УДК 519.85 doi: 10.15421/321711

О.М. Кісельова*, В.О. Строєва **

**Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара*

***Дніпровський державний технічний університет*

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕКРЕАЦІЙНИХ РЕСУРСІВ В УМОВАХ СУЧАСНОЇ ТА ПЕРСПЕКТИВНОЇ СТРУКТУРИ РЕКРЕАЦІЙНИХ ПОТРЕБ

Досліджено задачу оптимального розподілу рекреаційних ресурсів, розв'язання якої може бути цікавим у сенсі розвитку рекреації та туризму. Побудовано математичну модель поставленої задачі, яку адаптовано до неперервної нелінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин при обмеженнях із заданими координатами центрів підмножин.

Исследована задача оптимального распределения рекреационных ресурсов, решение которой может быть интересным в смысле развития рекреации и туризма. Построена математическая модель поставленной задачи, которая адаптирована к непрерывной нелинейной многопродуктовой задаче оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданными координатами центров подмножеств.

The problem of the optimal distribution of recreational resources is investigated, the solution of which can be interesting in the sense of the development of recreation and tourism. A mathematical model of the problem is constructed, which is adapted to the continuous non-linear multi-product problem of optimal partitioning of sets under constraints with given coordinates of the centers of subsets.

Ключові слова: туристично-рекреаційний об'єкт, рекреаційний потенціал, метод експертних оцінок, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача.

Вступ. Успіх більшості управлінських завдань залежить від найкращого способу використання ресурсів. У загальному випадку ця проблема зводиться до задач оптимального розподілу ресурсів. Серед таких ресурсів можуть бути матеріально-речові (сировина), енергетичні, трудові, технічні, інформаційні, фінансові та інші. Ресурси кожного типу можуть бути розподілені на класи. Сировина – за видами сировини, трудові – за професіями та кваліфікаціями працівників, технічні – за технічними характеристиками, фінансові – за джерелами фінансування і т.п. Отже, задачі оптимального розподілу ресурсів виникають у багатьох галузях виробництва та господарювання. Розглянемо деякі з них.

Наприклад, відомі виробничі завдання та потужності підприємства. При існуючих різних способах виготовлення виробів обмеження потужностей не дає можливості для кожного виробу використовувати найкращу технологію. Виникає питання, який спосіб виробництва потрібно вибрати, щоб виконати завдання з мінімальними витратами? Визначити, який склад робіт можна виконати за наявними ресурсами, щоб забезпечити максимум деякої міри ефективності.

Моделі розподілу ресурсів у системах, побудованих на хмарних обчисленнях, є не менш актуальними. Провідні аналітики прогнозують як суттєве зростання попиту на хмарні обчислення, так і збільшення доходів для компаній, які одними з перших запропонують хмарні сервіси. Це дозволятиме значно скоротити витрати на IT-послуги, інакше оцінити весь процес автоматизації діяльності компаній і створення програмного забезпечення, відмовитися від високих вхідних інвестицій в інфраструктуру та її подальшу підтримку, а також вирішити проблеми швидкого виходу на нові ринки, розширення клієнтської бази, збільшення кількості замовників, тощо [1].

Іншими задачами такого типу можуть бути задачі оптимального розміщення туристичних комплексів на заданій території, яка є привабливою в сенсі туристичної індустрії [2]. У цьому випадку розглядають моделі функціонування і розвитку туристично-рекреаційних систем, які можуть бути використані для аналізу та прогнозування індустрії туризму як на регіональному, так і на державному та міжнародному рівнях.

Очевидно, що формалізація проблеми ефективного використання ресурсів приводить до задач лінійного і нелінійного, булевого і цілочисельного, а також змішаного програмування з широким вибором критеріїв оптимізації і врахування ресурсних, часових, технологічних та інших обмежень. Разом з цим, зазначимо, що приведені вище задачі у своїй математичній постановці можуть бути зведеними до неперервних задач оптимального розбиття множин з розділу нескінченновимірного математичного програмування. Слід зауважити, що у розрізі таких досліджень розв’язок вихідної задачі нескінченновимірного математичного програмування вдається отримати аналітично, у явному вигляді, при цьому в аналітичний вираз входять параметри, які відшукуються як оптимальний розв’язок допоміжної двоїстої скінченновимірної задачі оптимізації з негладкими цільовими функціями. Для розв’язку скінченновимірної задачі, в свою чергу, застосовуються ефективні методи недиференційованої оптимізації – модифікації r-алгоритму, розроблені в Інституті кібернетики НАН України імені В.М. Глушкова під керівництвом Н.З. Шора. У випадку нелінійних критеріїв якості розв’язок вихідної нескінченновимірної задачі зводиться до розв’язання деякого допоміжного операторного рівняння з параметрами.

