

**Н.И. Ободан, В.Я. Адлуцкий**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ СВЯЗЯМИ С ПАДАЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЖЕСТКОСТИ**

Рассматривается моделирование процесса сморщивания тонкого слоя под действием собственного веса в двухслойной системе, второй слой которой обладает падающей характеристикой жесткости. Задача решается в постановке плоской, геометрически нелинейной теории упругости с использованием МКЭ. Целью исследования является определение возможных закритических равновесных конфигураций тонкого слоя в зависимости от значений геометрических и физических параметров системы.

Розглядається моделювання процесу зморщування тонкого шару під дією власної ваги у двошаровій системі, другий шар якої має падаючу характеристику жорсткості. Задача розв'язується в постановці плоскої, геометрично нелінійної теорії пружності з використанням МСЕ. Метою дослідження є визначення можливих закритичних рівноважних конфігурацій тонкого шару в залежності від значень геометричних та фізичних параметрів системи.

The wrinkling modeling of a thin layer under gravity in two-layer system whose second layer has falling characteristic of rigidity is considered. The problem solution is based on the plane geometrically nonlinear theory of elasticity with use of FEM. The purpose of the research is to find possible postcritical equilibrium configurations of the thin layer depending on geometrical and physical parameters of the system.

**Ключевые слова:** морщинообразование, падающая характеристика жесткости, геометрически нелинейная плоская задача теории упругости, закритические формы равновесия.

**Введение.** В многочисленных сложных системах в процессе эксплуатации происходит ослабление внутренних связей между подсистемами, что приводит к появлению непрогнозируемого поведения указанных систем. Такие проблемы возникают в медицине, косметологии, металлургии и т. д. и проявляются, в частности, в виде образования морщин. Последние могут возникать под действием собственного веса или внешних возмущений и связаны с отрывом тонких слоев материала в многослойных системах (например, отслаивание сетчатки глаза, обвисание кожи, некачественный прокат и т. д.)

Указанные явления могут быть моделированы с помощью введения в модель системы связей, обладающих падающими (т. е. возрастающими до максимального значения, а затем убывающими до нуля) жесткостными характеристиками в определенных направлениях. В предельном случае – это одно-

сторонние связи, передающиеся только в одном направлении (например, контакт с абсолютно жестким основанием).

Исследованию систем с односторонними связями посвящено значительное количество исследований [1, 6, 9, 14, 17]. Здесь, как правило, используются численные методы в сочетании с различными итеративными подходами [2-4, 7-12]. При этом односторонние связи моделируются введением специальных контактных элементов или использованием вариационной постановки задачи, основанной на известном вариационном неравенстве Синьорини.

Исследование влияния падающей характеристики жесткости связей требует решения задачи о построении математической модели системы с такими связями, а также разработки алгоритма, реализующего эту модель. Определение свойств связей, приводящих к изменению конфигурации прикрепленного слоя или его отслоению, позволит прогнозировать возможность таких изменений в системе.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругая система, состоящая из двух слоев с отличающимися механическими характеристиками (рис. 1). Первый слой из изотропного однородного материала с модулем Юнга  $E^{(1)}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu^{(1)}$  и плотностью  $\rho$  находится под действием собственного веса (сила тяжести направлена против оси  $x_2$ ). Материал второго слоя полагается невесомым анизотропным однородным с коэффициентом Юнга  $E_1^{(2)}$  в направлении оси  $x_1$ , являющимся нелинейной функцией деформации, и нулевой жесткостью на растяжение-сжатие в направлении оси  $x_2$  и на сдвиг; при этом коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}^{(2)} = \nu_{21}^{(2)} = 0$ . Границы  $\Gamma_3 - \Gamma_7$  жестко защемлены, граница  $\Gamma_1$  свободна от нагрузок и закреплений. Слои скреплены вдоль границы  $\Gamma_2$ . В процессе деформирования в зависимости от соотношения жесткостей слоев возможно волнообразование первого слоя вследствие потери устойчивости его первоначально прямолинейной формы. В качестве параметра нагружения  $\lambda$  выступает величина ускорения свободного падения в направлении оси  $x_2$ , изменяющаяся от нуля до стандартного значения  $g = 9.8 \frac{M}{c^2}$ .

Задача рассматривается как задача теории упругости об обобщенном плоском напряженном состоянии в геометрически нелинейной постановке с использованием лагранжева формализма.

