УДК 519.85 doi: 10.15421/321712

Е.М. Киселева, С.А. Ус[*], О.Д. Станина[**]
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара
[*]ГВУЗ «Национальный горный университет»
[**]ГВУЗ «Украинский химико-технологический университет»

ПРО АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Предложен алгоритм решения задачи оптимального разбиения множеств с дополнительными связями при фиксированных центрах и отсутствии ограничений на мощности предприятий первого этапа. Алгоритм апробирован на модельных задачах.

Запропоновано алгоритм для розв'язування задачі оптимального розбиття множин із додатковими зв'язками із фіксованими центрами підмножин без обмежень на потужність підприємств першого етапу. Алгоритм апробовано на модельних задачах.

The solving algorithm for optimal sets partition problem with additional links was suggested. Namely, for the model with fixed centers and without restrictions on the first-stage enterprises capacity. Applying the algorithm was illustrated for model tasks.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, задачи размещения-распределения, многоэтапные задачи размещения

Введение. Многие известные и практически важные задачи, возникающие в производственной и научной деятельности человека, могут быть представлены в виде задачи разбиения некоторого множества на его непересекающиеся подмножества. К числу таких задач относятся, например, задачи классификации и идентификации объектов, задачи размещения производства и определения зон обслуживания каждым предприятием, задачи орошения и др. Методы решения задач разбиения множеств в дискретной постановке широко исследуются уже на протяжении столетия. Задачи оптимального разбиения континуального множества (ОРМ) гораздо менее исследованы ввиду их сложности. Внимание к подобным задачам обусловлен тем, что они предоставляют возможность моделирования широкого класса теоретических и практических задач оптимизации. В настоящее время сформулированы линейные, нелинейные, динамические задачи ОРМ, а также задачи ОРМ в условиях неопределенности [4, 5, 7]. В работе [6] подробно представлены теоретические сведения, затрагивающие модели и методы решения линейных непрерывных задач оптимального разбиения множеств, приведена обширная библиография. В монографии [4] детально изучены нелинейные и динамические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств, представлен широкий диапазон практических приложений, в работе [5] показаны приложения результатов теории ОРМ к решению различных задач теории и практики. Нужно отметить, что для всех указанных задач разработаны научно обоснованные методы решения и на их основе сформулированы эффективные алгоритмы, составной частью которых является r-алгоритм Н.З. Шора.

Однако, при решении практических задач размещения-распределения возникает необходимость учета связей с уже существующими объектами (ими могут быть, например, транспортные или сортировочные узы) или учета многоэтапности производственного процесса (расположения предприятий последующих циклов производства). К числу таких задач относятся задачи размещения предприятий горно-обогатительного цикла [13, 14], пунктов сбора и обработки природного сырья [8], оптимизации распределительных систем [12]. Кроме того, они возникают на одном из этапов решения многоэтапных задач размещения производства [9]. Таким образом, исследование многоэтапных непрерывных задач разбиения множеств является одним из актуальных направлений дальнейшего развития теории ОРМ.

Анализ публикаций и задачи исследования. Многоэтапные задачи размещения (МЗР) являются обобщением многоэтапных транспортно-производственных задач. Их изучению посвящено большое количество публикаций, в которых отображены различные математические модели и направления их исследования, представлены методы и алгоритмы решения. Дискретные многоэтапные задачи рассматривались в работах [1, 2, 8, 10, 12, 15].

Под многоэтапными производственно-транспортными задачами понимают задачи, отображающие последовательные процессы выпуска одного вида продукции, доставки его в пункты переработки в другую продукцию, производство этой продукции и доставки ее конечным потребителям (рис. 1).

