УДК 519.6 doi: 10.15421/321728

Худа Ж.В., Тонконог Є. А.
Дніпровський державний технічний університет

СПЛАЙН-МЕТОД ПІДВИЩЕННОЇ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розроблена сплайн-колокаційна схема підвищенної точності розв'язання задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Схема заснована на нових методах ідентифікації параметрів моделі з використанням сплайнів, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку в порівнянні з розв'язками, які знайдені існуючими методами.

Разработана сплайн-коллокационная схема повышенной точности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Схема основана на новых методах идентификации параметров модели с использованием сплайнов, что позволяет повысить точность приближенного решения по сравнению с решениями, которые найдены существующими методами.

A spline-collocation scheme of improved accuracy for solving the Cauchy problem for a normal system of differential equations with variable coefficients is developed. The scheme is based on new methods of identification of the model parameters using splines, which improves the accuracy of the approximate solution compared with solutions that are found existing methods.

Ключові слова: сплайн, колокаційна схема, задача Коші, ідентифікація.

Вступ. Широкий спектр науково-технічних проблем вивчення коливальних процесів різної фізичної природи зводиться до побудови моделей, найчастіше у вигляді диференціальних рівнянь або їх систем із заданими обмеженнями. Отримання точного аналітичного розв'язку таких задач є досить складним. Для побудови і дослідження наближеного розв'язку задач з різного роду граничними умовами отримані і достатньо ефективно використовуються сплайн-методи. Основною проблемою використання сплайн-методів залишається невисока точність отриманого наближеного розв'язку. Використання нових методів ідентифікації параметрів моделей надає параметричному коливальному процесу.

Проблемам ідентифікації присвячено немало робіт, в яких розглядається ідентифікація моделей або їх параметрів, зокрема роботи Д. Гроппа, П. Ейкхоффа, Р. Лі, Л. Льюнга, Я.З. Ципкина, І.В. Сергієнка, В.С. Дейнеки, В.Ф.Губарева. Велика увага в цих роботах приділяється ідентифікації лінійних динамічних об'єктів, що описуються диференціальними або різницевими рівняннями. Питання побудови схем наближеного розв'язку задач з заданими початковими умовами, які мали б більш високу точність у порівнянні зі стандартними кусочно-поліноміальними схемами залишається актуальним.

Постановка задачі. Дана робота присвячена розробці методів ідентифікації параметрів моделі параметричних коливальних процесів з метою підвищення ступеня адекватності цієї моделі, а також побудові методів пошуку наближеного розв'язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + q_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + q_2(t) \end{cases}, \tag{1}$$

з заданими початковими умовами

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \tag{2}$$

Для $t \in R_+$ коефіцієнти системи (1) $p_{ij}(t)$, $q_i(t)\ (i = 1,2;\ j = 1,2)$, а також $x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$ - двічі неперервно диференційовані функції.

Для отримання наближеного розв'язку проведено дискретизацію задачі (1) - (2). Але будь-яка дискретизація призводить до втрати точності розв'язку. Тому пропонується провести ідентифікацію параметрів дискретної моделі так, щоб підвищити ступінь близькості наближеного розв'язку задачі (1)–(2) до її точного розв'язку. Критерієм якості ідентифікації є мінімум абсолютної величини максимального відхилення розв'язку побудованої моделі від точного розв'язку задачі Коші.

Метод розв'язування та аналіз одержаних результатів. Спочатку до системи (1) застосовуємо метод виключення змінної, за допомогою якого задача (1) – (2) зводиться до задачі Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\left(-\frac{p'_{12}(t)}{p_{12}(t)} - p_{11}(t) - p_{22}(t)\right) + x_1\Big(p_{22}(t)p_{11}(t) - p_{12}(t)p_{21}(t) + \tag{3}$$

$$+\frac{p'_{12}(t)p_{11}(t) - p'_{11}(t)p_{12}(t)}{p_{12}}\Big) = p_{12}(t)q_2(t) - p_{22}(t)q_1(t) + \frac{q'_1(t)p_{12}(t) - p'_{12}(t)q_1(t)}{p_{12}(t)}$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x'_1(0) = p_{11}(0)x_1^0 + p_{12}(0)x_2^0 + q_1(0). \tag{4}$$

Введемо заміну

$$-\frac{p'_{12}(t)}{p_{12}(t)} - p_{11}(t) - p_{22}(t) = p(t),$$

$$p_{22}(t)p_{11}(t) - p_{12}(t)p_{21}(t) + \frac{p'_{12}(t)p_{11}(t) - p'_{11}(t)p_{12}(t)}{p_{12}} = q(t),$$

$$p_{12}(t)q_2(t) - p_{22}(t)q_1(t) + \frac{q'_1(t)p_{12}(t) - p'_{12}(t)q_1(t)}{p_{12}(t)} = f(t),$$

$$x_1^0 = x_0, \quad p_{11}(0)x_1^0 + p_{12}(0)x_2^0 + q_1(0) = x'_0 \ .$$

Після проведення заміни задача (3) – (4) набуває вигляду

$$x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1 = f(t), \tag{5}$$

$$x_1(0) = x_0, \quad x_1'(0) = x_0'. \tag{6}$$

До задачі (5) – (6) застосовуємо прийом, розроблений в роботі [2].