В исходном состоянии двухслойная система занимает плоскую область

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^2 \Omega^{(k)}, \quad \Omega^{(1)} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [h^{(2)}, h^{(1)} + h^{(2)}], x_2 \in [0, L]\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0, h^{(2)}], x_2 \in [0, L]\},$$

где  $\{x_1, x_2\}$  – декартовы координаты точки области  $\Omega$ , используемые в качестве лагранжевых координат, отнесенных к исходной конфигурации упругой

системи;  $h^{(k)}$ ,  $k=1,2$  – толщина  $k$ -го слоя;  $L$  – длина слоя двухслойной системы (рис. 1).

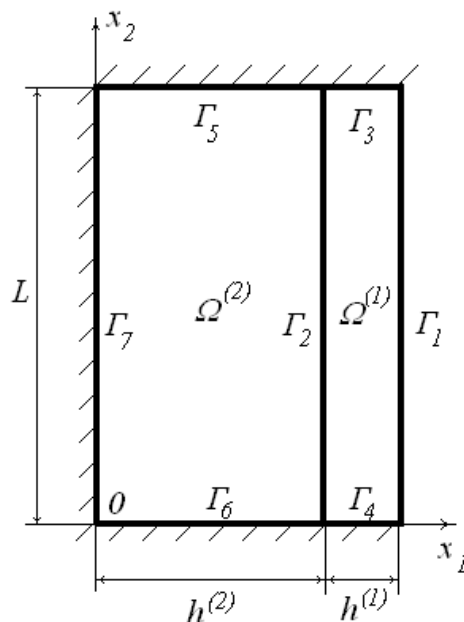


Рис. 1. Область, занимаемая двухслойной системой

Целью исследования является определение возможных равновесных конфигураций двухслойной системы и волнообразования первого слоя в зависимости от значений геометрических и физических параметров.

Геометрические соотношения, определяющие тензор конечных деформаций Грина-Лагранжа, в предположении о малости удлинений и сдвигов по сравнению с углами поворота заданы в следующем виде [13]:

$$\varepsilon_{11} = e_1 + \frac{1}{2}\omega^2; \varepsilon_{22} = e_2 + \frac{1}{2}\omega^2; \varepsilon_{12} = e_{12}; \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right);$$

$$e_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; e_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (1)$$

где  $\bar{u} = \{u_1, u_2\}$  – вектор перемещений.

Уравнения равновесия имеют вид [13]:

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{21}}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial s_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} - \rho \lambda = 0;$$

$$s_1 = \sigma_{11} - \sigma_{12}\omega; s_2 = \sigma_{22} + \sigma_{12}\omega; s_{12} = \sigma_{11}\omega + \sigma_{12}; s_{21} = -\sigma_{11}\omega + \sigma_{12}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  – компоненты симметричного тензора напряжений Коши для деформированной конфигурации.

В качестве физических соотношений для первого слоя приняты соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}} \left( \varepsilon_{11}^{(1)} + \frac{\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(k)}} \mathcal{G}^{(1)} \right); \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \frac{E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}} \left( \varepsilon_{22}^{(1)} + \frac{\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} \mathcal{G}^{(1)} \right); \quad \sigma_{12}^{(1)} = \frac{E^{(1)}}{2(1+\nu^{(1)})} \varepsilon_{12}^{(1)}; \\ \mathcal{G}^{(1)} &= \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для второго слоя

$$\sigma_{11}^{(2)} = f(\varepsilon_{11}^{(2)}), \quad \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad (4)$$

где кусочно-линейная функция

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} -E_0 \varepsilon, & \varepsilon < 0 \\ E_1 \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \\ \frac{E_1 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}, & \varepsilon_0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1 \\ 0, & \varepsilon \geq \varepsilon_1 \end{cases} \quad (E_0, E_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 = \text{const}) \quad (5)$$

моделирует падающую характеристику «напряжение-деформация».

Граничные условия имеют следующий вид:

1) на границе  $\Gamma_1$

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = 0; \quad (6)$$

2) на границах  $\Gamma_3, \Gamma_4$

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0; \quad (7)$$

3) на границах  $\Gamma_5 - \Gamma_7$

$$u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = 0; \quad (8)$$

4) на границе  $\Gamma_2$  раздела слоев

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}. \quad (9)$$

**Метод решения.** Вариационная постановка задачи (1)-(9) имеет вид

$$\begin{aligned} W &= \arg \min_{W \in \bar{W}} \mathcal{E}(u), \\ W &= \{u\}^T. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие стационарности для функционала  $\mathcal{E}(u)$  с учетом граничных условий (6)-(9) определяется равенством

$$\delta \mathcal{E}(u) = \sum_{k=1}^2 \iint_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2} (\sigma_{11}^{(k)} \delta \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \delta \varepsilon_{22}^{(k)} + 2\sigma_{12}^{(k)} \delta \varepsilon_{12}^{(k)}) d\Omega' - \lambda \rho \iint_{\Omega^{(1)}} \delta u_2^{(1)} d\Omega' = 0, \quad (11)$$

где  $\Omega^{(k)}$  – образ области  $\Omega^{(k)}$  в результате ее деформирования.