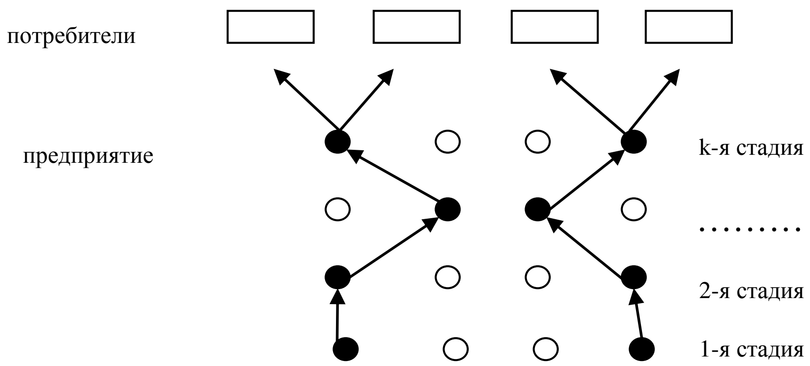

Рис. 1. Задача размещения на цепи

В самых простых постановках в таких задачах рассматриваются два вида продукта: “сырье” и “готовый продукт”. Возможно и большее число наименований: “сырье”, “полуфабрикат”, “готовый продукт”. Двухэтапные задачи размещения на цепи исследовались в работах [2, 11].

Дискретные многоэтапные модели размещения соответствуют ситуации, когда количество возможных мест размещения предприятий конечно и возможное их расположение в области предварительно установлено. В последнее время для решения таких задач часто применяют приближенные алгоритмы [1, 8, 11, 15], в частности алгоритмы генетического типа.

Однако при решении практических задач появляются ситуации, когда возможные места размещения предприятий не ограничены конечным набором известных альтернатив, т.е. предприятия могут быть расположены в любой точке заданной области. Математические модели многоэтапных задач размещения, учитывающие такие условия, были предложены авторами в работах [6, 9, 13, 14]. Они представляют собой смешанные дискретно-непрерывные модели, включающие в себя непрерывные задачи оптимального разбиения множеств.

Содержательную постановку задачи ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах и отсутствии ограничений на мощности предприятий первого этапа можно сформулировать следующим образом [9].

Пусть некоторый ресурс непрерывно распределен в заданной области Ω. Переработка этого ресурса производится в два этапа, а именно: конечное число N предприятий первого этапа, расположенных в изолированных точках τ_i^I, $i=1,2,\ldots N$ области Ω, получают сырье от поставщиков, непрерывно распределенных в этой области, перерабатывают его и отправляют для реализации (или дальнейшей переработки) в пункты конечного потребления, координаты которых $\tau_1^{II},...,\tau_M^{II}$ также заранее определены. Известны мощности предприятий второго этапа и стоимость доставки единицы сырья от поставщика x к предприятию первого этапа и единицы продукции от предприятия первого этапа до предприятия второго этапа. Предполагается, что запас сырья в области достаточен для обеспечения работы предприятий второго этапа и каждый поставщик связан только с одним предприятием первого этапа. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания предприятиями первого этапа и определить объемы перевозок от предприятий первого этапа к предприятиям второго этапа таким образом, чтобы суммарная стоимость доставки сырья и полуфабриката была минимальной.

Целью этой работы является построение алгоритма решения задачи ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах и отсутствии ограничений на мощности предприятий первого этапа.

Материалы исследования. Для построения математической модели введем следующие предположения и обозначения.

Пусть Ω – заданная область; N – количество предприятий первого этапа; τ_i^I, $i=1,2,\ldots N$ – координаты размещения предприятий первого этапа, Ω_i – зона обслуживания i-го предприятия первого этапа $i=1,2,\ldots N$; M – количество предприятий второго этапа; $\tau_1^{II},...,\tau_M^{II}$ – координаты размещения предприятий второго этапа; v_{ij} – объем перевозки от предприятия первого этапа с координатами τ_i^I до предприятия τ_j^{II} второго этапа, $i=1,2,\ldots N$, $j=1,2.\ldots M$.

Предполагается, также что известны:

– спрос b_j^{II} на продукцию для каждого конечного пункта потребления, $j=1,2,...M$;

– запас $\rho(x)$ ресурса в каждой точке области Ω,

– стоимость доставки единицы ресурса $c_i^I(\mathrm{x},\tau_i^I)$, $i=1,2,\ldots N$ – из точки x области Ω в пункт первичной переработки τ_i^I,

– стоимость перевозки единицы продукта $c_j^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})$ из пункта первичной переработки τ_i^I в пункт τ_j^{II}.

