УДК 519.85 doi: 10.15421/321731

С.В. Яковлев*, Г.Н.Яськов, К.П. Коробчинский***

**Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ»*

***Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины*

О МЕТОДАХ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА В ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ ШАРОВ В КОНТЕЙНЕРЫ

В статье рассмотрены задачи упаковки неравных шаров фиксированных радиусов в контейнерах, имеющих форму шара, кубоида, цилиндра,кольцевого цилиндра и шарового слоя. Метрические параметры контейнеров предполагаются переменными и подлежат оптимизации. Предложены новые математическая модель и методы решения задачи, в которых радиусы шаров являются переменными, но сходятся в процессе оптимизации к исходным значениям. В результате искусственного расширения пространства переменных методы обеспечивают улучшение локальных решений.

В статті розглянуті задачі упаковки нерівних куль фіксованих радіусів в контейнерах, що мають форму кулі, кубоїда, циліндра, кільцевого циліндра і кульового шару. Метричні параметри контейнерів вважаються змінними і підлягають оптимізації. Запропоновано нові математична модель і методи розв'язання задачі, в яких радіуси куль є змінними та збігаються в процесі оптимізації до вихідних значень. В результаті штучного розширення простору змінних методи забезпечують покращення локальних розв'язків.

The paper deals with the problems of packing unequal (solid) spheres of fixed radii in containers having the shape of a sphere, a cuboid, a cylinder, an annular cylinder and a spherical layer. The metric parameters of the containers are assumed to be variable and subject to optimisation. A new mathematical model and methods for solving the problem are proposed, in which the radii of the spheres are variable, but when optimising converge to the initial values. As a result of the artificial expansion of the space of variables, the methods ensure an improvement of local solutions.

Ключевые слова: упаковка шаров, контейнер, переменный радиус, оптимизация.

Введение. Задачи упаковки шаров имеют многочисленные приложения в различных сферах человеческой деятельности. Случайные упаковки шаров используются для моделирования структуры жидкостей и материалов из стекла, для изучения свойств гранулированных материалов, а также таких явлений, как оседание, уплотнение и спекание. Упаковка шаров также важна в порошковой металлургии для трехмерного лазерного раскроя, при загрузке контейнеров для транспортировки, при компоновке компьютеров, оборудования, зданий и т.д.

Вопросам математического моделирования перечисленных практических задач и методам их решения посвящено большое число публикаций [2-6,9-14,16]. Достаточно полный обзор различных постановок задач упаковки кругов и шаров представлен в работе [3]. В настоящей статье излагается подход к построению новой математической модели задач упаковки шаров в контейнеры, использующий идею искусственного расширения пространства переменных. В результате предлагаются эффективные методы решения рассматриваемого класса задач.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу упаковки шаров в контейнеры. Пусть задано множество шаров $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с фиксированными радиусами $r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0$ соответственно и некоторый контейнер $K(\mu)$, где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$- вектор линейных параметров (размеров) контейнера. В дальнейшем, не теряя общности, положим $r_1^0 \le r_2^0 \le \ldots \le r_n^0$. Требуется разместить шары $S_1, S_2, \ldots, S_n$ в контейнере $K(\mu)$ таким образом, чтобы они попарно не пересекались и располагались внутри контейнера. При этом параметры μ контейнера $K(\mu)$ определяют некоторый критерий качества размещения объектов, представляющий собой фукцию от этих параметров.

Обозначим $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Положение шаров $S_i, i \in J_n$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ переменных $Oxyz$ определяется координатами их центров $p^i = (x_i, y_i, z_i)$, которые назовем параметрами размещения. Шар S_i с параметрами размещения p^i обозначим $S_i(p^i)$. Тогда $S_i(p^i)$ представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - (r_i^0)^2 \le 0, i \in J_n$.