Нехай $S(t)$– наближений сплайн-розв'язок задачі (5) – (6). При побудові дискретної моделі вимагатимемо, щоб він співпадав з точним розв'язком задачі (1) – (2) в точках рівномірного розбиття Δ, де $\Delta = \{t_i \mid t_i = ih,\ h > 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Отримаємо дискретну модель

$$\begin{cases} S(0) = x_0, \quad S'(0) = x_0' \\ S_i'' + P_i S_i' + Q_i S_i = F_i, \quad (i = \overline{1, N-1}) \end{cases} \tag{7}$$

Таким чином, неперервна модель (5) – (6) замінюється дискретною моделлю (7). Якщо в моделі (7) параметри P_i; Q_i; F_i покласти рівними значенням відповідних функцій $p(t);q(t);f(t)$ у вузлах розбиття Δ, отримаємо класичну колокаційну схему, порядок точності якої, як відомо, складає $O(h^2)$. Тому було проведено ідентифікацію параметрів моделі (7), що дозволило підвищити порядок точності наближеного розв'язку.

Позначимо $x_{1*}(t)$– точний розв'язок задачі (5) – (6). Для проведення ідентифікації використовуємо відомі асимптотичні розвинення першої і другої похідних інтерполяційного кубічного сплайна у вузлах розбиття. Після проведення ідентифікації модель (7) набуває вигляду

$$\begin{cases} S\ (0) = x_0, \quad S'(0) = x_0' \\ S''(t_i)(1 + \frac{h^2}{12}\eta_i) + S'(t_i)(p_i + \frac{h^2}{12}\alpha_i) + \\ S(t_i)(q_i + \frac{h^2}{12}\beta_i) = f_i + \frac{h^2}{12}\theta_i; \qquad (i = \overline{1, N-1}) \end{cases} \tag{8}$$

де $p_i = p(t_i)$, $q_i = q(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, $t \in R_+$,

$$\eta_i = \mu_i(p_i^2 - 2p_i' - q_i); \quad \alpha_i = \mu_i(p_i q_i' + p_i p_i' - p_i'' - 2q_i');$$

$$\beta_i = \mu_i(q_i' p_i - q_i''); \quad \theta_i = \mu_i(p_i f_i' - f_i''); \quad (i \ge 1) \tag{9}$$

$$\mu_1 = \frac{11}{6}; \quad \mu_2 = \frac{4}{6}; \quad \mu_3 = \mu_4 = \ldots = 1.$$

У якості наближеного розв'язку $S(t)$ задачі (5) – (6) розглядаємо кубічний сплайн

$$S_3(t) = \sum_{i=-1}^{\infty} C_i B_3\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad t \in [0, nh], \quad n \in N, \tag{10}$$

де $B_3\left(\frac{t}{h} - i\right)$- нормований кубічний В-сплайн.

Для визначення коефіцієнтів сплайну (10) використовуємо відомі значення В-сплайну та його похідних у вузлах розбиття. Оскільки сплайн (10) є розв'язком дискретної моделі (8), то після підстановки значень В-сплайна та його похідних приходимо до розрахункової схеми відносно коефіцієнтів сплайну C_i:

$$C_0 = y_0 - \frac{h^2}{6}(f_0 - q_0 y_0 - p_0 y_0'), \qquad C_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{3} y_0'',$$

$$C_{i+1} = K_i \cdot C_i - M_i C_{i-1} + G_i, \quad (i \ge 2), \tag{11}$$

де
$$K_i = \frac{2 + \frac{1}{6}\eta_i h^2 - \frac{2}{3} q_i h^2 - \beta_i \frac{h^4}{18}}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}}, \tag{12}$$

$$M_i = \frac{1 - \frac{1}{2} p_i h + \frac{1}{6} q_i h^2 + \frac{1}{12}\eta_i h^2 - \frac{1}{24}\alpha_i h^3 + \frac{1}{72}\beta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}}, \tag{13}$$

$$G_i = \frac{f_i h^2 + \frac{1}{12}\theta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}}. \tag{14}$$

Перевага запропонованої схеми в тому, що, маючи таку ж стійкість, що і схема Адамса, вона має більш високу точність. Нижче буде виписаний головний член асимптотики ухилення сплайн-розв'язку задачі (1) – (2) від точного розв'язку.

