УДК 539.3 doi: 10.15421/321719

Н.И. Ободан, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова
Днипровский национальный университет им. Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОЛНОГО КОНТАКТА ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Розв'язана задача ідентифікації величини і зони впливу на верхній шар двошарової конструкції, що знаходиться під дією нормально розподіленого навантаження і власної ваги, для забезпечення повного контакту. Досліджено можливість застосування методу обернених задач, реалізованого за допомогою методу вектора спаду. Зроблено чисельний аналіз збіжності процесу усунення деформації моделі в залежності від механічних і геометричних параметрів системи.

Решена задача идентификации величины и зоны воздействия на верхний слой двуслойной конструкции, находящейся под действием нормально распределенной нагрузки и собственного веса, для обеспечения полного контакта. Исследована возможность применения метода обратных задач, реализованного с помощью метода вектора спада. Произведен численный анализ сходимости процесса устранения деформации модели в зависимости от механических и геометрических параметров системы.

The problem of identifying the magnitude and the zone of action on the upper layer of a two-layer structure under the action of a normally distributed load and its own weight was solved to ensure full contact. The possibility of applying the inverse problem method realized with the method of the recession vector is investigated. A numerical analysis is made of the convergence of the deformation process of the model as a function of the mechanical and geometric parameters of the system.

Ключевые слова: плоская контактная задача, односторонние связи, идентификация воздействия, метод обратных задач.

Введение. Явление отрыва межслоевых связей наблюдается при эксплуатации автомобильных дорог, аэродромных покрытий, фундаментов многоэтажных строений с опорами или деформационными швами. Контакт подошвы сооружений с основанием часто приводит к созданию аварийных ситуаций. Поэтому весьма актуальным является создание методов предотвращения возникающих разрушений, что повышает надежность и живучесть соответствующих конструкций.

Рассматриваемая в данной статье задача включает две основные проблемы – построение физической модели односторонней связи с учетом трения и отрыва и ее алгоритмическая реализация. Разработке физической модели посвящены исследования [1] – [3]. В работе [1] рассмотрены два типа моделей контактной зоны – билинейная и экспоненциальная, которые описывают поврежденные связи, приводящие к расслоению (отрыву). Здесь исследованы параметры модели с точки зрения возможности отрыва. Авторы статьи [2] предложили модель контакта, которая реализуется в два этапа: на первом

© *Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л., 2017*

слои давят друг на друга, а на втором взаимодействуют с помощью тангенциальных напряжений, отвечающих за контакт с трением. Контактная зона с отрывом в [3] моделируется стержнями меняющейся жесткости, а непосредственно зона отрыва – методом конечных элементов.

Применяемые для численного анализа алгоритмы весьма разнообразны. Так, в статье [4] при исследовании конструктивно нелинейной задачи с односторонними связями и трением при неизвестной зоне контакта для моделирования связей применен итеративный подход с использованием специальных контактных элементов в тонком фрикционном слое в сочетании с конечно-элементной моделью плоской задачи. В статье [5] на основе метода декомпозиции области контактное взаимодействие изучено методом штрафных функций, в качестве которых выступают условия кинематической допустимости перемещений. В случае, когда наблюдаются большие деформации [6], предложен иерархический алгоритм построения бинарного дерева для текущего состояния геометрии контактной поверхности. Таким образом, в существующей литературе рассмотрена только прямая задача – определение напряженно-деформированного состояния двухслойной системы и оценка возможного развития зоны отрыва. Между тем, при сочетании нагрузок и геометрических параметров, необходимо обеспечить совместную работу слоев, что может быть достигнуто путем дополнительных механических воздействий, жестких включений и т.д. Указанная проблема рассматривается в настоящей работе.