Предположим, что контейнеры $K(\mu)$ могут иметь одну из следующих форм:

- шар $K^1(\mu),\ \mu = R$, описываемый неравенством $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \le 0$;

- кубоид $K^2(\mu),\ \mu = (a, b, h)$, описываемый неравенствами $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le h\}$, где $a \ge 2 \max\limits_{i \in J_n} \{r_i^0\},\ b \ge 2 \max\limits_{i \in J_n} \{r_i^0\}$;

- цилиндр $K^3(\mu),\ \mu = (R, h)$, описываемый неравенствами $\{x^2 + y^2 - R^2 \le 0,\ 0 \le z \le h\}$, где $R \ge \max\limits_{i \in J_n} \{r_i^0\}$ и $h \ge 2 \max\limits_{i \in J_n} \{r_i^0\}$;

- кольцевой цилиндр $K^4(\mu),\ \mu = (R, \rho, h)$, описываемый неравенствами $\{x^2 + y^2 - R^2 \le 0, -x^2 - y^2 + \rho^2 \le 0, R > \rho, 0 \le z \le h\}$, где $R - \rho \ge \max\limits_{i \in J_n} \{r_i^0\}$;

- шаровой слой $K^5(\mu),\ \mu = (R, \rho)$, описываемый неравенствами $\{\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \le 0,\ -x^2 - y^2 - z^2 + \rho^2 \le 0,\ R > \rho\}$.

Заметим, что некоторые метрические параметры контейнеров могут быть фиксированы. При этом существует широкий класс задач упаковки, в которых только один линейный размер контейнера является переменным.

Например, предполагается переменным только радиус шара $K^1(\mu)$ при $\mu = R$; высота кубоида $K^2(\mu)$ при $\mu = h$; высота или радиус цилиндра $K^3(\mu)$, кольцевого цилиндра $K^4(\mu)$ или шарового слоя $K^5(\mu)$ при $\mu = h$, $\mu = R$ либо $\mu = \rho$.

Математическая модель и методы решения задачи. Математическая модель задачи может быть представлена в следующем виде: найти такие параметры размещения $p^i = \left(x_i, y_i, z_i\right)$ шаров S_i, $i \in J_n$ и метрические параметры $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s)$ контейнера $K(\mu)$, что

$$F\left(\mu\right) \to extr \tag{1}$$

при ограничениях

$$\Phi_{ij}\left(p^i, p^j\right) \geq 0, \; i \in J_n, \; j \in J_n, \; i < j, \tag{2}$$

$$\Phi_{0i}\left(p^i, \mu\right) \geq 0, \; i \in J_n, \tag{3}$$

где неравенства (2),(3) задают соответственно условия непересечения объектов $S_i(p^i)$ и $S_j(p^j)$ и их размещения в области $K(\mu)$.

В общем случае мощным аппаратом формализации условий непересечения для различных классов объектов и размещения их в области является теория Ф-функций Ю.Г.Стояна [9]. В задачах компоновки шаров условия их попарного непересечения (2) формализуются с помощью функций

$$\Phi_{ij}(p_i, p_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i^0 + r_j^0)^2.$$

Функции $\Phi_{0i}\left(p^i, \mu\right)$ в (3) зависимости от формы контейнеров имеют вид:

$$\Phi_{0i}^1\left(p^i, \mu\right) = -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (R - r_i^0)^2$$

для $K^1(\mu)$;

$$\Phi_{0i}^2\left(p^i, \mu\right) = \min\{x_i - r_i^0, \; y_i - r_i^0, \; z_i - r_i^0, \; a - x_i - r_i^0, \; b - y_i - r_i^0, \; h - z_i - r_i^0\}$$

для $K^2(\mu)$;

$$\Phi_{0i}^3\left(p^i, \mu\right) = \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i^0)^2, \; z_i - r_i^0, \; h - z_i - r_i^0\}$$

для $K^3(\mu)$;

$$\Phi_{0i}^4\left(p^i, \mu\right) = \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i^0)^2, x_i^2 - y_i^2 - (\rho - r_i^0)^2, z_i - r_i^0, h - z_i - r_i^0\}$$

для $K^4(\mu)$;

$$\Phi_{0i}^5\left(p^i, \mu\right) = \min\{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\rho - r_i^0)^2, \; -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (R - r_i^0)^2\}$$

для $K^5(\mu)$.