Кроме того, будем считать, что мощность *i*-го предприятия первого этапа определяется суммарным запасом ресурса в обслуживаемой области ($i=1,2,\ldots N$).

Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_N$ каждым из предприятий первого этапа и определить объемы перевозок $v_{ij}\geq 0$, $i=1,2,\ldots N$, $j=1,2.\ldots M$ от предприятий первого этапа к пунктам конечного потребления таким образом, чтобы обеспечить минимальную суммарную стоимость доставки сырья из точки *x* области Ω в пункты первичной переработки τ_i^I, $i=1,2,\ldots N$ и конечной продукции, от предприятий первого этапа к пунктам конечного потребления.

Тогда суммарную стоимость доставки сырья из точки *x* области Ω в пункты первичной переработки τ_i^I, $i=1,2,\ldots N$ можно описать таким образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho\left(x\right)dx,$$

а стоимость доставки от предприятий первого этапа в пункты конечного потребления:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}.$$

Далее будем рассматривать функционал вида

$$F\left(\left\{\Omega_1,\ldots\Omega_N\right\},\left\{v_{11},\ldots v_{NM}\right\}\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho\left(x\right)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}. \quad (1)$$

Тут первое слагаемое выражает суммарную стоимость доставки сырья от поставщиков к предприятиям I-го этапа, а второе – суммарную стоимость перевозок между предприятиями I-го и II-го этапов.

Сформулируем ограничения в этой задаче.

Зона обслуживания каждого предприятия первого этапа должна обеспечивать ему наличие необходимого объема сырья, а именно:

$$\int\limits_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} v_{ij}\,, \quad i = \overline{1,N}\,.$$

Спрос предприятий второго этапа должен быть удовлетворен полностью, что можно описать следующим равенством:

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}\,, \quad j = \overline{1,M}$$

Кроме того, каждый поставщик сырья обслуживается только одним предприятием первого этапа, т.е.

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,N}\,,$$

и каждый поставщик обязательно включен в одну из зон обслуживания:

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega\,.$$

В соответствии с [7], определим разбиение множеств следующим образом. Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, выпуклое, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n. Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ из $\Omega \subset E_N$ будем называть разбиением множества Ω на N подмножеств, если выполняются такие условия:

$$\bigcup \Omega_i = \Omega,$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,N}\,,$$

где $mes(\cdot)$ – мера Лебега.

Класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств обозначим через $\sum_\Omega^N$, т.е.

$$\textstyle\sum_\Omega^N = \left\{ \left\{ \Omega_1, \ldots, \Omega_N \right\} :\ \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,N} \right\}.$$

Сформулируем теперь математическую постановку задачи.

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидова пространства E_n на подмножества без отыскания центров их координат при дополнительных связях, будем понимать следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) и такие объемы перевозок $v_{11},...,v_{NM}$, которые обеспечивают

$$\min_{\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\};\{v_{11},...,v_{NM}\}} F(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\};\{v_{11},...,v_{NM}\})$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} v_{ij}\,,\ \ i=\overline{1,N}\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}\,,\ \ j=\overline{1,M}\,, \tag{3}$$

$$\Omega \in \textstyle\sum_{\Omega}^{N}\,, \tag{4}$$

$$v_{ij} \ge 0\,,\ \ j=1,2\ldots M\,,\ i=1,2,\ldots N\,.$$

Здесь ограничения (2) выражают баланс между возможностями предприятий I-го и II-го этапов, ограничение (3) задает мощность для каждого из предприятия II-го этапа.

Функции $c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)$, $i=\overline{1,N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω; $\rho\left(x\right)$ – действительная, интегрируемая, определенная на Ω функция; τ_i^I, $i=\overline{1,N}$, τ_j^{II}, $j=\overline{1,M}$ – заданные точки области Ω; $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$ – заданные неотрицательные числа; b_j^{II}, $j=\overline{1,M}$ – заданные действительные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи:

$$\sum_{j=1}^{M} b_j^{II} = \int_{\Omega} \rho(x)dx\,. \tag{5}$$

Интегралы понимаются в смысле Лебега.