Розв'язок для $x_2(t)$ знаходимо з першого рівняння системи (1), він має вигляд

$$\widetilde{S}_3(t) = \frac{1}{p_{12}(t)}\left(S_3'(t) - p_{11}(t) S_3(t) - q_1(t)\right) \quad t \in [0, nh], \quad n \in N, \tag{15}$$

де $S_3(t)$ – сплайн (10), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (11) – (14).

Доведено, що запропонована схема розв'язку задачі (1) – (2) дає точність порядку $O(h^4)$. Таку оцінку похибки отриманого наближеного розв'язку підтверджує наступна теорема.

Теорема. Нехай $q_1(t)$, $q_2(t) \in L_\infty^4[0, nh]$, $p_{ij}(t) \in L_\infty^5[0, nh]$ $(i, j = \overline{1,2}\ n \in N)$ і $p_{12}(t)$ не дорівнює нулю в будь-якій точці $t \in [0, nh]$. Якщо $x_{1*}(x) \in L_\infty^6[0, nh]$ і $x_{2*}(x) \in L_\infty^6[0, nh]$ – точні розв'язки задачі (1) – (2) и $S_3(t)$ поданий у вигляді (10) , де $C_i (i = \overline{0, n+1})$ - знаходяться за схемою (11) – (14), а $\widetilde{S}_3(t)$ знаходиться за формулою (15), то при $h \to 0$ виконується нерівність

$$\| x_{1*} - S_3 \|_{C\,[0,nh]} \le Ah^4 + Dnh^5 + nO(h^6)\,,$$

де $A = \dfrac{\| x_{1*}^{(4)} \|_{C[0,nh]}}{384}$, $D = \left\| \dfrac{1}{20} x_{1*}^{(5)} - \dfrac{1}{72}(p_{11} + p_{21}) x_{1*}^{(4)} \right\|_{C[0,\,nh]}$ $(n \in N)$,

і $$\| x_{2*} - \widetilde{S}_3(t) \|_{C\,[0,nh]} \le Eh^4 + Fnh^5 + nO(h^6)\,,$$

де $E = \dfrac{\| x_{2*}^{(4)} \|_{C[0,nh]}}{96 \| p_{12} \|_{C[0,nh]}}$, $F = \left\| \dfrac{1}{120 p_{12}} x_{2*}^{(5)} - \dfrac{1}{144} \dfrac{p_{22}}{p_{12}} x_{2*}^{(4)} \right\|_{C[0,\,nh]}$ $(n \in N)$.

Для доведення теореми було розглянуто допоміжне твердження.

Лема. Нехай $q_1(t)$, $q_2(t) \in L_\infty^4\,[0, nh]$, $p_{ij}(t) \in L_\infty^5\,[0, nh]$ $(i, j = \overline{1,2}\; n \in N)$ і $p_{12}(t)$ не дорівнює нулю в будь-якій точці $t \in [0, nh]$. Якщо $x_{1*}(x) \in L_\infty^6\,[0, nh]$ - точний розв'язок задачі (1) – (2) и $S_3(t)$ поданий у вигляді (10), де $C_i\,(i = \overline{0,\, n+1})$ знаходяться за схемою (11) – (14), то при $h \to 0$ рівномірно по i маємо

$$C_i = x_{1i} - \frac{1}{6} x_i'' h^2 + \frac{1}{72} x_{1i}^{(4)} h^4 - \frac{5+i}{120} x_{1i}^{(5)} h^5 + \frac{i-3}{144}(p_{11}(t_i) + p_{21}(t_i)) x_{1i}^{(4)} h^5 + O(h^6)$$

$(i \ge 2)$, де $x_{1i} = x_1(t_i)$.

Висновки. Розроблено метод пошуку наближеного розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, що є моделлю лінійної динамічної системи другого порядку, параметри якої описуються неперервними функціями часу. Для цього було проведено дискретизацію задачі Коші. Побудовано метод ідентифікації параметрів дискретної моделі, який дозволяє отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю в порівнянні зі звичайними колокаційними методами. Отримано коефіцієнти сплайн-розв'язку моделі з ідентифікованими параметрами. Отримано оцінки точності рішення моделей з ідентифікованими параметрами. Доведено, що відхилення отриманого розв'язку від точного не перевищує $O(h^4)$.

Бібліографічні посилання

1. **Алберг, Дж.** Теория сплайнов и ее приложения [Текст] / Дж.Алберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш– М.: Мир, 1972. –389 с.
2. **Дронов, С.Г.** О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши [Текст] / С.Г. Дронов, Ж.В. Худая // Приближение функций и суммирование рядов. –Д. –1992. – С. 29–38.
3. **Завьялов, Ю.С.** Методы сплайн-функций [Текст] / Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Надійшла до редколегії: 21.03.2017