают на одном из этапов решения многоэтапных задач размещения производства [7].

Таким образом, исследование многоэтапных непрерывных задач разбиения множеств является одним из актуальных направлений дальнейшего развития теории ОРМ.

Анализ публикаций и задачи исследования. Многоэтапные задачи размещения (МЗР) являются обобщением многоэтапных транспортно-производственных задач. Их исследованию посвящено большое количество публикаций, в которых отражены различные математические модели и направления их исследования, представлены методы и алгоритмы решения. Дискретные многоэтапные задачи исследованы в работах [1; 2; 6; 8;10; 12].

Многоэтапная задача размещения на содержательном уровне формулируется следующим образом. Заданы множества предприятий и потребителей, которым необходима их продукция. Для производства продукции предприятия объединяются в технологические цепочки. Таким образом, продукция проходит несколько стадий обработки. Множество допустимых технологических цепочек известно. Для каждого предприятия задана стоимость его открытия. Для каждого потребителя заданы производственно-транспортные расходы на удовлетворение его спроса каждой технологической цепочкой. Требуется найти такой набор предприятий, который с минимальными суммарными затратами позволил бы удовлетворить спрос всех потребителей. Такие задачи рассмотрены, в частности, в работе [2].

Эти модели соответствуют ситуации, когда число возможных мест размещения предприятий конечно и возможное их расположение в области заранее определено, при этом прослеживается тенденция использования эвристических алгоритмов [1; 4; 9; 12], в частности алгоритмов генетического типа. Однако при решении практических задач возникают ситуации, когда возможные места размещения предприятий не ограничены конечным набором вариантов, т.е. предприятия могут быть размещены в любой точке заданной области. Такие задачи могут быть описаны как непрерывные задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ).

Целью нашего исследования является построение и изучение математических моделей задач ОРМ с дополнительными связями как многоэтапных задач размещения-распределения.

Материалы исследования. Содержательную постановку задачи ОРМ с дополнительными связями можно сформулировать следующим образом [7]. Пусть некоторый ресурс распределен в области Ω. Переработку ресурса следует производить в два этапа, а именно: конечное число N предприятий первого этапа, расположенных в изолированных точках τ_i^I, $i=1,2,\ldots N$ области Ω, получают сырье от поставщиков, непрерывно распределенных в области Ω, перерабатывают его и отправляют для реализации (или дальнейшей переработки) в пункты конечного потребления, координаты которых: $\tau_1^{II},...,\tau_M^{II}$, заранее определены. Предположим также, что известны:

– спрос b_j^{II} на продукцию для каждого конечного пункта потребления, $j=1, 2, \ldots M$;

– запас $\rho(x)$ ресурса в каждой точке области Ω;

– стоимость доставки единицы ресурса $c_i^I\left(x,\tau_i\right)$, $i=1,2,\ldots N$, из точки x в пункт первичной переработки τ_i^I;

– стоимость перевозки единицы продукта $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ из пункта первичной переработки τ_i^I в пункт τ_j^{II}.

Кроме того, будем считать, что мощность i-го производителя первого этапа определяется суммарным запасом ресурса в обслуживаемой области и должна быть не меньше заданных объемов b_i^I, $i=1,2,\ldots N$, а прибыль предприятия зависит только от транспортных расходов.

Необходимо разместить заданное количество предприятий в области Ω, разбить ее на зоны обслуживания $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_N$ каждым из предприятий первого этапа и определить объемы перевозок $v_{ij}\geq 0$, $i=1,2,\ldots N$, $j=1,2.\ldots M$, между предприятиями первого этапа и пунктами конечного потребления таким образом, чтобы обеспечить минимальную суммарную стоимость доставки сырья и конечной продукции.

Заметим, что при построении математических моделей нужно учитывать тот факт, что, как и в классе задач ОРМ, тут можно сформулировать несколько видов задач, а именно: задачи с фиксированными центрами подмножеств (тогда определению подлежат только зоны обслуживания и объемы перевозок между предприятиями первого и второго этапов); задачи с размещением центров (в этом случае необходимо определить координаты центров, их зоны обслуживания и объемы перевозок между предприятиями). Обе эти задачи могут быть рассмотрены как задачи с ограничениями на мощность предприятий первого этапа или без ограничений. Таким образом, можно сформулировать четыре задачи:

– задача ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах без ограничений на мощность предприятий первого этапа;

– задача ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа;

– задача ОРМ с дополнительными связями с размещением центров и без ограничений на мощность предприятий первого этапа;

– задача ОРМ с дополнительными связями с размещением центров при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа.

Сформулируем соответствующие математические модели и рассмотрим их подробнее, сохраняя обозначения и терминологию, введенную в монографии [5].

Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, выпуклое, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n. Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ из $\Omega \subset E_N$ будем называть разбиением множества Ω на N подмножеств, если выполняются такие условия:

$$\bigcup \Omega_i = \Omega ,$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, N} ,$$

где $mes(\cdot)$ – мера Лебега.

Класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств обозначим через $\sum_{\Omega}^{N}$, т.е.

$$\sum\nolimits_{\Omega}^{N} = \left\{ \{\Omega_1, ..., \Omega_N\} : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Далее будем рассматривать функционал вида

$$F\left(\{\Omega_1, \ldots \Omega_N\}, \{v_{11}, \ldots v_{NM}\}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I \left(x, \tau_i^I\right) \rho\left(x\right) dx + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II} \left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) v_{ij} , \quad (1)$$

где первое слагаемое выражает суммарную стоимость доставки сырья от поставщиков к предприятиям I этапа, а второе – суммарную стоимость перевозок между предприятиями I и II этапов.

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидова пространства E_n на подмножества без отыскания центров их координат при дополнительных связях будем понимать следующую задачу.

Задача 1. (Задача ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах подмножеств без ограничений на мощность предприятий первого этапа.)

Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) и такие объемы перевозок $v_{11}, ..., v_{NM}$, которые бы обеспечивали

$$\min_{\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}; \{v_{11}, ..., v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}; \{v_{11}, ..., v_{NM}\})$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} v_{ij}\ , \quad i = \overline{1,N}\ , \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}\ , \quad j = \overline{1,M}\ , \tag{3}$$

$$\Omega \in \Sigma_{\Omega}^{N}\ , \tag{4}$$

$$v_{ij} \geq 0\ , \quad j = 1,2.\dots M\ ,\ i = 1,2,\dots N\ .$$

Здесь ограничения (2) выражают баланс между возможностями предприятий I и II этапов, ограничение (3) задает мощность для каждого из предприятия II этапа.

Функции $c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)$, $i = \overline{1,N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω; $\rho\left(x\right)$ – действительная, интегрируемая, определенная на Ω функция; τ_i^I, $i = \overline{1,N}$, τ_j^{II}, $j = \overline{1,M}$ – заданные точки области Ω; $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right) = c_{ij}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$ – заданные неотрицательные числа; b_j^{II}, $j = \overline{1,\mathrm{M}}$ – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи:

$$\sum_{j=1}^{M} b_j^{II} = \int_{\Omega} \rho(x)dx\ . \tag{5}$$

Интегралы следует понимать в смысле Лебега.

Задача 2. (Задача ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа.)

Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\dots,\Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) и такие объёмы перевозок $v_{11},...,v_{NM}$, которые бы обеспечивали

$$\min_{\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\};\{v_{11},...,v_{NM}\}} F(\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\};\{v_{11},...,v_{NM}\})$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i^I\ , \quad i = \overline{1,N}\ , \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I\ ,\quad i = \overline{1,N} \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}\ ,\quad j = \overline{1,M}\ , \tag{8}$$

$$\Omega \in \Sigma_\Omega^N\ , \tag{9}$$

$$v_{ij} \geq 0\ ,\quad j = 1,2\ldots M\ ,\ i = 1,2,\ldots N\ .$$

где $x = (x^{(1)},...,x^{(n)}) \in \Omega$; b_j^{II} , $j = \overline{1,\mathrm{M}}$, b_i^I , $i = \overline{1,N}$ – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям разрешимости задачи:

$$\sum_{j=1}^{M} b_j^{II} = \sum_{i=1}^{N} b_i^I = \int_\Omega \rho(x)dx\ . \tag{10}$$

В отличие от предыдущей задачи, здесь предположем, что задана также мощность предприятий I этапа. В этом случае полученная модель содержит две группы ограничений: ограничения (6) и (9) определяют разбиение множества Ω, а ограничения (7) и (8) – структуру перевозок между предприятиями I и II этапов. Учитывая аддитивность целевого функционала, в этом случае исходную задачу можно свести к решению двух задач: задачи ОРМ с фиксированными центрами при ограничениях-равенствах и транспортной задачи линейного программирования.

Задача 2.1. Найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), чтобы функционал

$$F_1(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho\left(x\right)dx$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i^I\ ,\quad i = \overline{1,N}\ ,$$

$$\Omega \in \Sigma_\Omega^N\ .$$

Задача 2.2. Определить числа $v_{11},...,v_{NM}$, обеспечивающие минимум функционалу

$$F_2(\{v_{11},...,v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) v_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1,M},$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad j = 1,2\ldots M, \; i = 1,2,\ldots N.$$

При этом условия (10) обеспечивают разрешимость транспортной задачи и задачи ОРМ.

Однако если в исходной задаче ограничения будут иметь вид «$\leq$», то такая декомпозиция задачи уже не будет иметь места.

Задача 3. (Задача ОРМ с дополнительными связями с размещением центров и без ограничений на мощность предприятий первого этапа.)

Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), определить координаты $\tau_1^I,...,\tau_N^I$ центров этих подмножеств, и такие объемы перевозок $v_{11},...,v_{NM}$, которые бы обеспечивали минимум функционала:

$$F\left(\{\Omega_1,\ldots\Omega_N\}, \left(\tau_1^I,\ldots\tau_N^I\right), \left(v_{11},\ldots v_{NM}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I\left(x, \tau_i^I\right)\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) v_{ij}, \qquad (11)$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} v_{ij}, \quad i = \overline{1,N}, \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1,M}, \qquad (13)$$

$$\Omega \in \textstyle\sum_{\Omega}^{N}, \qquad (14)$$

$$v_{ij} \geq 0\,,\quad j = 1,2\ldots M\,,\quad i = 1,2,\ldots N\,,\ \tau^I = \left(\tau_1^I, \tau_2^I \ldots \tau_N^I\right),\ \tau^I \in \Omega^N\,, \quad (15)$$

где $x = (x^{(1)},...,x^{(n)}) \in \Omega$; b_j^{II}, $j = \overline{1,\mathrm{M}}$, – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию (5) разрешимости задачи.

