УДК 532.62:541.124 doi: 10.15421/321725

И.С. Тонкошкур

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ С ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрена задача о совместном течении двух взаимно нерастворимых жидких пленок и газа в прямоугольном канале под действием силы тяжести. С помощью метода малых возмущений получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности пластины.

Розглянута задача про сумісну течію двох взаємно нерозчинних рідких плівок і газу в прямокутному каналі під дією сили тяжіння. За допомогою метода малих збурень одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки вздовж поверхні пластини.

The problem about cooperative courses of two insoluble liquid films in rectangular channel under gravity force was considered. Using method of the small perturbations was received approximate equations' solution of liquid film's dynamic on the surface plate.

Ключевые слова: двухслойная жидкая пленка, газовый поток, метод малого параметра, прямоугольный канал.

Введение. Пленочные течения жидкостей широко применяются в различных технологических процессах и аппаратах, в частности в химических реакторах. Одним из требований, предъявляемых к таким аппаратам, является достаточно малое (и одинаковое для всех частиц жидкости) время пребывания жидкой массы в зоне реакции. Однако это требование нарушается при движении вязкой жидкости по неподвижной твердой поверхности из-за существенной неравномерности распределения скорости течения в поперечном направлении. На поверхности тела скорость жидкости равна нулю (условие «прилипания»), а на свободной границе, разделяющей жидкость и газ, принимает максимальное значение. Поэтому большое значение имеет организация течения жидкой пленки таким образом, чтобы все ее слои имели определенную фиксированную скорость относительно неподвижной стенки. Одним из способов решения этой технической задачи является использование вспомогательной жидкой пленки, в результате чего пленка рабочей жидкости стекает вниз не по неподвижной твердой поверхности, а по движущейся пленке вспомогательной жидкости, которая «смазывает» твердую стенку. Кроме того, применение направленного вверх газового потока с другой стороны рабочей пленки позволяет уменьшить ее максимальную скорость в окрестности поверхности раздела «жидкость – газ». Исследования течений двухслойных пленок проводились в работах [2–6].

В [2, 3] рассматривались пленочные течения в узких щелях безгазового

© *Тонкошкур И.С., 2017*

потока, в [5] – течения на внешней поверхности вращающегося цилиндра в неподвижном газе. Совместные течения жидкости и газа около плоских поверхностей исследовались в работах [4, 6]. В [4] действие газового потока учитывалось приближенно (с помощью задания касательного напряжения на поверхности раздела «жидкость – газ»). В [6] предложена методика приближенного расчета трехфазного течения двух жидких пленок и газа в прямоугольном канале для ньютоновских жидкостей. В данной работе эта методика обобщается на более общий случай течения нелинейно-вязких жидкостей.

Постановка задачи. Рассматривается задача о стационарном совместном течении двух жидких пленок и газа в прямоугольном канале поперечного размера $2r$. По обеим внутренним стенкам канала стекают жидкие пленки. Предполагается, что пленки являются нерастворимыми одна в другой, а химические реакции отсутствуют. На пленки действует сила притяжения, а также газовый поток в середине канала, направленный вверх или вниз. Ось x направлена вертикально вниз, y – в поперечном направлении.