Решение этой задачи основано на методе ОРМ, описанном в монографии [7]. Его идея состоит в переходе от исходной задачи через характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств Ω_i, $i=1,2,...,N$ к задаче с булевыми переменными и затем к задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$, $i=1,2,...,N$ из отрезка [0,1], а именно.

Задача 2. Найти

$$I(\lambda^*(\cdot),v^*) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma_2,\,v\in R_{NM}^{+}} I(\lambda(\cdot),v)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j\,,\ \ j = 1,2,\ldots,M\,, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx,\ i = 1,2,...,N\,, \tag{7}$$

$$\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2\,,\ v^* \in R_{NM}^{+}\,,$$

где

$$I(\lambda(\cdot),v) = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}\,, \tag{8}$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\,\}, \tag{9}$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x)) : 0 \le \lambda(x) \le 1,\ \ \forall x \in \Omega,\ i = \overline{1,N}\,\}. \tag{10}$$

Результат решения этой задачи можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. Оптимальное решение $\{\lambda^*, v^*\}$ задачи 2 п.в. $x \in \Omega$ определяется следующим образом:

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 1, \text{ если } (c_i^I(x,\tau_i^I) + \psi_i^*)\rho(x) = \min\limits_k (c_k^I(x,\tau^I) + \psi_k^*)\rho(x), \\ 0, \text{ если } (c_i^I(x,\tau_i^I) + \psi_i^*)\rho(x) \ne \min\limits_k (c_k^I(x,\tau^I) + \psi_k^*)\rho(x),\ \forall x \in \Omega,\ i = \overline{1,N}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\{\psi^*, \eta^*\}$ – оптимальное решение двойственной задачи

$$G(\{\psi,\eta\}) \to \max\,,\ \psi \in E_N\,, \eta \in E_M\,, \tag{12}$$

$$G(\psi,\eta) = \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1,N}} (c_k^I(x,\tau_k^I) + \psi_k)\rho(x)dx +$$

$$+ \min_{v \in R_{NM}^{+}} \Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^I) + \eta_j - \psi_i)v_{ij}\Big) - \sum_{j=1}^{M} b_j\eta_j\,. \tag{13}$$

При этом пара $(\{\lambda^*, v^*\},\{\psi^*,\eta^*\}) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^{+}\} \times \{E_N \times E_M\})$ – седловая точка функционала Лагранжа

$$L(\{\lambda^*(\cdot),v^*\},\Psi^*(\cdot)) = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M}\eta_j(b_j - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}) + \int_{\Omega}\psi_0(x)(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x) - 1)dx + \sum_{i=1}^{N}\psi_i^*(\sum_{j=1}^{M} v_{ij}^* - \int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i^*(x)dx)\,. \tag{14}$$

Теорема 2. Пусть в задаче 2 $\rho(x) \geq 0$ п.в. для $x \in \Omega$. Тогда для того, чтобы пара $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^{+}$ была решением задачи 2, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\psi_i, i = 1,...,N$ и $\eta_j, j = 1,\ldots,M$, что:

1) $c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau^I) + \psi_k^*,\ i \neq k, \forall x \in \Omega, k = 1,...,N$;

2) $\begin{cases} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \psi_i - \eta_j, \text{ если } v_{ij}^* > 0, \\ c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) > \psi_i - \eta_j. \text{ если } v_{ij}^* = 0. \end{cases}$

Для решения поставленной задачи предложен итерационный алгоритм, составной частью которого является метод потенциалов решения транспортной задачи [3]. Опишем предложенный алгоритм.

Алгоритм решения задачи 1.

Область Ω заключаем в параллелепипед Π, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Полагаем $\rho(x) = 0$ для точек $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное значение $\lambda_i^0(x)$, $i = \overline{1, N}$, узлах сетки.

Шаг 0 (подготовительный).

