

Л.Т. Бойко, К.А. Колісник

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара***АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКРИТЕРІАЛЬНОЇ
ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ**

Запропоновано алгоритм вибору компромісного розв'язку трикритеріальної задачі оптимізації. В алгоритмі порівнюються три варіанти методу згортки, обговорюються програмна реалізація алгоритму та результати її тестування.

Предложен алгоритм выбора компромиссного решения трикритериальной задачи оптимизации. В алгоритме сравниваются три варианта метода свертки, обсуждается программная реализация алгоритма и результаты её тестирования.

The algorithm for selecting a compromise solution three criteria optimization problem is proposed. The algorithm compares three variants of convolution method, discusses the software implementation of the algorithm and the results of its testing.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, множина Парето, раціональний компроміс, метод згортки.

Вступ. Для задач багатокритеріальної оптимізації (БКО) характерною проблемою є невизначеність цілей. Ця проблема зумовлена тим, що цілі, як правило, є суперечливими, крім того, вони можуть визначати критерії різної природи. Оскільки при цьому кожна цільова функція є оптимальною у своїй точці області допустимих розв'язків, то дуже важливо забезпечити раціональний компроміс заданих цілей [2].

Алгоритм пошуку раціонального компромісу включає в себе такі кроки:

- виключити з області припустимих розв'язків заздалегідь неприйнятні варіанти розв'язків, тобто визначити оптимальну за Парето множину;
- використати прийоми та методи зведення багатоцільової задачі до задачі оптимізації з одним критерієм та розв'язати однокритеріальну задачу оптимізації.

За цим алгоритмом розроблено програмний продукт, роботу якого перевірено на тестових прикладах. В даній роботі відпрацьовуються підходи до розв'язування реальної прикладної задачі, описаної в роботі [1].

Постановка задачі. Розглядається така трикритеріальна задача оптимізації:

$$\begin{cases} f_1(X) \rightarrow \max; \\ f_2(X) \rightarrow \max; \\ f_3(X) \rightarrow \max; \end{cases} \quad (1)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Тут D – множина допустимих розв’язків, яка визначається за допомогою таких обмежень:

$$\begin{aligned} a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}; \\ g_k(X) \leq d_k, \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (2)$$

В умовах (2) a_i, b_i, d_k – відомі додатні числа.

Припускаємо, що функції $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ та $g_k(X)$, $k = \overline{1, r}$ є неперервними в області допустимих розв’язків D .

Потрібно знайти таку оптимальну точку $X_0 \in D$, що функції $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ в цій точці досягають своїх максимальних значень. Проте випадки існування такого ідеального розв’язку в багатокритеріальній задачі вкрай рідкісні. Тому необхідно формалізувати принцип оптимальності, тобто визначити в якому сенсі «оптимальний» розв’язок є кращим за інші.

Нехай $X_1, X_2 \in D$. Якщо для всіх критеріїв $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ мають місце нерівності $f_i(X_2) \geq f_i(X_1)$, $i = 1, 2, 3$, причому хоча б одна з нерівностей є строгою, то розв’язок X_2 переважає розв’язок X_1 ($X_2 \succ X_1$). У задачі БКО точка X_1 називається оптимальною за Парето, якщо не існує іншої точки $X \in D$, яка б переважала X_1 , тобто точка X_1 є непіліпшуваною. Точки, оптимальні за Парето, утворюють множину Парето $D_p \subset D$. Відповідно до принципу Парето, раціональний розв’язок багатокритеріальної задачі необхідно шукати серед елементів множини D_p .

Однак питання про те, яка точка множини Парето є оптимальним розв’язком, залишається відкритим. Для вибору єдиного розв’язку потрібна апріорна інформація.

Особа, що приймає рішення (ОПР), на підставі аналізу множини Парето може оцінити, як збільшення значення однієї цільової функції позначається на інших, тобто здійснити вибір раціонального розв’язку.

Метод розв’язання. Задача (1), (2) розв’язувалася за таким алгоритмом:

1) використовуючи обмеження (2), визначалася область D допустимих розв’язків;

2) в області D для кожної функції $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ знаходилося її максимальне значення і координати точки, в якій це значення досягається;

3) із області D виділялася множина Парето для критеріїв (1);

4) виконувався перехід до безрозмірних координат точок області D , також виконувалася нормалізація (масштабування) критеріїв;

5) багатокритеріальна задача оптимізації (безрозмірна або розмірна) зводилася до однокритеріальної за допомогою методу згортки. Використовувалися такі варіанти методу згортки: лінійна згортка критеріїв, мультиплікативна згортка критеріїв, згортка точок, в яких функції $f_i(X)$, $i=1,2,3$ досягають максимальних значень. Крім цього для ОПР надавалася можливість самій (на свій розсуд) вибрати варіант компромісної точки;

б) проводився аналіз добутих результатів.