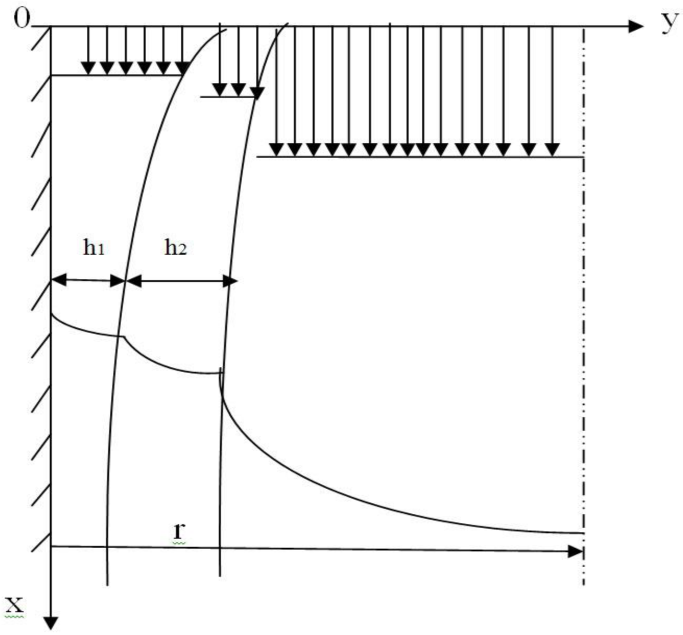

Рис.1. Схема трехфазного течения

Для описания течения жидких пленок используется модель вязкой жидкости, которая основана на уравнениях движения, неразрывности и макроскопического баланса:

– для жидких пленок

$$\rho_i\left(u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p_i}{\partial x}+\frac{\partial \tau^i_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau^i_{xy}}{\partial y}+\rho_i g\ ,$$

$$\rho_i\left(u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p_i}{\partial y}+\frac{\partial \tau^i_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau^i_{yy}}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h_1} u_1 dy = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_1}^{h_1+h_2} u_2 dy = 0;$$

– для газовой фазы

$$\rho_G\left(u_G\frac{\partial u_G}{\partial x}+v_G\frac{\partial u_G}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p_G}{\partial x}+\mu_G\left(\frac{\partial^2 u_G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}\right),$$

$$\rho_G\left(u_G\frac{\partial v_G}{\partial x}+v_G\frac{\partial v_G}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p_G}{\partial y}+\mu_G\left(\frac{\partial^2 v_G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_G}{\partial y^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_G}{\partial x}+\frac{\partial v_G}{\partial y}=0.$$

Здесь u и v – компоненты вектора скорости, p – давление, ρ – плотность жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, h_1, h_2 – толщины первой и второй пленок соответственно, g – ускорение силы тяжести, i =1, 2 (индексы 1, 2 соответствуют номеру жидкой пленки, G – газу).

Для определения компонентов тензора вязких напряжений τ_{ij} используется степенной реологический закон [7]

$$\tau_{ij} = 2k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}}\dot{e}_{ij}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ji},$$

где k, n – постоянные величины, а I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$.

На поверхностях раздела ставятся следующие краевые условия:

1) на поверхности твердого тела (при $y=0$) – условия «прилипания»

$$u = v = 0; \qquad (3)$$

2) на межфазной поверхности «жидкость - жидкость» (при $y = h_1$) – условия равновесия сил и непрерывности скоростей

$$p_{n1} = p_{\sigma 1} + p_{n2}, \quad p_{\tau 1} = p_{\tau 2}, \quad u_{n1} = u_{n2}, \quad u_{\tau 1} = u_{\tau 2}; \qquad (4)$$

3) на межфазной поверхности «жидкость - газ» (при $y = h_1 + h_2$)

$$p_{n2} = p_{\sigma 2} + p_{nG}, \quad p_{\tau 2} = p_{\tau G}, \quad u_{n2} = u_{nG}, \quad u_{\tau 2} = u_{\tau G}; \qquad (5)$$

4) на внешней границе газового потока – условие симметрии (или асимптотическое условие)

$$\frac{\partial u_G}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = r \qquad (6)$$

$$(u_G \to \bar{u}_G \quad \text{при } y \to r).$$

Здесь p_n и p_τ – нормальная и касательная компоненты тензора напряжений на межфазной поверхности, p_σ – капиллярное давление.

