УДК 519.8 doi: 10.15421/321713

І.В. Козін, Я.В. Терешко
Запорізький національний університет

ФРАГМЕНТАРНА МОДЕЛЬ І ЕВОЛЮЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ РІВНОВАЖНОГО РОЗМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ

У роботі представлені результати дослідження фрагментарної моделі для задачі рівноважного розміщення вантажу на обмеженій площі. Показано, що задача рівноважного розміщення може розглядатися як оптимізаційна задача на фрагментарній структурі. Запропоновано еволюційний алгоритм для пошуку близьких до оптимального розв'язків задачі на множині перестановок з геометричним оператором кросоверу.

В работе представлены результаты исследования фрагментарной модели для задачи равновесного размещения груза на ограниченной площади. Показано, что задача равновесного размещения может рассматриваться как оптимизационная задача на фрагментарной структуре. Предложен эволюционный алгоритм для поиска близких к оптимальному решений задачи на множестве перестановок с геометрическим оператором кроссовера.

The paper presents the results of an investigation of a fragmentary model for the problem of equilibrium placement of cargo in a limited area. It is shown that the equilibrium allocation problem can be considered as an optimization problem on a fragmented structure. An evolutionary algorithm is proposed for finding solutions close to optimal for a set of permutations with a geometric crossover operator.

Ключові слова: **задача рівноважного розміщення вантажу, фрагментарна структура, еволюційний алгоритм, геометричний кросовер.**

Вступ. У багатьох задачах комбінаторної оптимізації відшукання точного розв'язку є важкою проблемою. У багатьох випадках єдиний метод, що гарантує відшукання оптимального розв'язку, - це лише повний перебір всіх допустимих розв'язків. Ця проблема виникає при знаходженні точного розв'язку багатьох задач розміщення, маршрутизації, упаковки. Зокрема, ця проблема завжди має місце при знаходженні розв'язку комбінаторних задач, для яких доведено властивість *NP*-труднощі.

Для таких задач виправдане застосування алгоритмів, які відносяться до класу метаеврістик. Більшість таких алгоритмів не гарантує якості одержуваного розв'язку, проте їх застосування виявляється виправданим по ряду причин. Зокрема ці алгоритми досить швидкі і, крім того, прості в реалізації.

У статті розглядається задача розміщення однотипних за розміром вантажів на обмеженій площі з критерієм рівноваги. Така задача нерідко виникає в транспортній логістиці при розміщенні однакових за розміром, але сильно відмінних по вазі контейнерів на залізничних платформах, в вантажних трюмах суден, транспортних відсіках літаків.Розглянуто один з підходів до пошуку розв'язків подібних задач, заснований на застосуванні фрагментарної моделі і еволюційного алгоритму певного виду [1-2]. Такий підхід вдалося успішно застосувати для вирішення ряду практичних задач розкрою [2] і деяких задач теорії розкладів [1]. Особливістю підходу є можливість відшукання допустимих розв'язків складних задач з критеріями, що важко формалізуються, в яких сам пошук значення критерію реалізується за допомогою деякого (іноді досить складного) алгоритму. Для пошуку розв'язків, близьких до оптимального, для задачі рівноважного розміщення в статті пропонується підхід, заснований на поєднанні еволюційного і фрагментарного алгоритмів.

Постановка проблеми.

Нехай заданий набір *N* прямокутних блоків однакового розміру. Кожен блок визначається трійкою $A_i = (h, w, p_i), i = 1,2,...,N$, де h - висота, w - ширина блоку (вони передбачаються однаковими для всіх блоків), а p_i - вага блоку з номером *i* (рис.1).

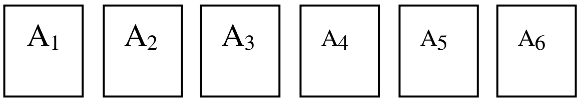

Рис.1 Приклад розміщення блоків (*N*=6)

Блоки повинні бути розміщені в прямокутної області, досить великих розмірів. На рис.2 представлена область розташування блоків. Точками позначені місця можливого розміщення центрів блоків. Точки занумеровані числами 1,2,…S ($S > N$) .