Таким образом, задачи вида (1)-(3), соответствующие различным представлениям $\Phi_{0i}\left(p^i,\mu\right)$, являются задачами математического программирования с *3n+s* переменными $x_i, y_i, z_i, \mu_j, i\in J_n, j\in J_s$. Свойства таких задач и различные подходы к их решению рассмотрены, в частности, в работах [2-6, 9-14, 16]. В силу того, что задачи являются *NP*-трудными, указанные методы в общем случае позволяют находить только локальные решения или приближения к ним.

Целью настоящей статьи является построение эквивалентной модели задач (1)-(3), на основании которой предлагаются новые подходы, позволяющие улучшать полученные локальные решения. В основу положены исследования, связанные с выделением комбинаторной структуры задач размещения геометрических объектов [1].

Осуществим следующие эквивалентные преобразования задачи (1) - (3). Будем считать. что радиусы шаров $S_1, S_2, \ldots, S_n$ являются переменными и обозначим их соответственно $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда условия попарного непересечения и размещения в области преобразуются к виду

$$\widetilde{\Phi}_{ij}\left(p^i,p^j\right)\ge 0,\ i\in J_n,\ j\in J_n,\ i<j, \tag{4}$$

$$\widetilde{\Phi}_{0i}\left(p^i,\mu\right)\ge 0,\ i\in J_n, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(p_i,p_j)=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2-(r_i+r_j)^2,$$

а функции $\widetilde{\Phi}_{0i}\left(p^i,\mu\right)$, $i\in J_n$ в зависимости от области $K(\mu)$ задаются одним из следующих выражений :

$$\widetilde{\Phi}^1_{0i}\left(p^i,\mu\right)=-x_i^2-y_i^2-z_i^2+(R-r_i)^2,$$

$$\widetilde{\Phi}^2_{0i}\left(p^i,\mu\right)=\min\{x_i-r_i,\ y_i-r_i,\ z_i-r_i,\ a-x_i-r_i,\ b-y_i-r_i,\ h-z_i-r_i\},$$

$$\widetilde{\Phi}^3_{0i}\left(p^i,\mu\right)=\min\{-x_i^2-y_i^2+(R-r_i)^2,\ z_i-r_i,\ h-z_i-r_i\},$$

$$\widetilde{\Phi}^4_{0i}\left(p^i,\mu\right)=\min\{-x_i^2-y_i^2+(R-r_i)^2, x_i^2+y_i^2-(\rho+r_i)^2, z_i-r_i, h-z_i-r_i\},$$

$$\widetilde{\Phi}^5_{0i}\left(p^i,\mu\right)=\min\{x_i^2+y_i^2+z_i^2-(\rho-r_i)^2,-x_i^2-y_i^2-z_i^2+(R-r_i)^2\}.$$

Одновременно с этим сформируем такую систему ограничений для $r_i, i\in J_n$, что ее решениями будут значения $r_i^0, i\in J_n$ и только они. Нетрудно видеть, что формирование такой системы сводится к описанию множества $E(r_1^0, r_2^0,\ldots,r_n^0)\subset R^n$ всевозможных перестановок из $r_i^0, i\in J_n$.

Существуют различные подходы к функционально-аналитическому представлению множества $E(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)$ [7,8]. В частности, при полиэдрально-сферическом предствлении это множество описывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^0,$$
$$\sum_{i \in W} r_i \geq \sum_{i=1}^{|W|} r_i^0, \ \forall W \subseteq J_n, \ |W| < n, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(r_i - \tau \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i^0 - \tau \right)^2, \tag{7}$$
$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^0,$$

где $|W|$ - мощность множества W, а суммирование производится по всевозможным подмножествам W из J_n.

Рассмотрим задачу математического программирования (1),(4)-(7) в пространстве *4n+s* переменных $x_i, y_i, z_i, r_i, \mu_j, i \in J_n, j \in J_s$. Данная задача эквивалентна исходной задаче (1)-(3) при фиксированных значениях переменных $r_i = r_i^0, i \in J_n$. В тоже время, использование дополнительных переменных позволяет улучшать локальные решения задачи (1)-(3) и тем самым «преодолевать» зоны притяжения локальных экстремумов. Описанный выше подход к построению эквивалентной модели в пространстве более высокой размерности для задач размещения геометрических объектов получил название метода искусственного расширения пространства [15].