Метод решения. Для упрощения исходной системы дифференциальных уравнений применяется метод малого параметра, в качестве которого выбирались относительные толщины пленок и газового слоя: $\varepsilon = \overline{h}/l$, $\varepsilon_G = r/l$, где l – характерный продольный размер, $\overline{h}$ и r – характерные поперечные размеры в жидких пленках и в газовой фазе. Введем также характерные продольные скорости в жидкостях $\overline{u}$ и в газе $\overline{u}_G$. В приведенной выше системе дифференциальных уравнений перейдем к безразмерным переменным по следующим формулам:

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{\overline{h}}, \quad U_i = \frac{u_i}{\overline{u}}, \quad V_i = \frac{v_i}{\varepsilon \overline{u}}, \quad H_i = \frac{h_i}{\overline{h}},$$

$$X_G = \frac{x}{l}, \quad Y_G = \frac{y}{r}, \quad U_G = \frac{u_G}{\overline{u}_G}, \quad V_G = \frac{v_G}{\varepsilon_G \overline{u}_G}, \quad H_G = \frac{h}{r},$$

$$P_i = \frac{p_i}{\rho \overline{u}^2}, \quad P_G = \varepsilon_G \operatorname{Re}_G \frac{p_G}{\rho_G \overline{u}_G^{\,2}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\overline{h}}{r},$$

$$\theta_0 = \frac{\rho_G \overline{u}_G^2}{\rho_1 \overline{u}^2}, \quad \theta_1 = \frac{\mu_G \overline{u}_G}{\mu_1 \overline{u}}, \quad \theta_2 = \frac{\overline{u}}{\overline{u}_G}, \quad \theta_3 = \theta_0 \frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_G}.$$

Введем также безразмерные критерии:

$Fr = \dfrac{\overline{u}^2}{g\overline{h}}$ – число Фруда, $\operatorname{Re}_1 = \dfrac{\rho_1 \overline{u}^{(2-n_1)} \overline{h}^{n_1}}{k_1}$, $\operatorname{Re}_2 = \dfrac{\rho_2 \overline{u}^{(2-n_2)} \overline{h}^{n_2}}{k_2}$,

$\operatorname{Re}_G = \dfrac{\rho_G \overline{u}_G r}{\mu_G}$ – числа Рейнольдса для каждой из фаз.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия: $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon \operatorname{Re}_1 \ll 1$, $\varepsilon \operatorname{Re}_2 \ll 1$, $\varepsilon_G^2 \le \varepsilon_G \operatorname{Re}_G < 1$. В безразмерном виде упрощенная система уравнений для нахождения скоростей жидких пленок и газа запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}\right)^{n_1}\right] = -\frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2}\right] = -\frac{\operatorname{Re}_2}{Fr}, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0, \tag{8}$$

$$U_G \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + V_G \frac{\partial U_G}{\partial Y_G} = \frac{1}{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} \frac{\partial^2 U_G}{\partial Y_G^{\,2}}, \qquad \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + \frac{\partial V_G}{\partial Y_G} = 0. \tag{9}$$

Краевые условия:

$$U_1 = V_1 = 0 \qquad \text{при } Y = 0, \tag{10}$$

$$U_1 = U_2, \quad V_1 = V_2, \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}\right)^{n_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2} \qquad \text{при } Y = H_1, \qquad (11)$$

$$U_G = \theta_2 U_2, \quad V_G = \varepsilon_1 \theta_2 V_2, \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2} = \theta_3 \frac{\partial U_G}{\partial Y_G} \qquad \text{при } Y = H_1 + H_2, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial Y_G} = 0 \quad \text{при } Y_G = 1 \qquad (U_G \to 1 \quad \text{при } Y_G \to 1). \qquad (13)$$