Математическая модель. Рассматривается задача об определении значения и локализации воздействия p (рис. 1), обеспечивающего наличие полного контакта двух рассматриваемых бесконечных слоев, определенных на областях

$$\Omega_k = \left\{ x^k,\, x^k = \left\{ x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \right\} \in R^2,\, -\infty \le x_1^{(k)} \le \infty,\, 0 \le x_2^{(1)} \le h_1, -h_2 \le x_2^{(2)} \le 0 \right\},$$

находящихся под действием нормального давления $q(x_1)$, $0 \le q(x_1) \le q^*$, где q^*– предельное значение нагрузки, k – номер слоя.

Разрешающая система уравнений плоской теории упругости на областях Ω_k при $h_2 / h_1 >> 1$ имеет вид

$$\left(\lambda_k + \mu_k\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} u^k + \mu_k \Delta u^k + Q = 0, \tag{1}$$

где $u^k = \left\{ u_1^k, u_2^k \right\}^T$ – вектор перемещений k – го слоя, $\lambda_k = E_k \dfrac{\nu_k}{\left(1+\nu_k\right)\left(1-2\nu_k\right)}$,

$\mu_k = \dfrac{E_k}{2\left(1+\nu_k\right)}$ – коэффициенты Ляме, E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона (k=1,2) соответственно для верхнего слоя (k = 1) и основания (k = 2); Q– нагрузка, включающая собственный вес.

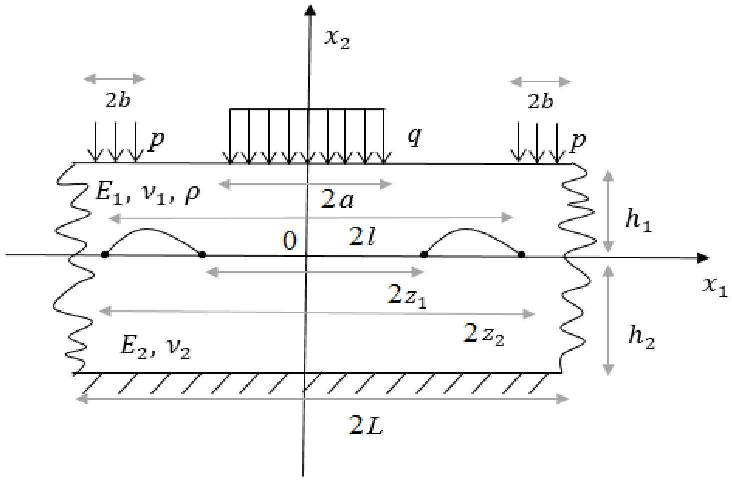


Рис. 1. Схема нагружения двухслойной конструкции

Обозначим участки границы $x_2 = h_1$ как

$$\Gamma_p = \{x_1, -(l+b) \le x_1 \le -(l-b), l-b \le x_1 \le l+b\}, \ \Gamma_q = \{x_1, -a \le x_1 \le a\}.$$

Тогда необходимо, чтобы

$$\begin{gathered} \sigma_{22}^{(1)}(u) = q, \ x_1 \in \Gamma_q, \\ \sigma_{22}^{(1)}(u) = p, \ x_1 \in \Gamma_p, \\ \sigma_{22}^{(1)}(u) = 0, \ x_1 \notin \Gamma_q, \ x_1 \notin \Gamma_p, \\ \sigma_{12}^{(1)}(u) = 0, \ -\infty \le x_1 \le \infty, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}(u)$, i, j=1,2 – напряжения, выраженные через перемещения.

На границе раздела верхнего слоя и основания ($x_2 = 0$) в зоне контакта Γ_k имеют место граничные условия

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \ u_2^{(k)} \le 0, \text{ или } \sigma_{22}^{(k)} \le 0, \ u_2^{(k)} \cdot \sigma_{22}^{(k)} = 0, \ k = 1,2. \tag{3}$$

Предполагается, что существуют границы Γ_C, $\Gamma_П$, Γ_O, соответствующие зоне сцепления, проскальзывания и отрыва соответственно, такие что $\Gamma_C \cup \Gamma_П \cup \Gamma_O = \Gamma_k$, $\Gamma_C \cap \Gamma_П \cap \Gamma_O = \varnothing$.