Отже, у вирішенні сучасних проблем ефективності використання ресурсів будь-якого типу дослідження зазначених вище моделей, їх алгоритмічна і програмна реалізація є досить актуальними та без сумніву мають суттєве прикладне значення.

Представлена робота присвячена дослідженню задачі оптимального розподілу рекреаційних ресурсів в умовах сучасної та перспективної структури рекреаційних потреб. Метою роботи є побудова математичної моделі поставленої задачі та адаптація і застосування алгоритмів, побудованих в [3], до її розв’язання.

Постановка задачі. Розглянемо деяку територію, яка є привабливою в плані туристичної індустрії, та модель функціонування і розвитку туристично-рекреаційної системи (ТРС). Рекреаційний процес в ТРС як процес відновлення фізичних, інтелектуальних та емоційних сил людини забезпечується множиною деяких рекреаційних ресурсів.

Рекреаційні ресурси – це сукупність природно-технічних, природних, соціально-економічних комплексів та їх елементів, що сприяють відновленню та розвитку духовних і фізичних сил людини, її працездатності. При сучасній та перспективній структурі рекреаційних потреб і техніко-економічних можливостях вони використовуються для прямого та опосередкованого споживання та надання курортних і туристичних послуг. Вони є матеріальною і духовною основою функціонування ТРС різного типу. В умовах ринкової економіки, коли існує жорстка конкуренція між об’єктами ринку, до яких, зокрема, належать ТРС, однією з проблем є проблема розподілу обмеженого ресурсу. Іншою з важливих економічних показників функціонування довільного туристично-рекреаційного об’єкту (ТРО) як об’єкта, що продукує комплекс послуг, є задоволення необхідних потреб рекреанта з області обслуговування за умов оптимальної вартості рекреаційних потреб, які у своїй більшості носять нелінійний характер.

Будемо вважати, що на деякій території розміщені *N* ТРО, кожний з яких характеризується певним набором рекреаційних характеристик. Для простоти будемо характеризувати *і*-тий ТРО по *j*-ому виду рекреаційних ресурсів коефіцієнтом рекреаційної привабливості або рекреаційним потенціалом – $\eta_i^j \in [1;\ \mathrm{k}],\ i=1,...,N, j=1,...,M$. Ці величини визначаються, наприклад, за допомогою методу експертних оцінок, значення параметру. Параметр *к* – довільне натуральне число.

Задача 1. Розбити множину рекреантів Ω на їх зони туристично-рекреаційного обслуговування Ω_i^j *N* туристично-рекреаційними об’єктами, які входять в задану ТРС окремо по кожному з *j*–го виду рекреаційних ресурсів (далі - послуг), що продукуються в ТРО так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega,\ j=1,...,M,$$

$$mes\left(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j\right)=0,\ \ i\neq k,\ \ i,k=1,...N,\ j=1,...,M.$$

Припустимо, що рекреанту потрібен набір послуг, які є в даній ТРС, але повного набору послуг немає в жодному *і*-тому ТРО $i=1,...,N$. Тобто рекреант вимушений користуватися деякою підмножиною пунктів рекреації, які є в даній ТРС. Необхідно мінімізувати сумарну вартість рекреаційного процесу:

$$F\left(\left\{\Omega_1^1,...,\Omega_N^1;\Omega_1^2,...,\Omega_N^2;...;\Omega_1^M,...,\Omega_N^M\right\}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[(k+1-\eta_i^j)\phi_i^j\left(Y_i^j\right)+\iint_{\Omega_i^j}c^j\left(x,\tau_i\right)\rho^j\left(x,y\right)dxdy\right],$$

де $\rho^j\left(x,y\right)$ – щільність, з якою розподілений попит на *j*-ий вид послуг в області Ω,

$\left(x,y\right)$– координати знаходження рекреанта,

$\tau_1,...,\tau_N$ – пункти можливого розміщення ТРО,

$c^j\left((x,y),\tau_i\right)$ – транспортні витрати рекреанта для *i*-го ТРО по *j*-му виду послуг;

η_i^j – рекреаційний потенціал *i*-го ТРО по *j*-му виду послуг;

$\phi_i^j\left(Y_i^j\right)$ – залежність рекреаційної вартості *i*-го ТРО від клієнтопотоку по *j*-му виду послуг, де $Y_i^j=\iint_{\Omega_i^j}\rho^j\left(x,y\right)dxdy$ – потужність *i*-го ТРО по *j*-му виду послуг.