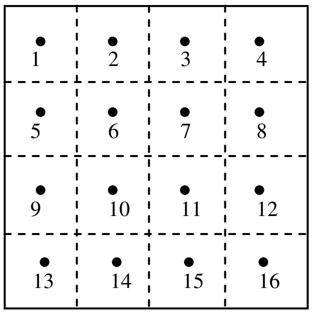

Рис.2. Область розташування блоків (*S*=16)

Розміщення блоків відбувається в порядку нумерації точок розміщення їх центрів.

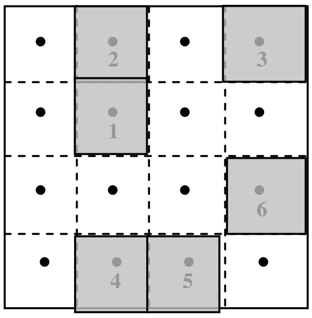

Рис.3. Допустиме розміщення блоків

Нехай задана точка A_0 - умовний центр. Розглянемо приклад допустимого розміщення блоків (Рис.3). Центри блоків співпадають з точками можливих розміщень центрів. Нумерація точок розміщення центрів змінена. При цьому повороти блоків заборонені.

Визначимо множину точок $\{A_i\}$- центрів місць можливого розташування блоків. Позначимо через $\rho(U,V)$ евклідову відстань між точками U і V на площині. Задача полягає у визначенні такого розміщення блоків, при якому сумарний момент імпульсу

$$M = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \rho(A_0, A_i)$$

буде найменшим.

Таким чином, задача рівноважного розміщення може розглядатися як задача відшукання перестановки $s = \begin{pmatrix} 1,2,....,S \\ k_1,k_2,...,S \end{pmatrix}$, для якої значення функції

$$F(s) = \sum_{i=1}^{N} p_1 \cdot \rho(A_0, A_i)$$

мінімально.

Фрагментарні структури і їх властивості.

Визначення 1. Фрагментарною структурою (X,E) на скінченій множині X називається сімейство його підмножин $E = \left\{E_1, E_2, ..., E_n\right\}$,где $E_i \subseteq X$ таке, що $\forall E_i \in E, E_i \neq 0\ \exists e \in E_i,\ E_i \setminus \left\{e\right\} \in E.$

Елементи з множини E будемо називати допустимими фрагментами. Таким чином, для будь-якого допустимого фрагмента E_i існує нумерація його елементів $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{is_i}\}$ така, що $\forall k = 1,2,...,s_i \quad \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ik}\} \in E$.

Визначення 2. Одноелементні множини, які є допустимими фрагментами, будемо називати елементарними фрагментами.

Визначення 3. Фрагмент називається максимальним, якщо він не є підмножиною будь-якого іншого фрагмента.

Очевидні наступні властивості фрагментів:

Властивість 1. Порожня множина є фрагментом, $\varnothing \in E$.

Властивість 2. Нехай $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left|E_i\right| = M$. Тоді в E знайдуться елементи, потужності яких будуть $M, M-1, M-2, ..., 0$.

Будь-яка фрагментарна структура може бути описана у вигляді ациклічного орієнтованого графа з однією кореневою вершиною. Вершини в цьому графі відповідають фрагментам і будь-які дві суміжні вершини відрізняються рівно на один елемент.

Визначення 4. Дві фрагментарні структури (X, E') і (X', E'') на однієї і тієї ж множині *X* будемо називати рівними, якщо $E' = E''$.

Визначення 5. Дві фрагментарні структури (X, E') і (X', E'') на однієї і тієї ж множині *X* будемо називати ізоморфними, якщо ізоморфні орієнтовані графи, які їх представляють.

У будь-якої скінченої множини *X* елементи можна занумерувати. Тим самим дослідження фрагментарною структури на цій множині можна з точністю до ізоморфізму звести до дослідження фрагментарної структури на скінченій множині натуральних чисел $\{1, 2, .., n\}$.

Теорема 1 [3]. *Якщо* (X, E) - фрагментарна структура на множині *X*, то для будь-якої непорожньої множини $A \in E$ існує нумерація її $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ елементів така, що $\forall k, k = \overline{1, n}$ множина $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in E$.

З теореми 1 випливає, що всякий допустимий фрагмент можна побудувати з порожньої множини, послідовно додаючи до неї елементи так, щоб на кожному кроці такої процедури отримана підмножина була допустимим фрагментом.