В зоне сцепления $x_1 \in \Gamma_C$ выполняются условия

$$\begin{gathered} u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \\ \left|\sigma_{12}^{(1)}\right| \le K \left|\sigma_{22}^{(1)}\right|, \end{gathered} \tag{4}$$

где K – коэффициент трения.

В зоне проскальзывания для всех $x_1 \in \Gamma_П$

$$u_2^{(1)}\left(x_1 + u_1^{(1)}\right) = u_2^{(2)}\left(x_1 + u_1^{(2)}\right), \ \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| - K\left|\sigma_{22}^{(k)}\right| \ge 0, \ u_1^{(1)} \ne u_1^{(2)}. \tag{5}$$

В зоне отрыва для всех $x_1 \in \Gamma_O$

$$\sigma_{22}^{(k)} = 0, \ \sigma_{12}^{(k)} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}$, $u_i^{(k)}$, i, j=1,2 – компоненты тензора напряжений и перемещений в

k – м слое, k=1,2.

Далее предполагается, что при значениях нагрузки $0 \le q \le q_{кр}$ слои контактируют путем полного сцепления или проскальзывания, возникновение зон отрыва происходит при значении нагрузки $q = q_{кр}$ с дальнейшим развитием этих зон $q > q_{кр}$ (рис. 2).

Для определения значения и расположения воздействия p, обеспечивающего отсутствие зон отрыва $z_1 \le x_1 \le z_2$, $-z_2 \le x_1 \le -z_1$, x_2=0, где σ_{22}=0, сформулируем задачу идентификации параметров $B=\{l, b, p\}^T$ как обратную. Тогда значение вектора B определится как

$$B = \arg\min_{B\in\tilde{B}} J(B)\text{, где} \tag{7}$$

$$J = \int\limits_{-L}^{L}\left[\left(\tilde{u}_2^{(1)}(B) - \tilde{u}_2^{(2)}(B)\right)^2 - \varepsilon^2\right]dx_1\,, \tag{8}$$

$\varepsilon \ll 1$ – малая величина, $\tilde{B}$ – область определения вектора B, $\tilde{u}_2^{(i)}$ – значение функции $u_2^{(i)}(x_1,0)$ при фиксированном векторе B на линии контакта Γ_k.

Метод и алгоритмы решения задачи. Сформулируем метод решения прямой задачи определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы при фиксированном векторе B [7].

Для описания неизвестных участков границ введем характеристические функции для точек границ Γ_C, $\Gamma_П$, Γ_O в виде

$$\begin{gathered}\gamma_1(x) = \begin{cases} 1 \;\; при \;\; |\sigma_{12}| \ge K|\sigma_{22}|,\; x\in\Gamma_П, \\ 0 \;\; при \;\; |\sigma_{12}| < K|\sigma_{22}|,\; x\in\Gamma_C; \end{cases} \\ \gamma_2(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; \sigma_{22} < 0,\; x\notin\Gamma_O, \\ 1 \;\; при \;\; \sigma_{22} \ge 0,\; x\in\Gamma_O. \end{cases}\end{gathered} \tag{9}$$

С учетом соотношения (9) вариационная постановка краевой задачи (1– 6) будет иметь вид

$$W = \arg\min_{W\in\tilde{W}} Э\left(u,u^*\right) \tag{10}$$

при предварительном выполнении условия (4), где $u = \{u^k\}^T$, $W = \{\,u, u^*\}^T$,

