УДК 519.85 doi: 10.15421/321730

**С.В. Яковлев*, О.С. Пичугина****
**Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ»*
***Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

# ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ И ИХ СВОЙСТВА

**В статье вводится понятие евклидовой комбинаторной конфигурации. Формулируется задача оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций и исследуются ее свойства. Предлагаются подходы к решению некоторых классов поставленных оптимизационных задач.**

**У статті вводиться поняття евклідової комбінаторної конфігурації. Формулюється задача оптимізації на множині евклідових комбінаторних конфігурацій та досліджуються її властивості. Запропоновано підходи до розв'язання деяких класів поставлених оптимізаційних задач.**

**In this paper, a concept of the Euclidean combinatorial configuration is intoduced. An optimization problem over a set of the Euclidean combinatorial configurations is formulated and its properties are investigated. Approaches to solving some classes of the optimization problem are presented.**

**Ключевые слова: комбинаторная конфигурация, евклидовое комбинаторное множество, дискретная оптимизация.**

**Введение.** Решение различных классов задач комбинаторной оптимизации вызывает постоянный интерес ученых [3,6,7,16,17]. Важное место занимают исследования, связанные с формализацией понятий комбинаторного множества, комбинаторного объекта, формулировке задач комбинаторной оптимизации и выделению специальных классов таких задач. При этом одним из фундаментальных является определение комбинаторной конфигурации.

В работе [14] К. Берж ввел понятие конфигурации как отображения $\chi$ некоторого исходного множества $A$ элементов произвольной природы в конечное абстрактное результирующее множество $B=\{b_1,...,b_k\}$ определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений $\Omega$, т.е.

$$\chi : A \to B. \qquad (1)$$

Хотя формально здесь не наложены ограничения на мощность множества $A$, фактически рассматривались конечные множества $A=\{a_1,...,a_n\}$.

Конфигурация (1), таким образом, осуществляет структурирование результирующего множества, а ее результат $\pi$ представляет собой упорядоченную последовательность элементов из $B$:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_{j_1} & \ldots & b_{j_n} \end{pmatrix} = b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_n} . \qquad (2)$$

В дальнейшем для конфигурации $\pi$ вида (2) будем использовать обозначение $\pi = \left[ b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \right]$.

Исследованию конфигураций в описанном выше контексте посвящены, в частности, работы [4,5,9,14]. При этом для конечных исходного и результирующего множеств используется термин «комбинаторная конфигурация». Заметим, что осуществляя биекцию между множеством $A$ и множеством $\boldsymbol{J}_n = \{1,....,n\}$ номеров его элементов (называемого нумерующим множеством), отображение (1) можно преобразовать к виду

$$\psi : \boldsymbol{J}_n \to B . \qquad (3)$$

Элементы конфигурации при таком отображении не изменяются, т.е.

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_{j_1} & \ldots & b_{j_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ b_{j_1} & \ldots & b_{j_n} \end{pmatrix} = \left[ b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \right]. \qquad (4)$$

При этом под структурированием множества $B$ будем понимать его строгое упорядочивание, т.е. $b_l \prec b_{l+1}$, $l \in \boldsymbol{J}_{k-1}$, а элементы нумерующего множества $\boldsymbol{J}_n$ будут задавать позиции элементов результирующего множества в конфигурации (3).

**Постановка задачи.** Представим комбинаторную конфигурацию триадой

$$\langle \psi, B, \Omega \rangle , \qquad (5)$$

где $B$ – результирующее множество, $\psi$ – отображение вида (3), $\Omega$ – заданная система ограничений на вид отображения $\psi$ .

В работах [1,2] понятие комбинаторной конфигурации получило развитие путем ослабления условий на конечность $B$. Допускается, что результирующее множество $B$ может быть счетным, а триада (5) в этом случае называется комбинаторным объектом. Более того, введенное в [1,2] понятие комбинаторных объектов $k$-го порядка, позволило существенно расширить класс реальных задач, которые могут быть формализованы с использованием понятия комбинаторного объекта.

Целью настоящей статьи является исследование комбинаторных конфигураций и комбинаторных объектов в случае, когда элементами результирующего множества являются числовые векторы. Выделение такого класса конфигураций связано с широким кругом практических задач, в которых объекты характеризуются определенным набором числовых параметров (например, физических и метрических характеристик). В частности, речь идет о задачах размещения геометрических объектов, имеющих ярко выраженную комбинаторную структуру [1].