Функции $c_i^I\left(x, \tau_i^I\right)$, $i = \overline{1,N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω, и выпуклые по τ на W для всех $i = \overline{1,N}$; $\rho\left(x\right)$ – действительная, интегрируемая, определённая на Ω функция; τ_j^{II}, $j = \overline{1,M}$ – заданные точки области Ω, $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) = c_{ij}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$ – заданные неотрицательные числа.

Как и в задаче 1, здесь ограничения (12) выражают баланс между мощностями предприятий I и II этапов, при этом должны быть выполнены условия разрешимости задачи.

Задача 4. (Задача ОРМ с дополнительными связями с размещением центров при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа.)

Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), определить координаты $\tau_1^I,...,\tau_N^I$ центров этих подмножеств, и такие объемы перевозок $v_{11},...,v_{NM}$, которые бы обеспечивали минимум функционала:

$$F\left(\left\{\Omega_1,\ldots\Omega_N\right\}, \left(\tau_1^I,\ldots\tau_N^I\right), \left(v_{11},\ldots v_{NM}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I\left(x, \tau_i^I\right)\rho\left(x\right)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right)v_{ij}\,,$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i^I\,,\quad i = \overline{1,N}\,, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I\,,\ i = \overline{1,N}\,, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{18}$$

$$\Omega \in \sum\nolimits_{\Omega}^{N}, \tag{19}$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad j = 1, 2....M, \quad i = 1, 2, ...N, \; \tau^I = \left(\tau_1^I, \tau_2^I ... \tau_N^I\right), \; \tau^I \in \Omega^N, \tag{20}$$

где $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \Omega$; b_j^{II}, $j = \overline{1, \mathrm{M}}$, b_i^I, $i = \overline{1, N}$ – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям разрешимости задачи (10).

Функции $c_i^I\left(x, \tau_i^I\right)$, $i = \overline{1, N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω, и выпуклые по τ на W для всех $i = \overline{1, N}$; $\rho\left(x\right)$ – действительная, интегрируемая, определённая на Ω функция; τ_j^{II}, $j = \overline{1, N}$ – заданные точки области Ω, $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) = c_{ij}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ – заданные неотрицательные числа.

Особенностью всех предложенных моделей является комбинирование моделей дискретной и непрерывной оптимизации.

Выводы. В работе представлены математические модели задач ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах подмножеств и с размещением центров. Предложенные модели представляют собой двухэтапные задачи размещения-распределения с континуальным множеством возможных мест размещения предприятий I этапа и непрерывно распределённым ресурсом.

Библиографические ссылки

1. **Алексеева, Е.В.** Генетический локальный поиск для задачи о р–медиане с предпочтениями клиентов [Текст] / Е. В. Алексеева, Ю. А. Кочетов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2007. – Т. 14, № 1. – С.3 – 31.
2. **Гимади, Э.Х.** Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи [Текст] / Э.Х Гимади // Там же. –1995. – Т. 2, № 4. – С. 13–23.
3. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.

4. **Киселева, Е.М.** Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус. – Д.: НГУ, 2015. – 270 с.
5. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005 – 564 с.
6. **Русяк, И.Г.** Решение задачи оптимизации схемы размещения производства древесных видов топлива по критерию себестоимости тепловой энергии [Текст] / И.Г. Русяк, Д.Г. Нефедов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 3. С. 651–659.
7. **Ус, С.А.** О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий [Текст] / С.А. Ус, О.Д. Станина // Питания прикл. математики і мат. моделювання: зб.наук.пр. – Д.: Вид-во «Ліра», 2014, С.258–268.
8. **Drezner, Z.** Facility Location: Application and Theory [Text] / Z. Drezner, H. Hamacher. – Berlin: Springer, 2001. – 460 p.
9. **Fengqi, Y.** Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management [Text] / Y. Fengqi, I. E. Grossmann // Ind. Eng. Chem. Res. – 2008. – Vol. 47. – P.7802–7817.
10. **Trubin, V. A.** Simple multistage location problem on a treelike network [Text] / V. A. Trubin, F. A. Sharifov // Cybernetics and Systems Analysis. – 1992. – Vol. 28, № 6, P. 912–917.
11. **Us, S.** On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry [Text] / S. Us, O. Stanina // Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig. – 2015. – P.419–424.
12. **Kochetov, Yu.** Bilevel facility location: discrete models and computational methods [Text] / Yu. Kochetov // Proceedings Of XXXVII Symposium în Operations Research – (SYMOPIS-2010). – 2010. – P.12–16.

Надійшла до редколегії 04.06.2016