$$\begin{aligned}Э(u,u) = \sum_{k=1}^{2}\Bigg\{&\int\limits_{\Omega_k}\frac{1}{2}C_k^{ijlm}\varepsilon_{ij}^k(u)\varepsilon_{lm}^k(u)dx_1dx_2 + \left[\int\limits_{-a}^{a}u_2^{(2)}qdx_1 + \int\limits_{l-b}^{l+b}u_2^{(2)}pdx_1 + \int\limits_{-(l+b)}^{-(l-b)}u_2^{(2)}pdx_1\right]\Bigg|_{x_2=h_1} \\ &+\int\limits_{\Gamma_k}\left\{\gamma_1K\sigma_{22}^{(k)}(u)u_1^{(k)} + \gamma_2\left[\sigma_{22}^{(k)}(u)\left(u_2^{(k)} - u_{2k}^*\right) + \sigma_{12}^{(k)}(u)\left(u_1^{(k)} - u_{1k}^*\right)\right]\right\}d\Gamma_k\Bigg\}; \end{aligned} \tag{11}$$

$\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, i, j,l,m = 1,2, u_{ik}^* – варьируемые значения перемещений на линии контакта, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $u^{(k)}$ – значения напряжений и перемещений из области Ω_k на ее границе.

Для построения решения задачи (10) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации. Для этого на области Ω_k вводится сетка с узлами в точках с координатами X_s, $s=\overline{1,N}$, где $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$; тогда неизвестные функции $u(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $u^*(x)$ представляются в виде векторов, компонентами которых являются значения функций задачи в узлах сетки.

$$
\begin{aligned}
&u=\left\{u_i\right\}^T, \sigma_{ij}=\left\{\sigma_{ijs}\right\}^T, u^*=\left\{u_i^*\right\}, u_i=\left\{u_{ik}\right\}, u_{ik}=\left\{u_{iks}\right\},\\
&u_i^*=\left\{u_{ik}^*\right\}^T, u_{ik}^*=\left\{u_{iks}^*\right\}, \gamma=\left\{\gamma_k\right\}^T, \gamma_k=\left\{\gamma_{ks}\right\}^T, \qquad (12)\\
&i, j=1,2,\ s=\overline{1,N},\ k=1,2.
\end{aligned}
$$

Узлы, лежащие на границе Γ_k, нумеруются как $P = \{p_1, p_2,..., p_M\}$, число M выбирается путем численного эксперимента. Из элементов вектора P могут быть сформированы векторы

$$
P^C=\left\{p_1^C, p_2^C,..., p_{r_1}^C\right\},\ P^\Pi=\left\{p_1^\Pi, p_2^\Pi,..., p_{r_2}^\Pi\right\},\ P^O=\left\{p_1^O, p_2^O,..., p_{r_3}^O\right\},
$$

$$
r_1+r_2+r_3=M\,, \qquad (13)
$$

которые определяют узлы сетки, соответствующие зонам сцепления, проскальзывания и отрыва путем вычисления значений γ_k в соответствии с условиями (9).

После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал (11), интегрирования и выполнения процедуры (10) получим разрешающую систему линейных уравнений N – го порядка

$$
Au=R\,, \qquad (14)
$$

эквивалентную условию $\partial\tilde{Э}^*/\partial u_{is}=0$, i = 1,2, $s=\overline{1,N}$, $\tilde{Э}^*$ – значения функционала $\tilde{Э}$ после подстановки конечно элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования, A – матрица жесткости, зависящая от значений вектора γ, R – вектор, зависящий от u^*.

При построении матрицы жесткости учитывается, что

$$
\sigma=Du\,, \qquad (15)
$$

где $\sigma=\left\{\sigma_{ijs},\ i,j=1,2,\ s=\overline{1,N}\right\}^T$, D – функциональная матрица коэффициентов, получаемая из физических и геометрических соотношений.

Для выполнения условия минимума $\tilde{Э}$ по u_{is}^*, $s=\overline{1,N}$ используется метод градиентного спуска

$$
u^{*(n)}=u^{*(n-1)}-\alpha^{(n-1)}\sigma^{(n-1)}. \qquad (16)
$$

Здесь

$$
\sigma^{(n-1)}=\left\{\sigma_s^{(n-1)}\right\}^T, \sigma_s^{(n-1)}=\left\{\sigma_{12s}^{(n-1)}\sigma_{22s}^{(n-1)}\right\}^T, s=\overline{1,N},
$$

где n – номер итерации.