Для решения полученной краевой задачи используется метод возмущений [1] по малым параметрам θ_2 и θ_3 с учетом линейных добавок. Неизвестные функции представлялись в виде разложений по малым параметрам

$$A = A^0 + \theta_2 A^1 + \theta_3 A^2 .$$

В результате получено шесть упрощенных систем дифференциальных уравнений, две из которых имеют тривиальное решение. При интегрировании дифференциальных уравнений для газовой фазы использовался конечно-разностный метод. Решение краевой задачи (для жидких пленок) может быть представлено в виде:

$$U_1 = \left(\frac{\mathrm{Re}_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1}\left[\left(H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}H_2\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left(H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}H_2 - Y\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}}\right] + \theta_3 AYX^{-\frac{1}{2n_1}},$$

$$V_1 = \theta_3 \frac{A}{4n_1} Y^2 X^{-\frac{1}{2n_1}-1},$$

$$U_2 = \left(\frac{\mathrm{Re}_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1}\left[\left(H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}H_2\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}H_2\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}}\right] +$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{Re}_2}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1}\left[H_2^{\frac{n_2+1}{n_2}} - (H_1 + H_2 - Y)^{\frac{n_2+1}{n_2}}\right] +$$

$$+ \theta_3\left[AH_1 X^{-\frac{1}{2n_1}} + B\left(Y - H_1\right) X^{-\frac{1}{2n_2}}\right],$$

$$V_2 = \theta_3\left[A\frac{2YH_1 - H_1^2}{4n_1} X^{-\frac{1}{2n_1}-1} + B\frac{\left(Y - H_1\right)^2}{4n_2} X^{-\frac{1}{2n_2}-1}\right].$$

По найденным составляющим векторов скорости можно найти безразмерные толщины жидких пленок H_1, H_2:

$$H_1 = \delta_1 \mp \theta_3 \frac{n_1+1}{n_1}\frac{A}{C} X^{-\frac{1}{2n_1}},$$

$$H_2 = \delta_2 \mp \theta_3 \frac{1}{D}\left[A\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_1}\right) X^{-\frac{1}{2n_1}} + B\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right] X^{-\frac{1}{2n_2}}\right].$$

Здесь δ_1, δ_2 - относительные толщины пленок при отсутствии движения газа,

$$A = \left(\sqrt{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} f_0''(0) \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_2}\right)^{\frac{1}{n_1}}, \qquad B = \left(\sqrt{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} f_0''(0)\right)^{\frac{1}{n_2}},$$

$$C = 2n_1\left(\frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}}\left[\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta 1}\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta 1}\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}}\right], \quad f_0''(0) = 0.332,$$

$$D = \frac{n_1}{n_1+1}\left(\frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}}\left[\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{n_1+1}{n_1}}\right] + \frac{n_2}{n_2+1}\left(\frac{\operatorname{Re}_2}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_2}}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{n_2+1}{n_2}}.$$

Выводы. С помощью метода малых возмущений разработана методика решения задачи о стационарном трехфазном течении двух пленок нелинейно-вязких жидкостей и газа в прямоугольном канале под действием силы тяжести. Получены аналитические выражения для профилей скоростей и толщин жидких пленок в зависимости от физических параметров задачи.

Бібліографічні посилання

1. **Бояджиев, Х.** Массоперенос в движущихся пленках жидкости [Текст] / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М.: Мир, 1988. – 136 с.
2. **Захаров, М.К.** Совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели [Текст] / М.К. Захаров, В.Г. Айнштейн // Теоретические основы химической технологии. – 1993. – Т. 27, № 5. – С. 462–467.
3. **Захаров, М.К.** Противоточное совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели [Текст] / М.К. Захаров, В.Г. Айнштейн, Дж.Л. Локшин // Теоретические основы химической технологии. – 2000. – Т. 34, № 3. – С. 261–264.
4. **Захаров, М.К.** Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков, Д.М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008. – № 3. – С.70–74.
5. **Конон, П.Н.** Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, А.И. Ермоленко // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, – 2017. – Вып. 32. – С. 46 – 51.
6. **Санто, О.В.** Математичне моделювання течій двошарової рідкої плівки по поверхні твердого тіла [Текст] / О.В.Санто, І.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2014. – С. 200-206.
7. **Шульман, З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях [Текст] / З.П. Шульман, В.Н. Байков. – Минск: Наука и техника, 1979. – 296 с.

Надійшла до редколегії 15.05.2017