Максимальний фрагмент може бути побудований за допомогою наступного "жадібного" алгоритму:

а) елементи множини *X* лінійно упорядковуються;

б) на початковому етапі вибирається порожня множина $X_0 = \varnothing$;

в) на кроці з номером $k+1$ вибирається перший по порядку елемент $x \in X \setminus X_k$ такий, що $X_k \bigcup \{x\} \in E$;

г) алгоритм закінчує роботу, якщо на черговому кроці не вдалося знайти елемент $x \in X \setminus X_k$ з потрібною властивістю.

Алгоритм, що наведено вище, для побудови максимального фрагмента у фрагментарною структурі називається фрагментарним алгоритмом. Результат застосування фрагментарного алгоритму визначається заданим лінійним порядком на множині *X*. Таким чином, будь-який максимальний фрагмент може бути описаний деякою перестановкою елементів множини *X*. Нехай $A \in E$. Умову для елемента $x \in X$, при якому $A \bigcup \{x\} \in E$, будемо називати умовою приєднання елемента *x*.

Теорема 2 [3]. *Якщо* $\forall A \in E$ і $\forall x \in X$ існує алгоритм поліноміальної трудомісткості по числу елементів множини *X* для перевірки умови приєднання, то задачу побудови максимального фрагмента можливо розв'язати з поліноміальною трудомісткістю.

Задача про рівноважне розміщення вантажу може розглядатися як задача на фрагментарній структурі. Тут в якості елементарних фрагментів виступають блоки, що розміщуються. Кожен допустимий фрагмент – це деякий упорядкований набір блоків. Максимальний фрагмент - це розміщення всіх блоків, отримане за деякою перестановкою блоків.

Еволюційний алгоритм.

Еволюційні (генетичні) алгоритми докладно розглядалися в численних публікаціях [4-6]. Для ряду оптимізаційних задач вдалося запропонувати досить ефективні процедури пошуку оптимальних рішень, засновані на застосуванні еволюційних алгоритмів. Для реалізації еволюційного алгоритму необхідно виділити ряд об'єктів і процедур, сукупність яких будемо називати еволюційної моделлю. Основні складові еволюційної моделі наступні:

- базова множина розв'язків: множина допустимих розв'язків X, на якої шукається оптимальний розв'язок задачі;
- оператор побудови початкової популяції: процедура, яка дозволяє виділити на множині всіх допустимих розв'язків її підмножину $Y \subseteq X$ для подальшої еволюції;
- критерій селекції - алгоритм, який дозволяє порівнювати за якістю розв'язки в межах заданої популяції;
- оператор кросоверу $K : X \times X \to X$, що дозволяє за двома допустимим розв’язками-батьками побудувати новий розв'язок-нащадок з множини допустимих розв'язків;
- оператор мутації $M : X \to X$;
- оператор відбору, який виділяє множину пар для виконання операції кросоверу;
- оператор еволюції, що дозволяє будувати нові популяції з множини батьків і нащадків;
- правило зупинки, яке визначає умову зупинки еволюційного алгоритму.

Опишемо коротко принцип роботи еволюційного алгоритму. На початковому етапі за допомогою оператора початкової популяції будується множина розв'язків Y_0. На кожному черговому кроці передбачається заданою деяка множина допустимих розв'язків - поточна популяція.

На першому кроці це множина $Y = Y_0$. Для кожного з елементів множини Y обчислюється значення критерію селекції. Далі за допомогою оператора відбору в поточній популяції Y вибирається множина пар для кросоверу. До кожної парі з обраної множини пар застосовується оператор кросоверу, а потім до результату кросоверу застосовується оператор мутації з деякою ймовірністю. Таким шляхом знаходиться множина елементів – нащадків Y_{np}. До проміжної популяції $Y \cup Y_{np}$, яка є об'єднанням поточну популяцію і множину нащадків, застосовується оператор еволюції, який виділяє на цій множині нову поточну популяцію.

Процес еволюції повторюється до тих пір, поки не буде виконана умова зупинки еволюційного алгоритму. Блок схема еволюційного алгоритму приведена на рис.4.

Властивості фрагментарних структур дозволяють побудувати особливий клас еволюційних алгоритмів на фрагментарних структурах - ЕВФ-алгоритми.