Евклидовые комбинаторные конфигурации. Пусть множество $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_k\}$ представляет собой совокупность векторов пространства $R^m$ одинаковой размерности, т.е.

$$\boldsymbol{b}_l = \left(b_{1l},...,b_{ml}\right)^T \in R^m,\ l \in \boldsymbol{J}_k. \tag{6}$$

Тогда в соответствии с (4) для результирующего множества $\boldsymbol{B}$ конфигурация $\pi$ будет представлять собой упорядоченную последовательность векторов $\boldsymbol{b}_{j_1}, \boldsymbol{b}_{j_2},...,\boldsymbol{b}_{j_n}$. Каждой конфигурации $\pi = \left[\boldsymbol{b}_{j_1}, \boldsymbol{b}_{j_2},...,\boldsymbol{b}_{j_n}\right]$ поставим во взаимно-однозначное соответствие вектор $\boldsymbol{x} = \left(x_1,...,x_N\right) \in R^N$, $N=mn$, компоненты которого представляют собой упорядоченный набор элементов мультимножества $\tilde{B} = \left\{b_{1j_1},...,b_{1j_n}, b_{2j_1},...,b_{2j_n},...,b_{mj_1},...,b_{mj_n}\right\}$, т.е. зададим биективное отображение $\varphi$, такое что

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\pi),\ \pi=\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Например, такое соответствие можно задать следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = \left(x_1,...,x_N\right) = (b_{1j_1},...,b_{1j_n}, b_{2j_1},...,b_{2j_n},...,b_{mj_1},...,b_{mj_n}). \tag{8}$$

Заметим, что в общем случае результирующее множество $\boldsymbol{B}$ может состоять из числовых векторов различных размерностей, а отображение $\varphi$ может задавать произвольное упорядочение элементов $b_{1j_1},...,b_{1j_n}, b_{2j_1},...,$ $b_{2j_n},...,b_{mj_1},...,b_{mj_n}$ при выполнении условия (7).

*Определение.* Евклидовой комбинаторной конфигурацией назовем отображение

$$\varphi : (\psi, \boldsymbol{B}, \Lambda) \to R^N, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{B}$ – результирующее множество, $\psi$ – отображение вида $\psi : J_n \to \boldsymbol{B}$, $\Lambda$ – заданная система ограничений на вид отображения $\psi$.

Условимся представлять евклидову комбинаторную конфигурацию кортежем $\langle \varphi, \psi, \boldsymbol{B}, \Lambda \rangle$.

Таким образом, евклидовая комбинаторная конфигурация представляет собой образ комбинаторной конфигурации в арифметическом евклидовом пространстве $R^N$ при заданном отображении $\varphi$.

Пусть $\Pi$ – конечное пространство, элементами которого являются всевозможные комбинаторные конфигурации вида (5). Тогда образ $E$ комбинаторного множества $\Pi$ в $R^N$ будет представлять собой совокупность всех евклидовых комбинаторных конфигураций вида (5), т.е. $E = \varphi(\Pi)$. Множества, для которых существует отображение $\varphi : \Pi \to E$, удовлетворяющее условиям (7), названы евклидовыми комбинаторными множествами [8,9]. Выделение класса евклидовых комбинаторных множеств обосновывается рядом специфических свойств, которыми обладают указанные комбинаторные множества при их отображении в $R^N$.

Исследуем структуру евклидовых комбинаторных множеств, порожденных евклидовыми комбинаторными конфигурациями (10), в которых отображение $\varphi$ задается выражением вида (8). Рассмотрим мультимножество

$\tilde{B}=\left\{b_{ij}\right\},\ i\in\boldsymbol{J}_m,\ j\in\boldsymbol{J}_k$ и выделим для него основу $S(\tilde{B})$, т.е. множество его различных элементов. Положим, что

$$C=S(\tilde{B})=\left\{\tilde{b}_i\right\},\ i\in\boldsymbol{J}_M, M=\left|S(\tilde{B})\right|.$$

Тогда евклидовые комбинаторные конфигурации можно рассматривать как точки дискретной решетки

$$C^N=\left\{\left(c_1,...,c_N\right)\in R^N, c_i\in C,\ i\in\boldsymbol{J}_N\right\},$$

удовлетворяющие заданной системе ограничений $\Lambda$, причем

$$E\subseteq C^N\subset R^N.$$

Заметим, что выбор системы ограничений $\Lambda$ выделяет определенный класс евклидовых комбинаторных конфигураций, а следовательно, и евклидовых комбинаторных множеств $E$. При этом ограничения $\Omega$ на вид отображения $\psi$ для евклидовой комбинаторной конфигурации (5) однозначно задают систему ограничений $\Lambda$, которые формируют множество $E$ из дискретной решетки $C^N$.

