УДК 517.5 doi: 10.15421/321721

Оловарь І.А., Прудко О.П., Черницька О.В.
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПОСЛІДОВНОСТІ КОНСТАНТ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ

Досліджується поведінка послідовності констант найкращого наближення у просторах з інтегральною нормою для степеневих функцій.

Исследуется поведение последовательности констант наилучшего приближения в пространствах с интегральной нормой для степенных функций.

We study the behavior of sequences of constants of the best approximation in spaces with integral metric for exponential functions.

Ключові слова: константи найкращого наближення, простори з інтегральною нормою, монотонність функції, опуклість функції, монотонність послідовності констант.

Нехай $L_p[a,b]$ $(1\le p < \infty)$ – простір інтегрованих на відрізку $[a,b]$ в p-ому степені функцій з нормою

$$\|f\|_p = \left\{\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p};$$

$L_\infty[a,b]$ – простір вимірних істотно обмежених функцій з нормою

$$\|f\|_\infty = \text{vraisup}\{|f(x)| : x\in[a,b]\};$$

$C[a,b]$ – простір функцій неперервних на відрізку $[a,b]$;

$C_p(f)$ $(1\le p\le\infty)$ – константа найкращого наближення функції f в метриці простору $L_p[a,b]$, тобто така константа, що

$$\|f - C_p(f)\|_p = \inf\left\{\|f-c\|_p : c\in R\right\}.$$

Ми розглядаємо непревні функції, задані на відрізку $[a,b]$. Для таких функцій $C_\infty(f) = (\max f + \min f)/2$. Критерій константи найкращого наближення в просторах $L_p[a,b]$ має такий вигляд [1]: для того, щоби константа C надавала функції f найкраще наближення в метриці простору $L_p[a,b]$ $(1\le p < \infty)$ необхідно (у випадку p=1 за умови, що $\text{mes}\{t\in[a,b] : f(t)=C\}=0$) і достатньо, щоби виконувалася умова

$$\int_a^b |f(t)-C|^{p-1}\,\text{sgn}(f(t)-C)\,\text{d}t = 0.$$

В [1,4,5] вивчалися властивості констант найкращого наближення та поведінка послідовностей констант $\{C_n(f)\}$. Була висунута гіпотеза про монотонність цих послідовностей для функцій монотонних і опуклих: якщо функція f монотонна і опукла вгору, то послідовність $\{C_n(f)\}$ спадає, якщо функція f монотонна і опукла вниз, то послідовність $\{C_n(f)\}$ зростає. В [5] було доведено, що послідовність констант найкращого наближення $\{C_n(\sqrt{t})\}$ є монотонно спадною. Властивості констант найкращого несиметричного наближення вивчалися в [3].

Введемо в розгляд наступну функцію дійсної змінної

$$F(c) = \left(\int_a^b \left| x(t) - c \right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(x(t) - c \right) \mathrm{d}t \right)^2 .$$

Значення функції $F(c)$ невід'ємні для будь-якого значення аргументу c при будь-якій фіксованій функції $x(t)$. Причому, в силу того, що константа найкращого наближення єдина, функція $F(c)$ перетворюється в нуль лише в єдиній точці числової прямої, а саме, при $c = c_p(x)$. Таким чином, задачу пошуку константи найкращого наближення $c_p(x)$ можна звести до задачі відшукання точки c, такої, що доставляє мінімум функції $F(c)$. Знайдена точка і буде константою найкращого наближення для функції $x(t)$.

Для розв'язання задачі пошуку мінімуму функції $F(c)$

$$F(c) \to \min, \ \mathrm{c} \in \mathrm{R} \tag{1}$$

можна скористатися методами одновимірної оптимізації. Оскільки ці методи дозволяють розв'язати задачу наближено, то потрібно перевіряти коректність отриманих результатів. Для цього будемо розглядати похибку, яку визначимо наступним чином. Нехай $\overline{c}$ – наближений розв'язок задачі (1). Тоді похибкою будемо називати величину

$$P = \int_a^b \left| x(t) - \overline{c} \right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(x(t) - \overline{c} \right) \mathrm{d}t .$$

Чим ближче значення P до нуля, тим менше наближений результат обчислення $\overline{c}$ відрізняється від значення $c_p(x)$.

Для наближеного розв'язання задачі (1) було застосовано один з методів одновимірної оптимізації – метод дихотомії (ділення відрізку навпіл). При розв'язанні задачі методом дихотомії виникає необхідність обчислення визначеного інтеграла. Для обчислення інтеграла було реалізовано квадратурну формулу парабол.

Для обчислення констант найкращого наближення було створено прикладну програму на мові програмування C# в середовищі розробки Microsoft Visual Studio 2015.