1. Рассчитываем значения $b_i^{I(0)}$, $i = \overline{1, N}$, по формуле:

$$b_i^{I(0)} = \int_\Omega \rho(x) \lambda_i^0(x) dx .$$

2. Определяем начальные значения $v_{ij}^{(0)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ и значения потенциалов $\psi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$ и $\eta_j^{(0)}$, $j = \overline{1, M}$, решая транспортную задачу такого вида:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^{(0)} \to \min , \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^{(0)} = b_j^{II} ,\ j = 1,2,\ldots,M , \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij}^{(0)} = b_i^{I(0)} ,\ i = 1,2,...,N , \tag{17}$$

$$v_{ij}^{(0)} \geq 0,\ i = 1,2,...,N ,\ j = 1,2,\ldots,M .$$

Пусть в результате k шагов алгоритма $k = 1,2,\ldots$ получены значения потенциалов $\psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \ldots \psi_N^{(k)}$.

Опишем шаг $(k+1)$-й шаг, $k = 0,1,...$

1. Вычисляем значение $\lambda_i^{k+1}(x)$ в узлах сетки по следующей формуле:

$$\lambda_i^{k+1}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_i^{(k)}\rho(x)=\min\limits_l(c_l^I(x,\tau_l^I)+\psi_l^{(k)})\rho(x);\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

2. Вычисляем значения $b_i^{I(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$,

$$b_i^{I(k+1)}=\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i^{(k+1)}dx\,.$$

3. Определяем начальные значения $v_{ij}^{(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$ и значения потенциалов $\psi_i^{(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$ и $\eta_j^{(k+1)}$, $j=\overline{1,M}$, решая транспортную задачу такого вида:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}^{(k+1)}\to\min, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}^{(k+1)}=b_j^{II},\ j=1,2,\ldots,M, \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}^{(k+1)}=b_i^{I(k+1)},\ i=1,2,...,N, \tag{20}$$

$$v_{ij}^{(k+1)}\ge 0,\ i=1,2,...,N,\ j=1,2,\ldots,M.$$

4. Вычисляем значение целевого функционала по формуле (8) при $\lambda_i(x)=\lambda_i^{(k+1)}(x)$, $i=\overline{1,N}$, $v_{ij}=v_{ij}^{(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$.

5. Если хотя бы одно из условий

$$\left|F_k-F_{k-1}\right|\le\varepsilon,\ \ \varepsilon>0, \tag{21}$$

$$\left\|\lambda_k-\lambda_{k-1}\right\|\le\varepsilon,\ \ \varepsilon>0 \tag{22}$$

выполняется, то переходим к п. 6, если ни одно из них не выполнено, то к $(k+2)$-му шагу алгоритма.

6. Полагаем $\lambda_i^*(x)=\lambda_i^{(l)}(x)$, $i=\overline{1,N}$, $v_{ij}^*=v_{ij}^{(l)}$, $i=\overline{1,N}, j=\overline{1,M}$, $\psi_i^*=\psi_i^l$, $i=\overline{1,N}$ и $\eta_j^*=\eta_j^{(l)}$, $j=\overline{1,M}$, где l – номер итерации, на котором выполнилось условие (21).

7. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (8) при $\lambda_i(x)=\lambda_i^*(x)$, $i=\overline{1,N}$, $v_{ij}=v_{ij}^*$, $i=\overline{1,N}, j=\overline{1,M}$ и для контроля правильно-

сти счета – значение двойственного функционала по формуле (13) при $\psi_i = \psi_i^*$, $i = \overline{1,N}$ и $\eta_j = \eta_j^*$, $j = \overline{1,M}$.

Алгоритм описан.

Предложенный алгоритм был апробирован на следующих модельных задачах.

Модельная задача 1. Поставщик некоторой продукции, производимой четырьмя предприятиями первого этапа и перерабатываемой тремя предприятиями второго этапа, непрерывно распределен в области $\Omega = \left\{ \left(x, y \right) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \right\}$. Известны координаты расположения предприятий первого $\tau_1^I = \left(0,25; 0,25 \right)$, $\tau_2^I = \left(0,25; 0,75 \right)$, $\tau_3^I = \left(0,75; 0,75 \right)$, $\tau_4^I = \left(0,75; 0,25 \right)$ и второго $\tau_1^{II} = \left(0,3; 0,4 \right)$, $\tau_2^{II} = \left(0,4; 0,3 \right)$, $\tau_3^{II} = \left(0,3; 0,8 \right)$ этапов. Функция, описывающая затраты на транспортировку сырья от поставщика с координатами $\left(x, y \right)$ к предприятию с координатами $\tau_i^I = \left(\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I \right)$, для всех предприятий одинакова и задана в виде:

$$c_i^I (x, y, \tau_i^I) = \sqrt{\left(x - \tau_{1i}^I \right)^2 + \left(y - \tau_{2i}^I \right)^2} \, , \; i = \overline{1,4}.$$