Потужність *i*-го ТРО по всім видам послуг визначається сумарним попитом рекреантів, які належать Ω_i^j та не повинна перевищувати існуючі об’єми рекреаційних ресурсів, визначені відповідними обмеженнями:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j\left(x\right)dx=b_i, i=1,...,p,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j\left(x\right)dx=b_i, i=p+1,...,N.$$

При цьому виконуються умови розв’язності задачі:

$$S=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M}\rho^j\left(x\right)dx\le\sum_{i=1}^{N}b_i,\quad 0\le b_i\le S, i=1,...,N.$$

Представлена задача є нелінійною неперервною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини $\Omega\in E^n$ на її неперетинні підмножини $\Omega_1^1,...,\Omega_N^1$; $\Omega_1^2,...,\Omega_N^2$;…; $\Omega_1^M,...,\Omega_N^M$ (серед яких можуть бути і порожні) з фіксованими координатами центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей. Згідно дослідженням, приведеним в [3], спочатку запишемо її у термінах характеристичних функцій, а потім від отриманої нескінченновимірної задачі математичного програмування з булевими значеннями змінних $\lambda_i^j(x)$, $i=1,..., N, j=1,...,M$ здійснимо перехід до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i^j(x)$ на відрізку [0,1].

Задача 2.

$$\min_{(\lambda(\cdot))\in\Gamma_1} \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(k+1-\eta_i^j\right)\varphi_i^j\left(\int_\Omega \rho^j(x)\lambda_i^j dx\right)+\int_\Omega c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\right],$$

де $\Gamma_1=\{\lambda(x):\lambda(x)\in\Gamma$ майже скрізь для $x\in\Omega$;

$$\int_\Omega\sum_{j=1}^{M}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx=b_i,\ i=1,...,p,$$

$$\int_\Omega\sum_{j=1}^{M}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\le b_i,\ i=p+1,...,N\}.$$

Тут $\Gamma=\{\ \lambda(x)=(\lambda_1^1(x),...,\lambda_N^1(x);...;\lambda_1^M(x),...,\lambda_N^M(x)):\ 0\le\lambda_i^j(x)\le 1,\ \ x\in\Omega,$

$i=1,...,\ N,\ j=1,...,M\ ,\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^j(x)=1$ м.с. $x\in\Omega,\ j=1,...,M\}$.

Здійснюємо перехід від задачі 2 через функціонал Лагранжа виду

$$h(\lambda(\cdot),\psi)=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}(k+1-\eta_i^j)\phi_i^j\left(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\right)+\\+\int_\Omega(c^j(x,\tau_i)+\psi_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\end{array}\right]= \tag{1}$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^j\left(\lambda_i^j(\cdot),\psi_i\right),$$

де $\psi=(\psi_1,...,\psi_N)\in\Lambda$ – N- вимірний вектор з дійсними компонентами, причому $\psi_1,...,\psi_p$ – довільного знаку, а $\psi_{p+1},...,\psi_N$ невід'ємні; $\lambda(x)\in\Gamma$ для $x\in\Omega$, $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)\in\Omega^N$, до скінченновимірної задачі з негладким цільовим функціоналом.

У випадку виконання умов сильної регулярності:

$$mes\left\{x\in\Omega:\left(c^j(x,\tau_i)+\psi_i\ +\left(k+1-\eta_i^j\right)\phi_{iY_i^j}^{'j}\left(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^{*j}(x)dx\right)\right)\rho^j(x)=0, i=1,...,N, j=1,...,M\right\}$$

вектор-функція $\lambda_i^{*j}(x)$, яка доставляє мінімум лінійному функціоналу $\Phi_i^j\left(\lambda_i^j(\cdot),\psi_i\right)$ правої частини (1), визначається при кожному фіксованому $\psi\in\Lambda$ із наступного операторного рівняння:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & c^j(x,\tau_i) + \psi_i + (k+1-\eta_i^j)\phi'^{j}_{iY_i^j}(\int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i^{*j}(x)dx) \le \\ & \le c^j(x,\tau_r) + \psi_r + (k+1-\eta_i^j)\phi'^{j}_{rY_{ir}^j}(\int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_r^{*j}(x)dx), \\ & i \ne r \quad \text{м.с. для } x \in \Omega, \ (i = k \text{ на множині міри нуль,} \\ & \text{у точках границі між підмножинами } \Omega_i^j \text{ та } \Omega_r^j), \\ & i, r = 1,...,N, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $Y_i^j = \int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx$.