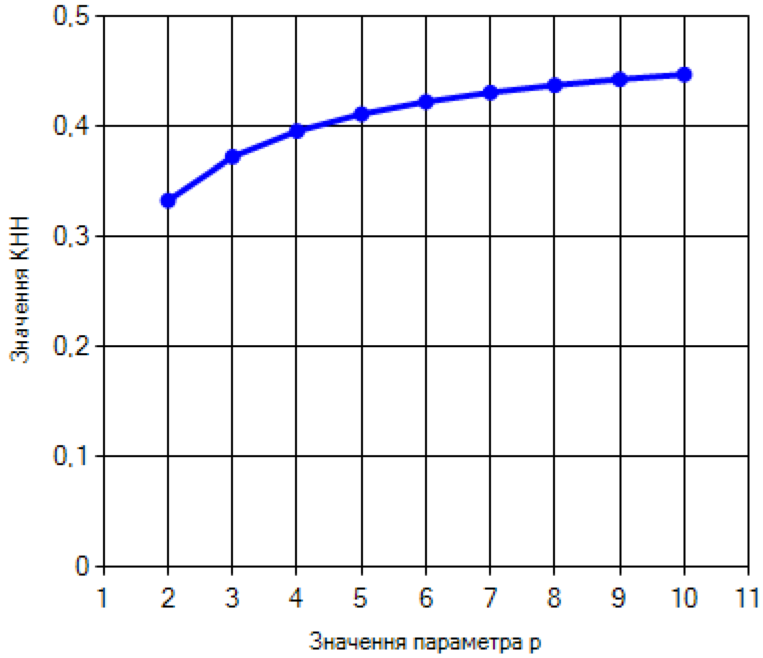
Алгоритм передбачає введення наступних даних: значення меж проміжку [*a, b*]; аналітичного виразу функції $x(t)$, для якої розглядається задача пошуку констант найкращого наближення; значення параметра $p \in [1,\infty)$. Вибір проміжку, на якому шукаємо наближений розв'язок задачі (1), залежить від властивостей функції $x(t)$. В [4] було доведено, що для монотонної опуклої вгору функції *f* всі константи $C_p(f)$ належать відрізку $[C_\infty(f), C_1(f)]$ і для монотонної опуклої вниз функції *f* всі константи $C_p(f)$ належать відрізку $[C_1(f), C_\infty(f)]$. Для монотонних функцій це твердження, взагалі кажучи, несправедливе. Для опуклих функцій доведено лише, що константа $C_2(f)$ належить відрізку з кінцями $C_\infty(f), C_1(f)$ (який з кінців є лівим, а який правим визначається напрямом опуклості функції *f*). Отже, в якості проміжку, на якому відшукується розв'язок задачі (1), береться проміжок $[\min\{C_1(f), C_\infty(f)\}, \max\{C_1(f), C_\infty(f)\}]$.

Була поставлена задача за допомогою програми дослідити поведінку послідовностей констант $\{C_n(f)\}$ щодо монотонності для функцій, які мають такі властивості: 1) функція монотонна і опукла, 2) функція опукла і змінює напрям монотонності, 3) функція монотонна і змінює напрям опуклості.

Розглядалися функції виду $f(t) = t^{2n}$, *n* – натуральне число. Нехай $a > 0$. На проміжках [- *a*;0] функції монотонно спадають, на проміжках [0; *a*] функції монотонно зростають. На обох проміжках функції є опуклими донизу. Виявилося, що незалежно від напряму монотонності, послідовність констант найкращого наближення $\{C_n(f)\}$ для функцій $f(t) = t^{2n}$, зокрема при *n* = 1, монотонно зростає. На рис. 1 наведені результати для функції $f(t) = t^2$ для проміжку [0; 1] .

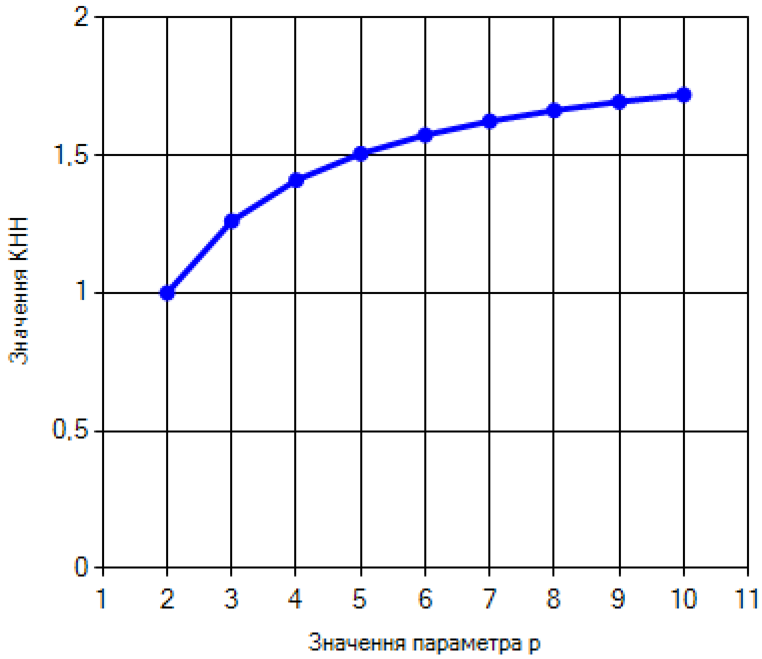
При дослідженні послідовності констант найкращого наближення для функції $f(t) = t^2$ на проміжках, де вона зберігає свою опуклість донизу, проте змінює напрям монотонності, виявлено, що послідовність констант найкращого наближення $\{C_n(f)\}$ зберігає свій монотонний характер. На рис. 2 продемонстровано результат роботи програми для функції $f(t) = t^2$ для проміжку [- 1; 2].