Заметим, что ослабление условия на конечность результирующего множества $B$ не приводит к изменению сущности понятия евклидовой комбинаторной конфигурации. При этом, естественно, меняется мощность множества таких конфигураций и их свойства. В частности, если множество $B$ счетно, то имеем класс комбинаторных объектов, которые, следуя приведенной выше терминологии, также естественно назвать евклидовыми комбинаторными объектами. Нетрудно видеть, что совокупность комбинаторных объектов по-прежнему будет евклидовым комбинаторным множеством.

Свойства задач оптимизации на множестве евклидовых конфигураций. Рассмотрим задачу оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций в следующей постановке. Пусть на множестве $E$ евклидовых комбинаторных конфигураций $x=\left(x_1,...,x_N\right)$ задана функция $f:E\to R^1$. Требуется найти

$$x^*=\arg\min_{x\in X\subseteq E} f(x), \tag{10}$$

где $X$ – множество допустимых решений.

В терминах математического программирования задачу (10) можно записать в виде:

$$f(x)\to\min,\ x\in X, \tag{11}$$

где множество $X$ задается системой ограничений

$$x\in E, \tag{12}$$

$$g_i\left(x\right)\le 0,\ i\in\boldsymbol{J}_s, \tag{13}$$

а функции $f(x),\ g_i\left(x\right),\ i\in\boldsymbol{J}_s$ определены на $E$. Ограничения (12) принято называть прямыми, а ограничения (13) – функциональными.

Пусть прямые ограничения описывают класс евклидовых комбинаторных конфигураций (евклидовое комбинаторное множество) $E$, а функциональные ограничения выделяют из $E$ допустимые конфигурации, т.е. формируют допустимое подмножество $X \subseteq E$. Поскольку множество $E \subset R^N$ является дискретным, то задача (11)-(13) относится к классу задач дискретной оптимизации.

Выделение прямых и функциональных ограничений задачи является, вообще говоря, условным. Так, используя непрерывные функциональные представления множества $E$, получим только функциональные ограничения оптимизационной задачи (10). В этом случае исходная задача дискретной оптимизации эквивалентно формулируется как непрерывная задача на условный экстремум. Здесь важную роль играет теория выпуклых продолжений функций на вершинно расположенных множествах [12], позволяющая на определенных этапах решения исходной задачи использовать мощный аппарат выпуклого программирования [15]. С другой стороны, функциональные ограничения (13) можно включить в систему ограничений $\Lambda$, тем самым формируя соответствующий класс евклидовых комбинаторных конфигураций. В общем случае выбор прямых и функциональных ограничений является самостоятельной задачей, позволяющей предлагать эффективные методы решения исходной задачи.

Перейдем к формализации прямых ограничений (12). Заметим, что в совокупности они выделяют из решетки $C^N$ соответствующее евклидово комбинаторное множество $E$. В результате возникает задача формирования таких функций $h_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_p$, определенных на $E$, что

$$E = \left\{ x \in C^N : \ h_i(x) \le 0, \ i \in \boldsymbol{J}_p \right\}. \tag{14}$$

Такую задачу назовем задачей построения функционально-аналитического представления множества $E$. В работах [18,23] предложена теория непрерывных функциональных представлений евклидовых комбинаторных множеств. Отметим, что для любого евклидового комбинаторного множества существует бесконечное множество различных функциональных представлений. Действительно, дискретное множество точек на плоскости всегда представимо как пересечение произвольных двух кривых, пересекающихся в точках этого множества и только в них. Подобно этому, конечное дискретное множество $E \subset R^N$ всегда представимо $N$ поверхностей. С другой стороны, в отдельных случаях существует пара поверхностей, в касании которых образуется множество $E$, т.е существует выбор функционального представления с большим или меньшим количеством компонент. Поэтому, помимо задачи построения функциональных представлений евклидовых комбинаторных множеств, в работах [18,19,22] производится их сравнительный анализ и исследуется вопрос выбора оптимального представления с той или иной точки зрения. Например, квадратичные функциональные представления дискретных множеств имеют минимальную степень среди всех полиномиальных.