Коэффициент $\alpha^{(n)}$ определяется из условия

$$
\alpha^{(n)}=\arg\min_{\alpha}\tilde{Э}\left(u^{*(n-1)}\right) \qquad (17)
$$

методом половинного деления.

Значение функции γ_{ks} определяется в соответствии с условием (9). Решение задачи осуществляется с помощью алгоритма [7].

Решение обратной задачи будем осуществлять методом вектора спада. Обозначим узлы, лежащие на границе Γ_p, как $C=\{x_{j1},x_{j2},...,x_{jk}\}$ и введем вектор $F=\{\tilde{C},p\}$, где $\tilde{C}=\{x_{k1},x_{k2},...,x_{kp}\}$ – вектор значений координат точек приложения нагрузки.

Функционал J после дискретизации приобретает вид

$$\tilde{J}=(\tilde{u}_2^{(1)}(\tilde{F})-\tilde{u}_2^{(2)}(\tilde{F}))^T\,(\tilde{u}_2^{(1)}(\tilde{F})-\tilde{u}_2^{(2)}(\tilde{F}))-\varepsilon^2\,, \tag{18}$$

а условие (7) записывается в виде

$$F=\arg\min_{F\in\tilde{F}}\;J(F)\,. \tag{19}$$

Пусть W – дискретное точечное пространство, $\bar{F}$ – множество допустимых решений, $\bar{F}\in W$, причем W – метрическое пространство с метрикой

$$\rho^2(F_1,F_2)=\sum_{i=1}^{M+1}(\bar{\bar{f}}_{1i}-\bar{\bar{f}}_{2i})^2\,, \tag{20}$$

где f_{1i}, f_{2i} – координаты точек F_1, F_2 в пространстве W.

Пусть F' – некоторое допустимое решение обратной задачи (7). Определим окрестность $\tilde{W}$ точки F' с радиусом r_1 как набор возможных решений F_k', $k=\overline{1,12}$, полученных путем добавления (убавления) элементов вектора $\tilde{C}$ влево и вправо от точек $s=x_{k1}$, $s=x_{kp}$ и изменения соответствующих значений p.

Вектор спада функции J в окрестности $\tilde{W}$ произвольной точки F' определим как вектор с компонентами $\Delta_k=J(F_k')-J(F')$, где F_k', $k=\overline{1,12}$, – возможные решения обратной задачи, которые принадлежат окрестности $\tilde{W}$, а $J(F_k')$, $J(F')$ вычисляются путем решения задач с помощью алгоритма [7]. Очевидно, что при всех $\Delta_k\geq 0$ в окрестности точки F' эта точка является локальным минимумом функции $J(F)$. Если некоторые $\Delta_k<0$ и $\Delta_{k^*}=\min\Delta_k$, то точка F_k' является точкой скорейшего спада функции $J(F)$.

Алгоритм, реализующий метод спада, имеет вид:

Алгоритм.

1. Выбрать начальную точку F_0, сформировать точки F_k', $k=\overline{1,12}$.
2. Определить компоненты вектора спада для точки F_0 в направлениях F_k' путем вычисления $J(F)$ с помощью алгоритма 1. Если все $\Delta_k\geq 0$, $k=\overline{1,12}$, то $J(F_0)=\min J(F)$.
3. Если $\exists\Delta_k<0$ для $k=\overline{1,12}$, то выбирают F_{k^*}, соответствующее $\min\Delta_k$, которое становится центром новой окрестности $F_{k^*}=F_0$.
4. Переход на п.2. Процесс продолжается до тех пор, пока $\exists\Delta_k<0$.