Затраты на транспортировку продукции от предприятия $\tau_i^I = \left(\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I \right)$ первого этапа к предприятию $\tau_j^{II} = \left(\tau_{1j}^{II}, \tau_{2j}^{II} \right)$ второго этапа описываются в виде:

$$c_{ij}^{II} (\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \sqrt{\left(\tau_{1i}^I - \tau_{1j}^{II} \right)^2 + \left(\tau_{2i}^I - \tau_{2j}^{II} \right)^2} \, , \; i = \overline{1,N}, \, j = \overline{1,M} \, .$$

Запасы сырья равномерно распределены в области Ω. Для простоты полагаем, что $\rho(x, y) = 1$. Ограничения на производственные мощности предприятий второго этапа заданы равными 0,2, 0,4 и 0,4 соответственно.

Необходимо разбить область Ω на зоны сбора сырья и определить объемы поставок продукции от предприятий первого этапа к предприятиям второго этапа таким образом, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат (1) на доставку сырья и готовой продукции при условиях (2) – (4).

На рис. 1 представлены исходные данные, взятые для решения задачи и размещение центров предприятий первого (круги) и второго (квадраты) этапов.

Для решения поставленной задачи область Ω покрывалась сеткой с шагом $h = 0{,}01$. Условием прекращения счета было выполнение одного из неравенств:

$$\left| F_k - F_{k-1} \right| \le 10^{-6},$$

$$\left\| \lambda_k - \lambda_{k-1} \right\| \le 10^{-6}.$$

В результате применения описанного алгоритма были получены следующие результаты:

– оптимальное разбиение области Ω представлено на рис. 2;

– оптимальные объемы перевозок (указаны в табл. 1);

– мощности предприятий первого этапа равны соответственно

$$b_1^I = 0{,}5853;\ b_2^I = 0{,}2965;\ b_3^I = 0{,}072;\ b_4^I = 0{,}0462.$$

– Минимальное значение целевого функционала, полученное по формуле (1), $I = 0{,}97690$;

– значение двойственного функционала, полученное по формуле (13), $G^* = 0{,}97301$.

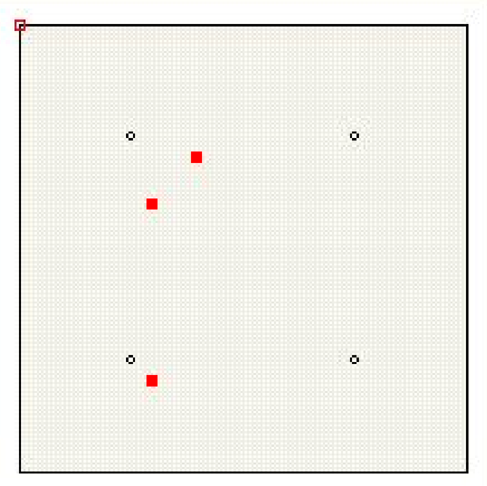

Рис. 1. Исходные данные модельной задачи 1

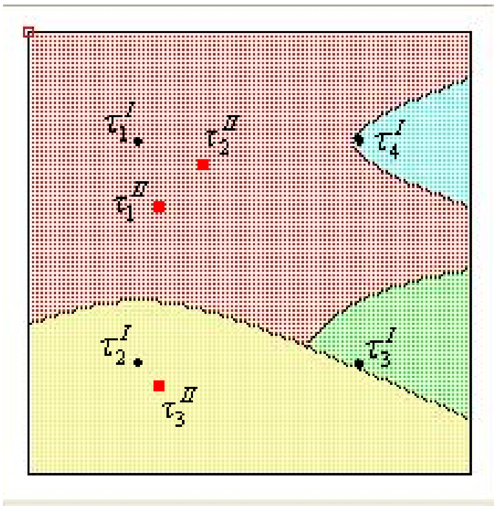

Рис. 2. Результат решения модельной задачи 1

Таблица 1

Объемы перевозок, полученные при решении модельной задачи 1

	τ_1^{II}	τ_2^{II}	τ_3^{II}
τ_1^I	0,2	0,385	0
τ_2^I	0	0	0,297
τ_3^I	0	0	0,072
τ_4^I	0	0,015	0,031