Отже, згідно з результатами роботи [3], можна привести перехід від нескінченновимірної задачі 2 до пошуку сідлової точки функціонала (1) у вигляді наступної теореми, на основі якої в подальшому буде побудовано алгоритм розв’язання задачі 1.

Теорема 1. Якщо $\varphi_i^j(\cdot)$, $i = 1,...,N$, $j = 1,...,M$ – опуклі, двічі неперервно-диференційовні функції свого аргументу та при кожному фіксованому $\psi \in \Lambda$ має місце умова сильної регулярності

$$mes\left\{ x \in \Omega : \left(c^j(x,\tau_i) + \psi_i + \left(k+1-\eta_i^j\right)\phi'^{j}_{iY_i^j}(\int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i^{*j}(x)dx) \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \rho^j(x) = 0, i = 1,...,N, j = 1,...,M \right\},$$

то сідлова точка $\left(\lambda(\cdot), \psi^*\right)$ (де перша компонента є оптимальним розв'язком задачі 2 функціонала (1) на множині $\left\{\Gamma \times \Omega^N\right\} \times \Lambda$) визначається для $i = 1,...,N$, $j = 1,...,M$ та майже всіх $x \in \Omega$ наступним чином:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j \text{ та } x \notin \Omega_{*q}^j, \ q \le i, \\ 0, & \text{при } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

де

$$\Omega_{*i}^j(x) = \begin{cases} x \in \Omega : & c^j(x,\tau_i) + \psi_i^* + (k+1-\eta_i^j)\phi'^{j}_{iY_i^j}(\int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i^{*j}(x)dx) = \\ & = \min\limits_{r=1,...,N}\left(c^j(x,\tau_r) + \psi_r^* + (k+1-\eta_i^j)\phi'^{j}_{rY_{ir}^j}(\int\limits_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_r^{*j}(x)dx), \right) \\ & i \ne r \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1,...,M, \end{cases}$$

в якості $Y_1^*,...,Y_N^*,$, $\psi_1^*,...,\psi_N^*$, обирається оптимальний розв'язок наступної двоїстої задачі:

$$G(\psi) =$$

$$\max_{Y\in U}\left(-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}(k+1-\eta_i^j)(\phi_i^j\left(Y_i^j\right) - \phi'^j_i\left(Y_i^j\right)Y_i^j) + \int\limits_{\Omega}\min\limits_{r=1,...,N}(c^j\left(x,\tau_r\right) \\ +\psi_r + \phi'^j_{rY_r^j}\left(Y_r^j\right))\rho^j\left(x\right)\lambda_i^j(x)dx\end{array}\right]\right) \to \max$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, Y \in U =$$

$$= \left\{Y = \left(Y_1^1,...,Y_N^1;....;Y_1^M,...,Y_N^M\right) \in E_{N\times M} : 0 \le \sum_{j=1}^{M} Y_i^j \le b_i, i = 1,...,N\right\},$$

при умовах $\psi_i \ge 0, i = p+1,...,N.$

Висновки. Проведено дослідження задачі оптимального розподілу рекреаційних ресурсів в умовах сучасної та перспективної структури рекреаційних потреб. Побудовано математичну модель поставленої задачі, яка є нелінійною неперервною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини $\Omega \in E^n$ на її неперетинні підмножини (серед яких можуть бути і порожні) з фіксованими координатами центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей. Отримано аналітичний розв'язок досліджуваної задачі, до складу якого входять параметри, що відшукуються як оптимальний розв'язок допоміжної двоїстої скінченновимірної задачі оптимізації з негладкими цільовими функціями.

Бібліографічні посилання

1. **Теленик, С.Ф.** Моделі управління розподілом обмежених ресурсів в інформаційно-телекомунікаційній мережі [Текст] / С.Ф. Теленик, А.А. Ролік, М.М.Букасов // Вісник НТУУ «КПІ». Інформати ка, управління та обчислювальна техніка. – К.: Екотех. – 2006. - № 44. – С. 243-246.
2. **Школа, І. М.** Розвиток міжнародного туризму в Україні [Текст] / І. М. Школа**,** В.С. Григорків, В.Ф. Кифяк // Видавництво “Рута” – Чернівці – 1997.
3. **Кісельова, О.М.** Розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин [Текст] / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – Д.: ДНУ, 2011. – С. 151-166.

Надійшла до редколегії: 29.04.2017