Численный анализ задачи идентификации. С помощью предложенного алгоритма проведен анализ поведения двухслойной системы, имеющей следующие характеристики: для первого варианта выбраны удельный вес $\rho=2.76\cdot10^{-3}$ (кг/см^3), модуль Юнга $E_1=7.6\cdot10^4$ (кг/см^2) и коэффициент Пуассона $\nu_1=0.4$, для нижнего слоя – $E_2=3.8\cdot10^4$ (кг/см^2), $\nu_2=0.35$, для второго варианта – $\rho=2.72\cdot10^{-3}$ (кг/см^3), $E_1=7.6\cdot10^3$ (кг/см^2), $\nu_1=0.4$, $E_2=7.6\cdot10^5$ (кг/см^2), $\nu_2=0.2$.

Размеры моделируемого полубесконечного основания выбирались из условия затухания решения при полном сцеплении (h_2=50 см, L=150 см, a=8 см – зона распределенной поверхностной нагрузки q). Решение задачи (10) осуществлялось с помощью пакета прикладных программ «Cosmos» с автоматическим предварительным «слиянием» и «разъединением» узлов, соответствующим зонам сцепления, проскальзывания и отрыва. Использовался плоский конечный элемент. Решения проводились последовательно путем дробления размера конечного элемента до получения заданной точности. Модель рассматриваемой системы, представленная на рис. 1, содержит 1201 элемент и 1292 узла.

Для описания решения задачи введены безразмерные обозначения параметров – $\chi=E_1/E_2$, $\eta=h_1/h_2$, $\bar{q}=q/q^*$, где q^* = 40 (кг/см) – предельная нагрузка, действующая на верхнюю границу слоя, а также $b^*=b/a$, $l^*=l/a$, $p^*=p/q^*$ – значения вектора F, при котором достигает минимума функция $J(F)$.

На рис. 2 представлены значения относительной зоны отрыва при соответствующей нагрузке $\bar{q}$ в зависимости от коэффициента трения K и отношения модулей Юнга χ.

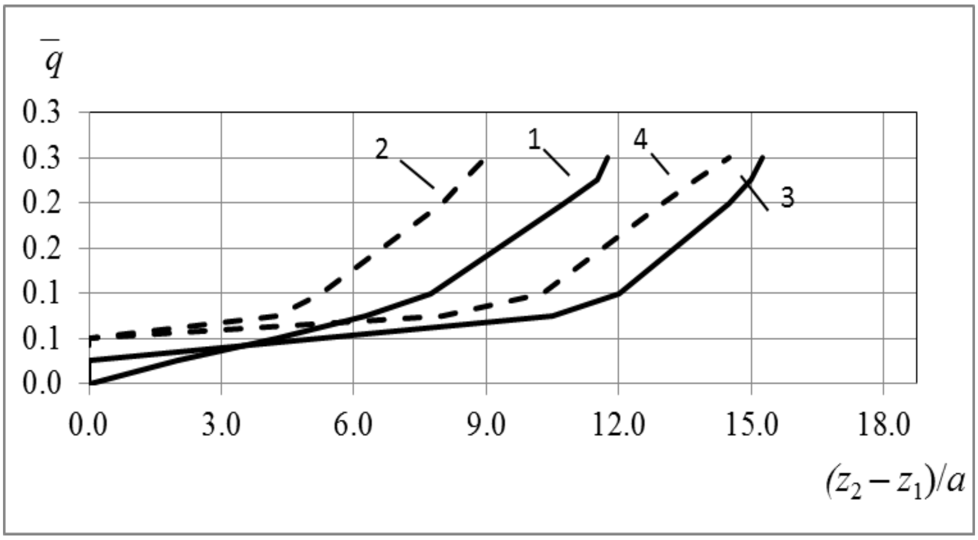
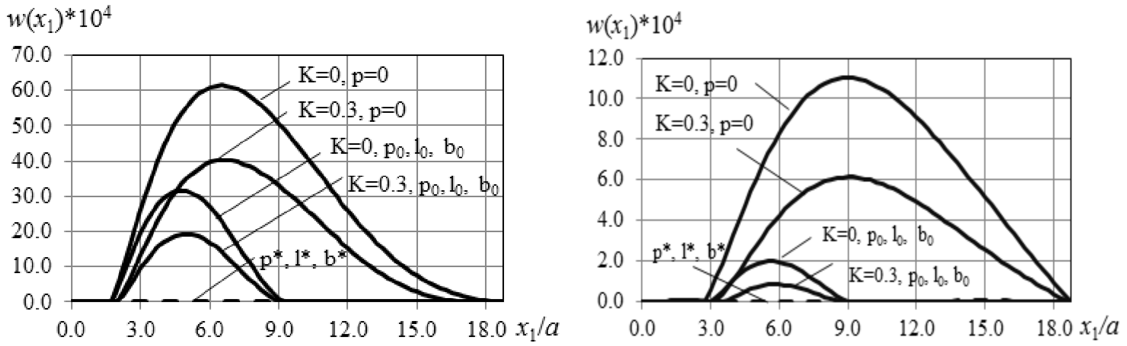