ЕВФ - алгоритм є комбінацією еволюційного і фрагментарного алгоритму. Наведемо еволюційну модель і принцип дії такого алгоритму.

Як множина допустимих розв'язків розглядається підмножина максимальних (квазімаксімальних) фрагментів на заданій фрагментарній структурі. Кожен фрагмент з цієї множини визначається як результат роботи фрагментарного алгоритму при деякій заданій перестановці елементарних фрагментів. Таким чином, будь-якому допустимому розв’язку відповідає певна перестановка чисел 1,2, ..., *N*, де *N*-кількість елементарних фрагментів. Для кожного допустимого розв'язку визначено значення цільової функції.

Базова множина *X* еволюційної моделі - це множина $S_N = \{i_1, i_2, ..., i_N\}$ всіх перестановок чисел 1,2, ..., *N*. Оператор побудови початкової популяції виділяє довільну підмножину заданої потужності *q* з множини *X*.

Правило обчислення критерію селекції влаштовано таким чином: по заданій перестановці фрагментів за допомогою фрагментарного алгоритму будується максимальний допустимий фрагмент. Обчислюється значення цільової функції задачі для цього фрагмента.

Наведемо тепер визначення оператора кросоверу. Нехай $U = (u_1, u_2, ..., u_N)$ і $V = (v_1, v_2, ..., v_N)$ - дві довільні перестановки. Перестановка-нащадок будується наступним чином: послідовності *U* і *V* проглядаються з початку. На *k*-му кроці вибирається найменший з перших елементів послідовностей і додається в нову перестановку-нащадок. Потім цей елемент вилучається з двох послідовностей-батьків. Наприклад, *K* ((1,5,3,7,8,4,6,2), (2,4,5,1,7,3,8,6)) = (1,2,4,5,3,7,8,6).

Такий оператор кросоверу є геометричним [7] у метриці Кендала, що визначена на множині перестановок.

Оператор мутації М виконує випадкову транспозицию (заміну місцями двох елементів) в перестановці.

Оператор селекції вибирає випадковим чином набір пар із заданої множини пар перестановок поточної популяції.

Оператор еволюції елементи проміжної популяції впорядковує в послідовність за спаданням значення критерію селекції. В якості нової поточної популяції вибираються перші *q* елементів послідовності.

Звичайне правило зупинки - кількість поколінь досягло граничної межі *L*. Краща за значенням критерію селекції перестановка з останньої побудованої популяції визначає наближений розв'язок задачі.