Для сравнения эта же задача была решена без учета размещения предприятий второго этапа (задача ОРМ при фиксированных центрах подмножеств без ограничений [7]). Оптимальное разбиение множества Ω, полученное в результате решения задачи, показано на рис. 3.

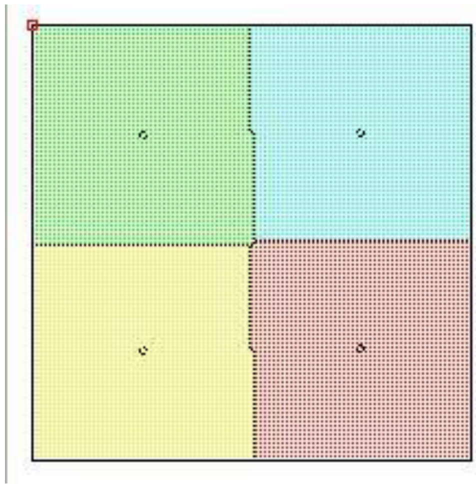

Рис. 3. Результат решения задачи ОРМ для модельной задачи1

Полученные значения мощностей предприятий:

$$b_1^I = 0{,}2474;\ b_2^I = 0{,}2426;\ b_3^I = 0{,}2476;\ b_4^I = 0{,}2425.$$

Значение целевого функционала: $I = 0{,}5753$

Как видим, появление дополнительных связей (предприятия второго этапа) существенно влияет на разбиение. Если таких связей нет, то область разделена на равные по мощности подмножества, при учете же таких связей – большую площадь имеет область обслуживания предприятия, которое находится ближе к предприятиям второго этапа – τ_1^I, и соответственно, меньшие затраты на перевозку готового продукта к предприятиям второго этапа.

Модельная задача 2. Эта задача отличается от модельной задачи 1 количеством предприятий второго этапа. А именно, предположим, что имеется два предприятия второго этапа с координатами $\tau_1^{II} = (0{,}3;0{,}4)$, $\tau_2^{II} = (0{,}4;0{,}3)$. Ограничения на производственную мощность предприятий второго этапа были приняты равными «0,2» и «0,8» соответственно. Исходные данные, взятые для решения задачи и размещение центров предприятий первого (круги) и второго (квадраты) этапов, представлены на рис. 4.

В результате применения описанного алгоритма были получены следующие результаты:

– оптимальное разбиение области Ω представлено на рис. 5;

– оптимальные объемы перевозок (указаны в табл. 2);

– мощности предприятий первого этапа равны соответственно

$$b_1^I = 0{,}82;\ b_2^I = 0;\ b_3^I = 0{,}153;\ b_4^I = 0{,}027.$$

– минимальное значение целевого функционала, полученное по формуле (1), $I = 0{,}92363$;

– значение двойственного функционала, полученное по формуле (13), $G^* = 0{,}91954$.