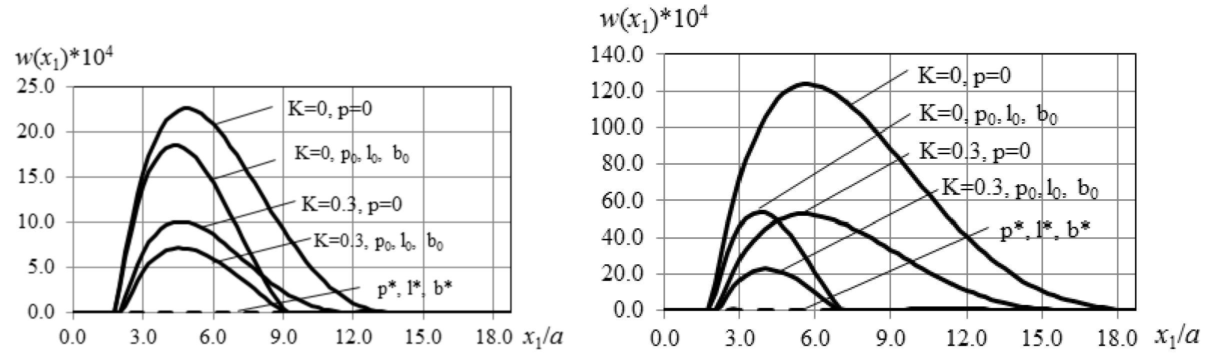
Рис. 2. Зависимость относительной зоны отрыва от нагрузки при η=0.2: 1 – K=0, χ=0.01; 2 – K=0.3, χ=0.01; 3 – K=0, χ=2; 4 – K=0.3, χ=2

На рис. 3, 4 представлены результаты итерационного процесса метода вектора спада. Здесь приведены значения относительного раскрытия поверхностей контакта ($w(x_1)=(u_2^{(1)}(x_1)-u_2^{(2)}(x_1))/h_1$), из которых следует, что величина зоны отрыва зависит от исследуемых параметров существенно только в зоне больших нагрузок. В то же время величина раскрытия изменяется нелинейно не только с изменением нагрузки, но и в зависимости от относительной толщины слоев и их модулей во всем диапазоне нагрузок. Отметим, что влияние трения существенно увеличивается при увеличении относительной толщины слоев.



а) б)

Рис. 3 – Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела при $\overline{q}=1,\ \chi=2$**: а)** $\eta=0.1$ **; б)** $\eta=0.2$



а) б)

Рис. 4 – Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела при $\chi=0.01,\ \eta=0.2$**: а)** $\overline{q}=0.25$**; б)** $\overline{q}=1$

Результаты решения задачи идентификации демонстрирует табл. 1. При решении задачи выбраны начальные приближения: p_0 = $0.05q$, b_0 = $a/4$, l_0 $=5a;10a$ в зависимости от χ и η.