Розглядалися функції виду $f(t) = t^{2n+1}$, *n* – натуральне число. Нехай $a > 0$. На проміжках [- *a*;0] функції монотонно зростають та опуклі догори. На проміжках [0; *a*] функції монотонно зростають та опуклі донизу. Точка *t* = 0 є точкою перегину. Виявилося, що на проміжках такого виду послідовність констант найкращого наближення $\{C_n(f)\}$ для функцій $f(t) = t^{2n+1}$, зокрема при *n* = 1, 2, має монотонний характер. На проміжках, де функція є опуклою догори, послідовність констант є спадною, а на проміжках, де функція опукла донизу, ця послідовність є зростаючою.



p	Cp(x)
2,0	0,33333333
3,0	0,37267110
4,0	0,39590665
5,0	0,41139746
6,0	0,42253609
7,0	0,43097037
8,0	0,43760165
9,0	0,44296658
10,0	0,44740564

Рис.1. Значення констант для функції $x(t) = t^2$, t є [0,1]

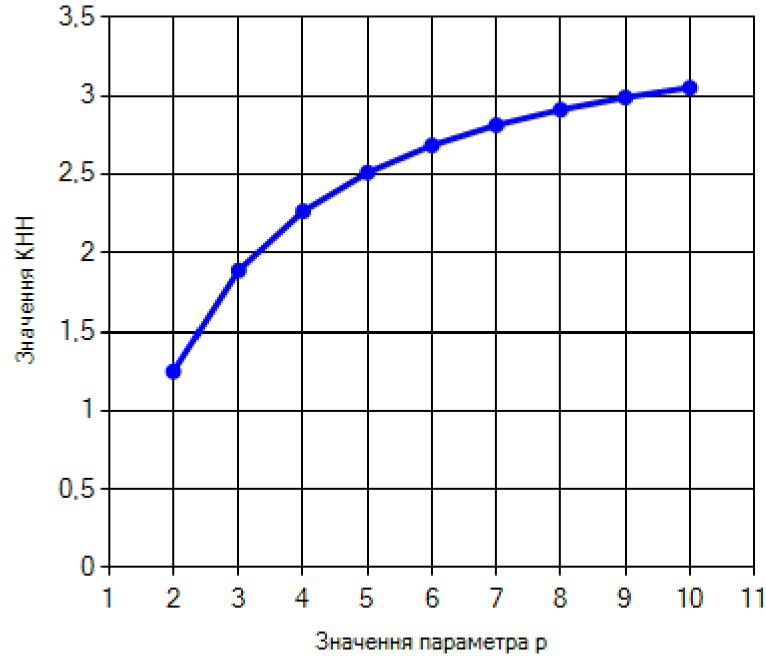


p	Cp(x)
2,0	1,00000000
3,0	1,26113514
4,0	1,40949709
5,0	1,50562372
6,0	1,57327572
7,0	1,62363789
8,0	1,66268495
9,0	1,69390688
10,0	1,71948278

Рис.2. Значення констант для функції $x(t) = t^2$, t є [-1,2]