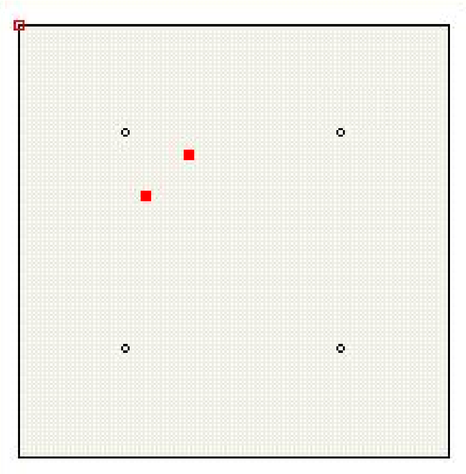

Рис. 4. Исходные данные для модельной задачи 2

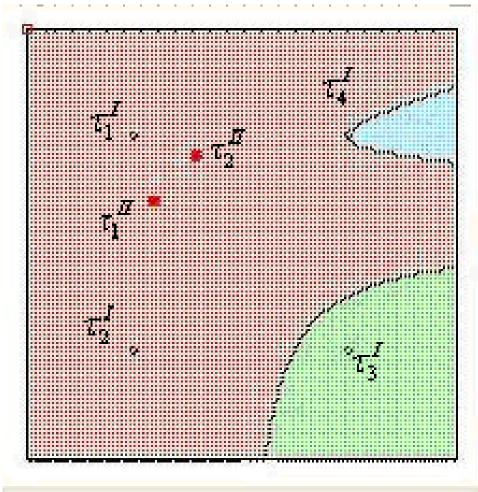

Рис. 5. Результат решения модельной задачи 2

Таблица 2

Объемы перевозок, полученные при решении модельной задачи 2

	τ_1^{II}	τ_2^{II}
τ_1^I	0.2	0.62
τ_2^I	0	0
τ_3^I	0	0.153
τ_4^I	0	0.027

Очевидно, что изменение вида дополнительных связей также существенно влияет на вид разбиения множества.

Выводы. В работе представлен алгоритм решения задачи ОРМ с дополнительными связями при фиксированных центрах подмножеств и отсутствии ограничений на мощности предприятий первого этапа. Предложенный алгоритм апробирован на модельных задачах.

Библиографические ссылки

1. **Алексеева, Е.В.** Генетический локальный поиск для задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов [Текст] / Е. В. Алексеева, Ю. А. Кочетов // Дискретный анализ и исследование операций. Январь -июнь 2007. Серия 2. Том 14, № 1 . с. 3 – 31
2. **Гимади, Э.Х.** Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи [Текст] / Э.Х Гимади // Дискретный анализ и исследование операций. Октябрь – декабрь 1995. –Том 2, № 4. – С. 13–38.
3. **Гольштейн, Е.Г.** Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст] / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин, – М.: Наука, 1969. – 384 с.
4. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.

5. **Киселева, Е.М.** Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус / М-во образования и науки Украины; Нац. горн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 270 с.
6. **Киселева, Е.М.** О задачах оптимального разбиения множеств с дополнительными связями [Текст] / Е.М. Киселева, С.А. Ус, О.Д. Станина // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д.: ДНУ, 2016, С. 67-78.
7. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова Думка, 2005 – 564 с.
8. **Русяк, И.Г.** Решение задачи оптимизации схемы размещения производства древесных видов топлива по критерию себестоимости тепловой энергии [Текст] / И.Г. Русяк, Д.Г. Нефедов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4. – № 3. с. 651-659.
9. **Ус, С.А.** О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий [Текст] / Ус С.А., Станина О.Д // Питания прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.пр. – Д.: Вид-во «Ліра», 2014, с.258-268
10. **Drezner, Z.** Facility Location: Application and Theory [Text] / Z. Drezner, H. Hamacher / Berlin: Springer. 2001
11. **Fengqi, You** Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management [Text] / Fengqi You , Ignacio E. Grossmann // *Ind. Eng. Chem. Res.* 2008, *47,* 7802–7817
12. **Trubin, V. A.** Simple multistage location problem on a treelike network [Text] / V. A. Trubin, F. A. Sharifov // Cybernetics and Systems Analysis. November–December, 1992, Volume 28, Issue 6, pp 912-917
13. **Us, S.** On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry [Text] / S. Us, O. Stanina // Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig – Pivnyak, Bondarenko, Kovalevska (eds), 2015, pp. 419-424
14. **Us, S.** The Methods and Algorithms for Solving Multi-stage Location-allocation Problem [Text] / Us S.A, Stanina O.D // The methods and algorithms for solving multi-stage location-allocation problem, Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control, Balkema 2016, pp 163-172.
15. **Kochetov, Yu.** Bilevel facility location: discrete models and computational methods [Text] // Proceedings Of XXXVII Symposium în Operations Research – (SYMOPIS-2010). – 2010. – pp 12–16

Надійшла до редколегії 16.05.2017