Для построения решения задачи (11) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации. Для этого на области  $\Omega$  вводится конечно-элементная сетка с узлами в точках с координатами  $\{x_{1,i}, x_{2,i}\}, i = \overline{1, N}$ . Неизвестные перемещения представляются в виде вектора  $\bar{u} = \{u_i\}, i = \overline{1, 2N}$ , компонентами которого являются узловые значения перемещений  $u_{1,i}, u_{2,i}, i = \overline{1, N}$ . В пределах каждого элемента используется изопараметрическая аппроксимация перемещений с помощью линейных

функцій форми. После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал  $\mathcal{E}(u)$ , интегрирования и выполнения процедуры (10) получается разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений порядка  $2N$ , имеющая структуру

$$Q(\bar{u}) = F(\lambda) \quad (12)$$

и эквивалентная условиям  $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial u_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ ; где  $\tilde{\mathcal{E}}$  – значение функционала  $\mathcal{E}$  после подстановки конечно-элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования.

Для решения системы (12) производится ее линеаризация и используется метод продолжения по параметру  $\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} + \Delta\lambda$ . При этом разрешающая система линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих приращений  $\Delta\bar{u}^{(n)} = \bar{u}^{(n)} - \bar{u}^{(n-1)}$  приобретает вид

$$K(\bar{u}^{(n-1)})\Delta\bar{u}^{(n)} = F(\lambda^{(n)}) - Q(\bar{u}^{(n-1)}), \quad (13)$$

где  $K(\bar{u}^{(n-1)}) = \frac{\partial Q(\bar{u}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}}$  – тангенциальная матрица жесткости [19].

В пределах каждого шага  $n$  осуществляется уточнение решения методом Ньютона-Рафсона [18] по итерационной схеме

$$\begin{aligned} (K(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}))\bar{v}_{(j)} &= F(\lambda^{(n)}) - Q(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}); \\ \bar{v}_{(j)} &= \Delta\bar{u}_{(j)}^{(n)} - \Delta\bar{u}_{(j-1)}^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, \\ \bar{v}_{(0)} &= \Delta\bar{u}^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

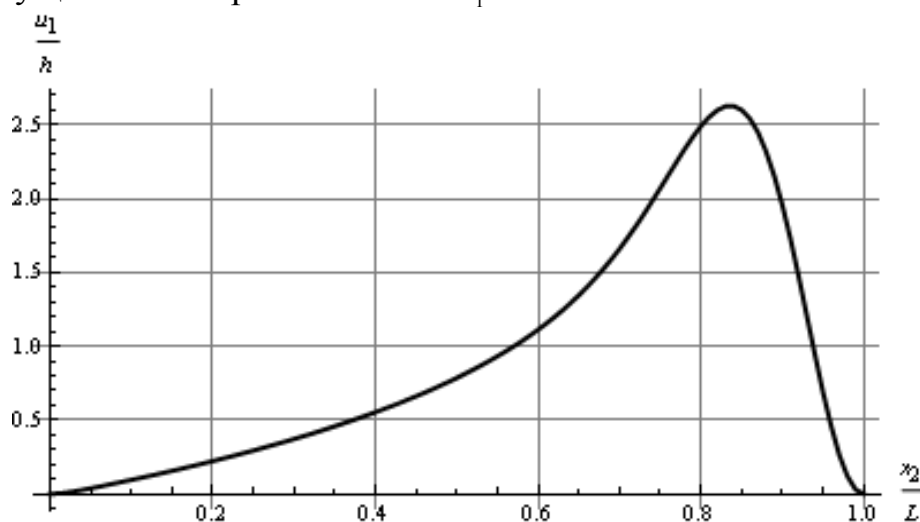
Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности решения  $\|\bar{v}\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

**Численные результаты.** Численное моделирование процесса деформирования рассматриваемой двухслойной системы осуществлялось в широком диапазоне изменения характерных параметров  $L, h^{(1)}, h^{(2)}, E^{(1)}, \nu^{(1)}, E_0, E_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \rho$ . Целью исследования было выяснение влияния указанных параметров на характер морщинообразования первого слоя, т.е. на выяснение форм потери устойчивости системы под действием силы тяжести при возможном ослаблении межслоевых связей на отдельных участках совместной границы контакта.