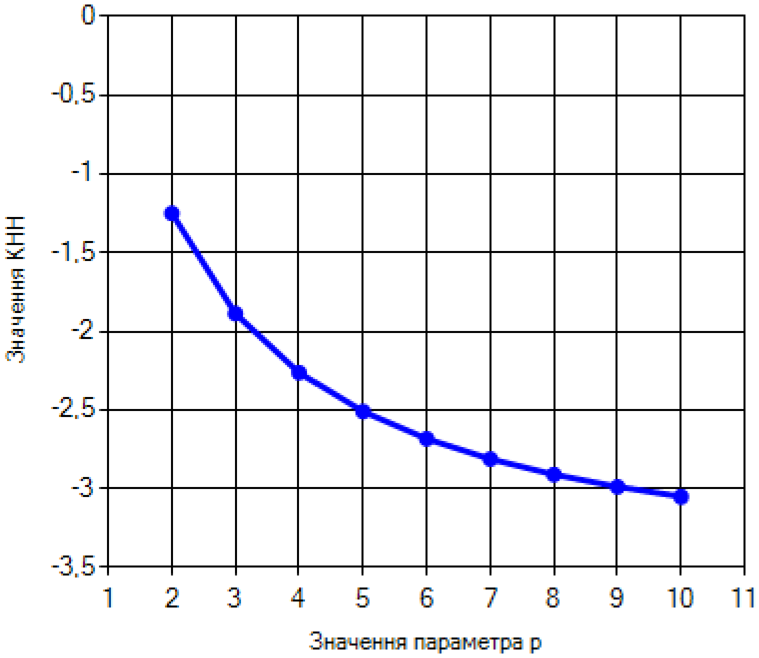
Для $f(t)=t^3$, $f(t)=t^5$ при зміні напряму опуклості (зі збереженням напряму монотонності), послідовності констант найкращого наближення $\{C_n(f)\}$ мають монотонну поведінку. Характер монотонності визначається видом проміжку $[a,b]$. Якщо $a<0$ та $|a|<b$, то послідовність зростає (як для

функції опуклої вниз). Якщо $a < 0$ та $|a| > b$, то послідовність спадає (як для функції опуклої вгору). На рис. 3 та 4 представлено результат роботи програми для таких випадків.



p	Cp(x)
2,0	1,25000000
3,0	1,88757919
4,0	2,26367315
5,0	2,51017074
6,0	2,68376624
7,0	2,81224964
8,0	2,91080122
9,0	2,98842630
10,0	3,05082070

Рис.3. Значення констант для функції $x(t) = t^3$, t є [-1,2]



p	Cp(x)
2,0	-1,25000000
3,0	-1,88757919
4,0	-2,26367315
5,0	-2,51017074
6,0	-2,68376624
7,0	-2,81224964
8,0	-2,91080122
9,0	-2,98842630
10,0	-3,05082070

Рис.4. Значення констант для функції $x(t) = t^3$, t є [-2,1]

Відмітимо, що існують отримані програмно результати, які повністю збігаються з теоретично доведеними фактами [4]. Це свідчить про якість розробленого алгоритму обчислень. До цих результатів відносяться такі. Для $f(t) = t^2$ значення $\{C_n(f)\}$ на відрізках $[0,a],[-a,0],[-a,a]$ очікувано збігаються. Для $f(t)=t^3$ значення $\{C_n(f)\}$ на відрізках $[0,a]$ та $[-a,0]$ очікувано збігаються за модулями, відрізняючись знаками. На відрізках $[-a,a]$ кожна з констант $C_n(f)$ дорівнює нулю.

Розроблена програма дозволяє обчислювати константи найкращого наближення не лише для натуральних значень параметру p, а й для довільних дійсних значень p з проміжку $[1,+\infty)$.

Під час роботи розглядалися не лише степеневі функції. Були підтверджені результати з [1] по тригонометричним функціям. Досліджувалися поліноміальні функції та інші.

Отже, було висунуто гіпотезу стосовно того, що для монотонних опуклих функцій послідовності констант найкращого наближення є монотонними. За допомогою розробленого програмного продукту ми перевіряли цю гіпотезу, розглядаючи різні функції, що мають певні властивості. Висновки з проведених розрахунків можна зробити такі. Жоден з результатів не свідчить про те, що гіпотеза невірна. Якщо так, то можна ставити задачу аналітичного доведення факту монотонності послідовності констант найкращого наближення для окремих функцій.

Бібліографічні посилання

1. **Бегарь, М.А.** Исследование последовательностей констант наилучшего приближения для функций синус и косинус [Текст] : зб. наук. пр. / М.А.Бегарь // IX Междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых « Наука и образование – 2014 ». – АА, 2014. – С. 2077–2080.
2. **Корнейчук, Н.П.** Точные константы в теории приближения [Текст] / Н.П. Корнейчук. – М., 1987. – 424 с.
3. **Поляков, О.В.** О наилучших (α,β)- приближениях постоянными випуклых функций в интегральных метриках [Текст] / О.В. Поляков //Укр. мат. журн. – 2013. – т.65, №7. – С. 1015–1020.
4. **Черницкая, О.В.** Поведение констант наилучшего приближения для выпуклых функций [Текст] / О.В. Черницкая // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2006. – Вып. 11. – С. 110–114.
5. **Черницкая, О.В.** Монотонность последовательности констант наилучшего приближения для функции $\sqrt{t}$ [Текст] / О.В. Черницкая // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2011. – Вып. 16. – С. 129–132.

Надійшла до редколегії 02.04.2017