Вопросы построения функциональных представлений вершинно расположенных множеств, таких как общее евклидово множество перестановок, отдельные классы евклидового множества размещений, булевое и бинарное множества, евклидово множество перестановочных матриц, четных перестановок и других исследованы в работах [18-23].

С точки зрения решения задачи (13) особый интерес представляют евклидовые комбинаторные конфигурации, порождающие так называемые вершинно расположенные множества [12], совпадающие с множеством вершин своей выпуклой оболочки. Дело в том, что для указанного класса множеств задача (13) может быть эквивалентно сформулирована в классе выпуклых функций $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_s$ [12,13]. Важным классом вершинно расположенных множеств являются так называемые полиэдрально-сферические множества, образованные в результате пересечения многогранника $P = conv\,E$ с гиперсферы $S \supset E$. Эти множества обладают рядом интересных особенностей, которые положены в основу группы полиэдрально-сферических методов оптимизации [18,21,23].

**Выводы.** В даннной статье введено понятие евклидовых комбинаторных конфигураций, описаны их свойства и способы формирования. Выделены классы евклидовых комбинаторных множеств, порожденных евклидовыми комбинаторными конфигурациями. Поставлена задача оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях, исследованы ее особенности, приведен обзор методов решения.

### Библиографические ссылки


1. **Гуляницкий, Л.Ф.** Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации [Текст] / Л.Ф. Гуляницкий, И.В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 70–79.
2. **Гуляницкий, Л.Ф.** До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації [Текст] / Л.Ф. Гуляницкий // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 45–49.
3. **Згуровский, М.З.** Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений [Текст] / М.З. Згуровский, А.А. Павлов. – К., 2016. – 115 с.
4. **Донець, Г.П.** Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях [Текст] / Г.П. Донець, Л.М. Колєчкіна. – Полтава, 2011. – 328 с.
5. **Сачков, В.Н.** Комбинаторные методы дискретной математики [Текст] / В.Н. Сачков – М., 1975. – 319 с.
6. **Сергиенко, И.В.** Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации [Текст] / И.В. Сергиенко, Л.Ф. Гуляницкий, С.И. Сиренко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 71–83.
7. **Сергиенко, И.В.** Современные подходы к решению сложных задач дискретной оптимизации [Текст] / И.В. Сергиенко, В.П. Шило // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1 – С. 32–40.
8. **Стоян, Ю.Г.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К., 1986. – 268 с.
9. **Стоян, Ю. Г.** Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Текст] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К., 1993. – 188 с.
10. **Стоян, Ю. Г.** Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений [Текст] / Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник // Доклады НАН Украины. –

2008. – №10. – С. 28 – 31.
11. **Яковлев, С.В.** О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов [Текст] / Яковлев С.В. // Доклады НАН Украины. – 2017. – № 9. – С. 26-32.
12. **Яковлев, С.В.** Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников [Текст] / Яковлев С.В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – № 7 (34). – С. 1112–1119.
13. **Яковлев, С.В.** Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации [Текст] / С.В.Яковлев // Доклады НАН Украины. – 2017. – №8. – С. 20-32.
14. **Berge, C.** Principes de combinatoire [Text] / C. Berge. – Paris, 1968. – 146 p.
15. **Bertsekas, D. P.** Nonlinear Programming / D. P. Bertsekas. – Belmont, 2016. – 880 p.
16. **Korte, B.** Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms [Text] / B. Korte, J. Vygen. – Berlin, 2012. – 660 pp.
17. **Pardalos, P.M. (Eds**.) Handbook of combinatorial optimization [Text] / P.M. Pardalos, D-Z. Du, R.L. Graham, (Eds.). – New York, 2013. – 3409 pp.
18. **Pichugina, O.** Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. – 2016. – No.2 (4) . – P. 129-152.
19. **Pichugina, O.** Functional and analytic representations of the general permutations [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – No. 4 (79) . – P. 27-38.
20. **Pichugina, O.** Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – No. 6 (52) . – P. 921-930.
21. **Pichugina, O.** Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. – Switzerland, 2016. – P. 689-700.
22. **Pichugina, O.** Continuous representation techniques in combinatorial optimization [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // IOSR Journal of Mathematics. – 2017. – No. 2 (13), Ver.V. – P. 12-25.
23. **Pichugina, O.** Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications [Text] / O. Pichugina, S.Yakovlev // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON) . – 2017. – P. 1167-1175.

*Надійшла до редколегії 12.04. 2017*