В качестве примера приводятся результаты расчетов для двухслойной системы, моделирующей в первом приближении кожу тела человека. При этом первым слоем полагается дерма, а вторым – подкожная или жировая клетчатка, состоящая из переплетающихся волокон, собранных в рыхлые толстые пучки, промежутки между которыми заполнены жировыми клетками [5, 15, 16]. Диаграмма «напряжение-деформация» для материала второго слоя описывается соотношениями (5), где величина модуля упругости  $E_0$  характеризует жесткость подкожного слоя на сжатие, величина модуля  $E_1$  – на растяжение,  $\varepsilon_0$  – предельное значение деформации, при котором еще имеет место

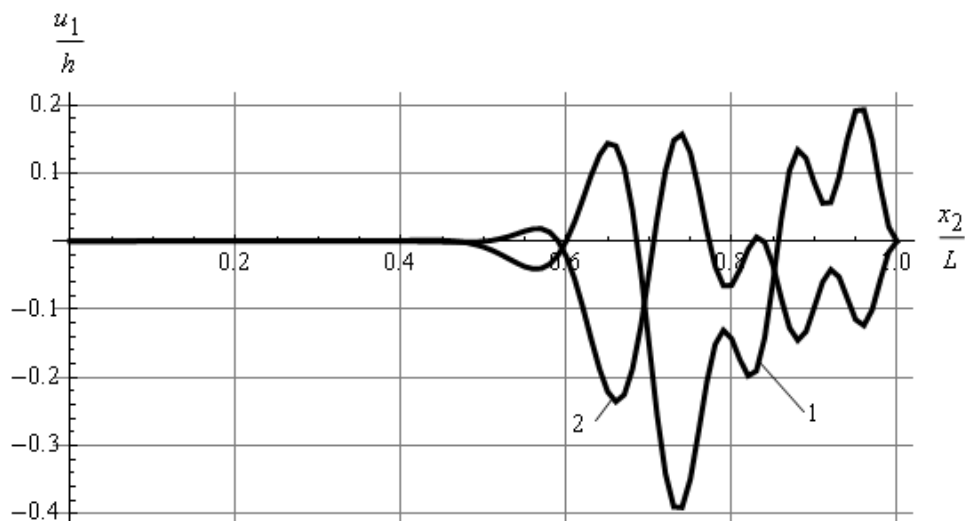
возрастание напряжений при растяжении,  $\varepsilon_1$  – значение деформации, при котором сопротивление растяжению исчезает.

В расчетах полагалось  $L = 0.1\text{м}$ ,  $h^{(1)} = 0.001\text{м}$ ,  $h^{(2)} = 0.0025\text{м}$ ,  $E^{(1)} = 25\text{МПа}$ ,  $\nu^{(1)} = 0.28$ ,  $\rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Значения параметров, характеризующих физико-механические свойства подкожного слоя, варьировались в широких пределах с целью моделирования различных условий взаимодействия дермы и подкожного слоя. С целью получения нетривиальных решений геометрически нелинейной задачи, имеющих составляющие перемещений в направлении оси  $x_1$ , производилось весьма малое изменение направления действия силы тяжести, что, в известном смысле, эквивалентно введению начального несовершенства прямолинейности границ слоев, либо приложению малых возмущений в направлении оси  $x_1$ .



**Рис. 2.** Нормальные перемещения точек границы  $\Gamma_1$  в закритическом состоянии при  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = 0$

На рис. 2 приведена закритическая форма границы  $\Gamma_1$  первого слоя в предположении, что  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = 0$ , т. е. при отсутствии сопротивления деформированию первого слоя со стороны второго. Значения перемещений отнесены к суммарной толщине двухслойной системы  $h = h^{(1)} + h^{(2)}$ . Приведенные перемещения соответствуют первой (нижней) форме потери устойчивости слоя под действием собственного веса.