Идея использования дополнительных переменных, которыми являются радиусы шаров, нашла широкое применение при разработке и реализации численных методов решения рассматриваемого класса задач упаковки в контейнеры. Одними из первых эту идею реализовали разработчики алгоритма JA (Jump Algorithm) [10]. Алгоритм JA применим в случае, когда одна из метрических характеристик контейнера $K(\mu)$ (высота, радиус, коэффициент гомотетии) является переменной. Он состоит в поочередном решении основной задачи и нескольких вспомогательных задач математического программирования, которые дают возможность гибко управлять радиусами шаров и незанятым пространством контейнера. С одной стороны, максимизируется сумма объемов шаров, что повышает коэффициент заполнения контейнера. С другой стороны, теоретически обосновывается [10,11], что специальные ограничения для радиусов шаров и правила их перестановки позволяют вернуть значения переменных радиусов к начальным значениям и уменьшить при этом функцию цели основной задачи. Таким образом, осуществляется переход из одного локального минимума основной задачи в другой, с лучшим значением целевой функции.

Важной особенностью математической модели (1),(4) - (7) является тот факт, что мы можем в качестве переменных выбирать только часть из r_i , $i \in J_n$. Это обстоятельство имеет существенное значение для задач большой размерности. В общем случае, структура множества $E(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)$ позволяет предложить целое семейство алгоритмов решения задач упаковки шаров, основанное на разбиении множества радиусов этих шаров $r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0$ на систему попарно непересекающихся подмножеств, организованных специальным образом.

Рассмотрим множество $A = \left\{ r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0 \right\}$. Осуществим его разбиение на p попарно непересекающихся подмножеств и введем обозначения

$$A = \bigcup_{k=1}^{p} A^k, \ A^i \cap A^j = \varnothing, i \neq j, \ A^k = \left\{ r_{m_1}^0 \ , r_{m_2}^0, \ldots, r_{m_{l_k}}^0 \right\}, \ \sum_{k=1}^{p} l_k = n. \quad (8)$$

В соответствии с разбиением (8), представим множество $E(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)$ в виде прямого произведения

$$E(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0) = \prod_{k=1}^{p} E^k(r_{m_1}^0 \ , r_{m_2}^0, \ldots, r_{m_{l_k}}^0).$$

Сформируем ограничения (6),(7) отдельно для каждого из множеств $E^k(r_{m_1}^0 \ , r_{m_2}^0, \ldots, r_{m_{l_k}}^0)$, $k \in J_p$:

$$\sum_{i \in A^k} r_i = \sum_{i \in A^k}^{n} r_i^0$$

$$\sum_{i \in W} r_i \geq \sum_{i=1}^{|W|} r_i^0, \ \forall W \subseteq A^k, \ |W| < l_k$$

$$\sum_{i \in A^k} \left(r_i \ - \tau_k \right)^2 = \sum_{i \in A^k} \left(r_i^0 - \tau_k \right)^2$$

$$\tau_k = \frac{1}{l_k} \sum_{i \in A^k} r_i^0, \ k = 1, 2, \ldots, p.$$

Заметим, что выбор способа разбиения множества $A = \left\{ r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0 \right\}$ на систему подмножеств $A^k = \left\{ r_{m_1}^0 \ , r_{m_2}^0, \ldots, r_{m_{l_k}}^0 \right\}$ с последующим формированием ограничений, задающих множества $E^k(r_{m_1}^0 \ , r_{m_2}^0, \ldots, r_{m_{l_k}}^0), k \in J_p$, задают семейство модификаций предложенного подхода.

Пусть получено некоторое локальное решение задачи (1)-(3) или его приближение при фиксированных $r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0$. Это решение можно улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и рассматривая $r_1, r_2, \ldots, r_n$ как независимые переменные. Более того, полученное новое локальное решение можно снова попытаться улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и формируя новое разбиение множества $A = \left\{ r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0 \right\}$.