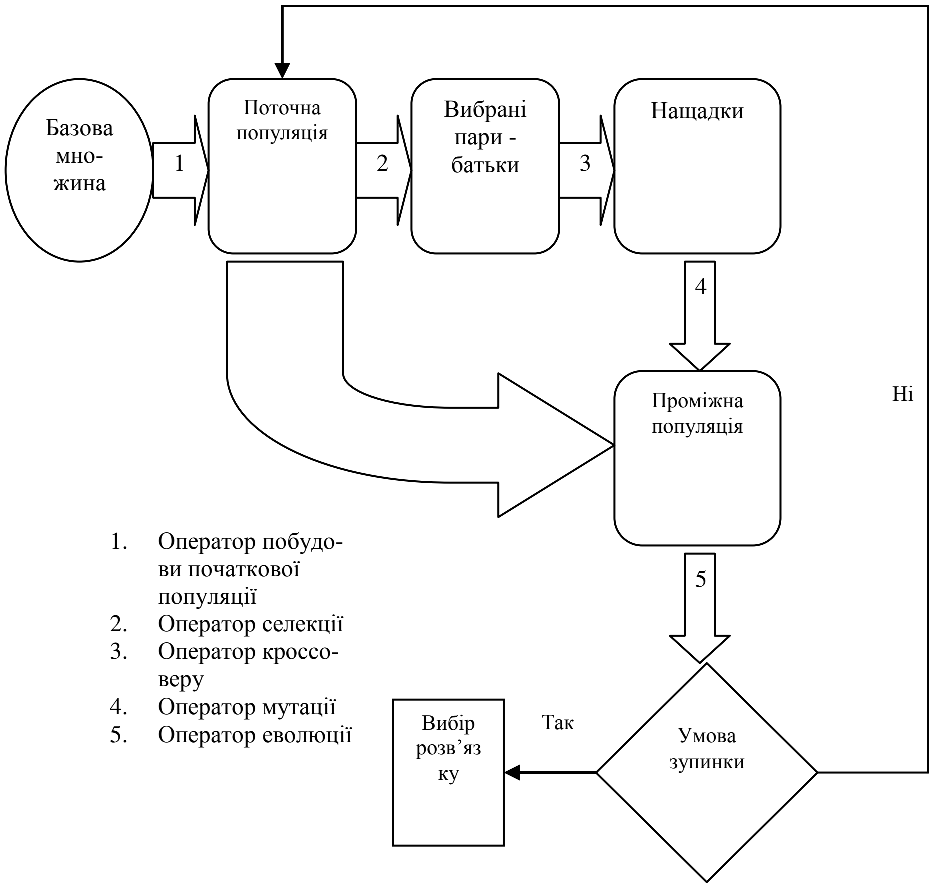

Рис.4.Схема еволюційного алгоритму

Запропонований підхід є універсальним і дозволяє застосовувати один і той же еволюційний алгоритм до будь-яких оптимізаційних задач на скінченних фрагментарних структурах.

Результати тестування. Розумним представляється порівняння роботи ЕВФ-алгоритму з іншими відомими алгоритмами. Звичайно, хотілося б отримати чисельні оцінки збіжності алгоритму, порівняння по швидкості і точності одержуваного розв'язку. Однак, як правило, для *NP*-важких задач, в яких застосовується ЕВФ-алгоритм, це неможливо. Таким чином, чисельні експерименти для оцінки якості алгоритму дають лише статистичні оцінки його якості у порівнянні з іншими наближеними алгоритмами.

Розглядалася серія із 100 задач різної розмірності. Для кожної задачі були використані алгоритм ймовірнісного пошуку, локального пошуку з ймовірнісним вибором початкової точки та ЕВФ-алгоритм. Кількість обчислень значень цільової функції для кожного алгоритму стосовно однієї задачі була однаковою. На всіх задачах серії ЕВФ-алгоритм показав найкращий (відносно значень цільової функції) результат.

Висновок. Теоретичні результати і результати чисельних експериментів показують, що ЕВФ-алгоритм може досить ефективно використовуватися як евристичний алгоритм для пошуку наближених розв'язків задачі рівноважного розміщення. На відміну від класичних евристичних алгоритмів ЕВФ-алгоритм є керованим і якість його роботи може зростати при збільшенні ряду параметрів алгоритму таких як, величина популяції, число пар для селекції, кількість поколінь, кількість еволюцій тощо. Програмна реалізація алгоритму не залежить від виду цільової функції (за винятком алгоритму отримання значень функції). Тому той же самий підхід може використовуватися і при іншому виді цільової функції, а також в багатокритеріальній постановці задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Козин, И.В.** Фрагментарные алгоритмы в системах поддержки принятия решений [Текст] /И.В.Козин// Питання прикладної математики і математичного моделювання, збірник наукових праць. ДНУ: Дніпропетровськ, 2006. — С. 131—137.
2. **Козин, И.В.** Фрагментарная структура и эволюционный алгоритм для задач прямоугольного раскроя [Текст] / И. В.Козин, Е.В.Кривцун, С.И.Полюга// Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. – 2014. – № 2. – С. 65-72.
3. **Козин, И.В.** О свойствах фрагментарных структур [Текст] / И. В.Козин, С.И.Полюга // Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. – 2012. – № 1. – С. 99-106.
4. **Holland, J. H.** Adaptation in Natural and Artificial Systems [Text] / J. H. Holland. – Boston, MA : MIT Press. –1992. -288 p.
5. **Курейчик, В. М.** Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы [Текст] / В. М. Курейчик // Известия РАН. ТиСУ. - 1999. - №1. - С. 144-160.
6. **Скобцов, Ю.А.** Основы эволюционных вычислений : учеб. пособ. [Текст] /Ю.А.Скобцов - Донецк: [ДонНТУ], 2008. - 326 с.
7. **Moraglio, A.** Inbreeding Properties of Geometric Crossover and Non-geometric Recombinations [Text] / A. Moraglio, R. Poli //Foundations of Genetic Algorithms, 2007. - P. 1-14.

Надійшла до редколегії 16.04.2017