Из приведенных данных (табл. 1) видно, что параметры дополнительного воздействия p^*, l^*, b^* существенно зависят от уровня нагружения, геометрических и физических свойств системы. Отметим, что учет трения уменьшает необходимость дополнительного воздействия.

Таблица 1

Зависимость параметров идентификации от параметров системы

$\bar{q}$	K	χ	η	p^*	l^*	b^*	min $J(F)$
0.075	0.0	2.0	0.2	0.03	7.25	1.75	9.13E-11
0.075	0.3	2.0	0.2	0.0225	7.75	0.5	1.56E-12
0.25	0.0	2.0	0.2	0.125	8.25	2.0	5.33E-09
0.25	0.3	2.0	0.2	0.1	9.0	1.5	1.02E-10
0.25	0.0	0.01	0.1	0.1	3.25	1	1.95E-08
0.25	0.3	0.01	0.1	0.0875	3.75	0.25	1.21E-09
0.25	0.0	0.01	0.2	0.025	3.25	0.75	4.23E-09
0.25	0.3	0.01	0.2	0.0188	3.5	0.25	1.14E-10
0.525	0.0	2.0	0.1	0.0525	5.25	1.75	9.55E-08
0.525	0.3	2.0	0.1	0.05	5.75	1.5	2.54E-09
1.0	0.0	0.01	0.2	0.1	3.5	1.0	3.02E-08
1.0	0.3	0.01	0.2	0.075	3.75	0.5	1.15E-09

Выводы. Проведена параметризация, позволяющая осуществить описание явления одностороннего контакта и дополнительного воздействия для предотвращения отрыва верхнего слоя. Создан алгоритм, позволяющий определять состояние зоны контакта и соответствующее напряженно-деформируемое состояние рассматриваемой двухслойной системы. Сформулирован и численно реализован метод вектора спада применительно к рассматриваемой задаче, позволяющий определять параметры идентификации. Исследовано влияние физических и геометрических свойств системы на параметры дополнительного воздействия, обеспечивающего отсутствие зоны отрыва. Показано, что учет трения мало влияет на параметры воздействия; определяющим здесь являются геометрические параметры и уровень основного нагружения. Сходимость процесса идентификации методом вектора спада зависит от величины нагружения и наличия трения.

Библиографические ссылки

1. **Jun, L.** Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffeer integrated composite structure [Text] / L Jun., X. Y. Lui, Y. Y. Nan, Y. Xuefeng // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – V. 23 (10). – P. 1188-1196.
2. **Slobodyan, B. S.** Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip [Text] / B. S.Slobodyan, B. A. Lyashenko, N. I. Malanchuk, V. E. Marchuk , R. M. Martynyak // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215, Iss. 1. – P. 110-120.
3. **Gustafson, P. A.** The influence of adhesive constitutive parameters in cohesive zone finite element models of adhesively bonded joints [Text] / Peter A.Gustafson, A. M.Waas // International Journal of Solids and Structures. –2009. –Vol. 46, Iss.10, P. 2201-2215.

4. **Лукашевич, А. А.** О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа [Текст] / А. А. Лукашевич, Л. А. Розин // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 75 – 81.
5. **Прокопішин, І. І.** Числове дослідження контактної взаємодії двох тіл з виїмкою методом декомпозиції області [Текст] / І. І. Прокопішин, Р. М. Мартиняк // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. –№ 16. – С. 232-239.
6. **Laursen T. A.** A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations [Text] / T. A. Laursen, B.Yang // Computational Mechanics. –2008. –, Vol. 41, Iss.2, P. 189–205.
7. **Ободан, Н. И.** Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве [Текст] / Н. И. Ободан, Н. А. Гук, Н. Л. Козакова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2016. – №25– С.146-158.

Надійшла до редколегії 04.04.2017