Выводы. В статье предложен новый подход к решению задачи упаковки шаров фиксированных радиусов в контейнеры различной формы путем формирования эквивалентной модели задачи, в которой радиусы шаров рассматриваются как независимые переменные. В результате обосновывается возможность улучшения локальных экстремумов исходной задачи, что позволяет предложить новые схемы глобальной оптимизации для рассматриваемого класса задач.

Библиографические ссылки

1. **Яковлев, С.В.** О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов [Текст] / С.В. Яковлев // Доп. НАНУ. – 2017. – № 9. – С. 26–32.
2. **Birgin, E.G.** Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems / Birgin E.G., Sobral F.N.C. // Computers & Operations Research. – 2008. – 35, pp. 2357–2375.
3. **Hifi, M.** A literature Review on Circle and Sphere Packing Problems:Model and Methodologies [Text] / M. Hifi, R. M'Hallah //Advances in Optimization Research. – Vol. 2009. – 2009.
4. **Hifi, M.** Width Beam and Hill-Climbing Strategies for the Three-Dimensional Sphere Packing Problem [Text] / M. Hifi, L.Yousef // In Proceedings of the 2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems, ACSIS. – 2014. – Vol. 2, pp. 421–428.
5. **Liu, J.** An Effective Hybrid Algorithm for the Circles and Spheres Packing Problems [Text] / J. Liu, Y.Yao, Yu.Zheng, H. Geng, G.Zhou // Combinatorial Optimization and Applications. Lecture Notes in Computer Science. – 2009. – Vol. 5573, pp. 135–144.
6. **Kubach, T.** Greedy Algorithms for Packing Unequal Spheres into a Cuboidal Strip or a Cuboid [Text] / T. Kubach, A.Bortfeldt, T.Tilli, H. Gehring // Asia Pac. J. Oper. Res. – 2011. – 28(6), pp. 739–753.
7. **Pichugina, O.S.** Functional and analytic representations of the general permutations [Text] / O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.- 2016, 1(4), pp. 27-38.
8. **Pichugina, O.S.** Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization [Text] / O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016, 52(6), pp. 921-930.
9. **Stoyan, Yu.G.** Φ-functions for primary 2D-objects [Text] / Yu.G. Stoyan, G. Scheithauer, T.Romanova // Studia Informatica Universalis. Int. J. Informayics,(2002).- 2**,** pp.1-32.
10. **Stoyan, Yu. G.** Packing Unequal Spheres into Various Containers [Text] / Yu. G. Stoyan, G. Scheithauer, G. Yaskov // Cybernetics and Systems Analysis, 2016 , 52(3),·pp 419–426.
11. **Stoyan, Yu.** Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm,Optimization Letters [Text] / Yu. Stoyan, G. Yaskov. – 2014, Vol.8(3), p. 949-970.
12. **Stoyan, Yu.** Packing of Various Solid Spheres into a Parallelepiped [Text] / Yu.G. Stoyan,

G. Yaskov, G. Scheithauer // Central European Journal of Operational Research. – 2003. – 11(4), pp. 389–407.

13. **Sutou, A.** Global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3D [Text] / A. Sutou, Y.Day // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2002. – 114(3), pp. 671–694.
14. **Wang, J.** Packing of Unequal Spheres and Automated Radiosurgical Treatment Planning [Text] / J. Wang // Journal of Combinatorial Optimization, 1999, Vol. 3, pp. 453–463.
15. **Yakovlev, S.V.** The method of artificial space dilation in problems of optimal packing of geometric objects [Text] / S.V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis, 2017. - Vol. 53, No. 5, pp.725-732
16. **Zeng, Z.Z.** An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere [Text] / Z.Z. Zeng, W.Q. Huang, R.C. Xu, Z.H. Fu // Advanced Materials Research. – 2012. – Vol. 546–547, pp. 1464–1469.

Надійшла до редколегії 11.05. 2017