**Рис. 3.** Нормальные перемещения точек границы  $\Gamma_1$  в закритическом состоянии: 1)  $E_0 = 20 \text{ КПа}$ ,  $E_1 = 50 \text{ КПа}$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $\varepsilon_1 = 0.02$ ; 2)  $E_0 = 20 \text{ КПа}$ ,  $E_1 = 100 \text{ КПа}$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $\varepsilon_1 = 0.02$

На рис. 3 изображены результаты расчетов при различных сочетаниях значений параметров  $E_0, E_1$ . Как следует из приведенных данных, комбинированное сочетание различных жесткостных характеристик второго слоя приводит к качественно иным закритическим формам по сравнению с приведенной на рис. 2. Возникновение нескольких волн на деформированной границе  $\Gamma_1$  можно трактовать как морщинообразование.

**Выводы.** В двухслойных системах, один из слоев которых обладает падающей жесткостной характеристикой, закритические формы другого слоя, деформируемого под действием собственного веса, могут существенно изменяться по сравнению с классической низшей формой его потери устойчивости. Возникновение при этом новых закритических форм, имеющих несколько волн, может трактоваться как морщинообразование. Его вид существенно зависит от сочетания жесткостных характеристик обоих слоев.

#### Библиографические ссылки

1. Александров, В. М. Механика контактных взаимодействий [Текст] / В. М. Александров, И. И. Ворович. – М., 2001. – 670 с.
2. Вихтенко, Э. М. Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением [Текст] / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007, Т. 47, №12. – С. 2023–2036.
3. Вихтенко, Э. М. Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения квазивариационного неравенства Синьорини [Текст] / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008, Т. 48, №9. – С. 1571–1579.
4. Вихтенко, Э. М. О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики [Текст] / Э. М. Вихтенко, Г. С. Ву, Р. В. Намм, // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010, Т. 50, №8. – С. 1357–1366.
5. Гребенюк, Л. А. Механические свойства кожного покрова человека [Текст] / Л. А. Гребенюк, А. А. Утёнкин // Физиол. человека. – 1994. – №2. – С. 157-162.

6. **Гузь, А. Н.** О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) [Текст] / А. Н. Гузь // Прикладная механика – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 5-88.
7. **Зернин, М. В.** Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды» [Текст] / М. В. Зернин, А. П. Бабин, А. В. Мишин, В. Ю. Бурак // Вестн. Брянского гос. техн. ун-та. – 2007. – № 4(16). – С. 62-73.
8. **Кудашкина, Д. А.** Метод Удзавы для решения контактной задачи теории упругости с трением [Текст] / Д. А. Кудашкина, Р. В. Намм // Электр. научн. изд. «Ученые заметки ТОГУ». – 2014. – Т. 5, № 3. – С. 1–9.
9. **Лукашевич, А. А.** О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа [Текст] // А. А. Лукашевич, Л. А. Розин // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 75-81.
10. **Намм, Р. В.** Решение полукоэрцитивной задачи Синьорини методом итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа [Текст] / Р. В. Намм, А. С. Ткаченко // Изв. вузов. Матем. – 2010, № 4. – С. 36–45.
11. **Намм, Р. В.** Решение квазивариационного неравенства Синьорини методом последовательных приближений [Текст] / Р. В. Намм, С. А. Сачков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009, Т. 49, №5. – С. 2023–2036.
12. **Намм, Р. В.** Метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини [Текст] / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Изв. вузов. Матем. – 2017, № 1. – С. 44–52.
13. **Новожилов, В. В.** Теория упругости [Текст] / В. В. Новожилов. – Госизд. судостроит. пром. – 1958. – 374 с.
14. **Ободан, Н. И.** Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве [Текст] : зб. наук. пр. / Н. И. Ободан, Н. А. Гук, Н. Л. Козакова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2016. – Вип. 25. – С. 146-157.
15. **Ремизов, А. Н.** Медицинская и биологическая физика [Текст] / А. Н. Ремизов. – М., 2003. – 560 с.
16. **Федоров, А. Е.** О механических свойствах кожи человека / А. Е. Федоров, В. А. Самарцев, Т. А. Кириллова // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, №2. – С. 29–42.
17. **Akbarov, S. D.** Stability loss and buckling delamination [Текст] / S. D. Akbarov. – Berlin, 2012. – 450 p.
18. **Bathe, K.-J.** Finite element procedures [Текст] / K.-J. Bathe. – Prentice-Hall, 1996. – 1038 p.
19. **Wriggers, P.** Nonlinear finite element methods [Текст] / P. Wriggers. – Springer-Verlag, 2008. – 560 p.

*Надійшла до редколегії 12.04.2017*