Наведений алгоритм був програмно реалізованим в середовищі візуальної розробки програм MS Visual Studio 2012. Програма написана мовою С# з використанням об'єктно-орієнтованих технологій.

Правильність роботи розробленого програмного продукту перевірялася на тестовому прикладі.

Приклад. Візьмемо такі цільові функції:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 25 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max; \\ f_2(x_1, x_2) = 16 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 0,5)^2 \rightarrow \max; \\ f_3(x_1, x_2) = 9 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (3)$$

Область D визначимо такими обмеженнями:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 4; \\ 0 \leq x_2 \leq 2; \\ x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases} \quad (4)$$

Як видно з (3), кожна цільова функція набуває свого максимального значення в своїй точці області D . Ці точки утворюють трикутник $C_1C_2C_3$, показаний на рис.1.

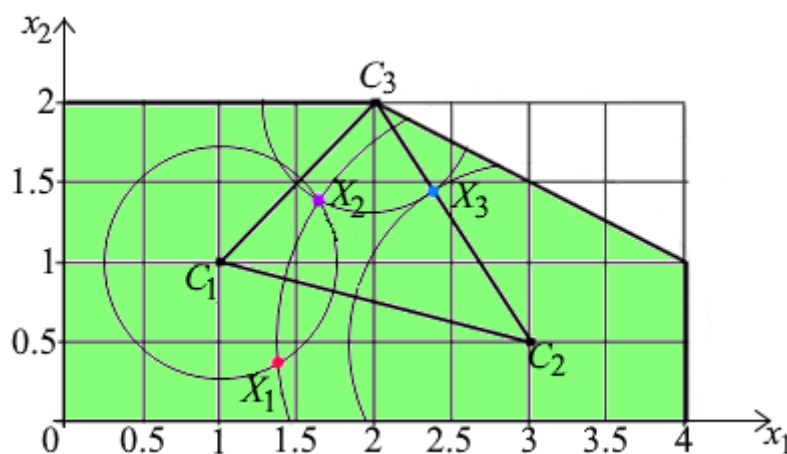


Рис. 1. Виділення множини Парето

З області D виділимо множину Парето. Для цього поділимо множину D на дві підмножини $D = D_1 \cup D_2$, де D_1 – область трикутника $C_1C_2C_3$ разом із точками його граней, $D_2 = D \setminus D_1$.

Порівняємо значення функцій $f_i(X)$, $i=1,2,3$ в областях D_1 і D_2 . Кожна функція $f_i(X)$ набуває максимального значення в своїй точці C_i . З формул (3) видно, що лініями рівнів для кожної функції $f_i(X)$ є кола з центрами в точці C_i . Розглянемо довільну точку $X_1 \in D_2$, яка розташована за межами трикутника (рис. 1). Ця точка знаходиться на перетині певних кіл рівнів для функцій $f_1(X)$ та $f_2(X)$. Але таких точок перетину буде дві: $X_1 \in D_2$ та $X_2 \in D_1$, причому $f_1(X_1) = f_1(X_2)$, $f_2(X_1) = f_2(X_2)$, однак $f_3(X_2) > f_3(X_1)$. Зрозуміло, що точка $X_2 \in D_1$ переважає точку $X_1 \in D_2$ по третьому критерію. Крім цього, точка $X_2 \in D_1$ є неполіпшуваною.

Якщо взяти довільну точку на грані трикутника D_1 , наприклад, точку X_3 (рис. 1), то зрозуміло, що вона також є неполіпшуваною.

Отже, всі точки множини D_1 (і лише вони) належать множині Парето для задачі (3), (4), тобто $D_p = D_1$.

В реальних задачах часто є відомою деяка апріорна інформація про цільові функції. Наприклад, задані деякі нормативні обмеження зверху $f_i(X) \leq f_i^*$, або знизу $f_i(X) \geq f_i^{**}$, $i=1,2,3$. В цих обмеженнях f_i^*, f_i^{**} , $i=1,2,3$ – відомі значення. Урахування таких обмежень може дозволити звузити множину D_p .

Щоб відійти від деяких особливостей конкретної прикладної задачі бажано перевести задачу БКО до безрозмірного вигляду. Наприклад, в реальній задачі, що описана в роботі [1], координатам точки $X \in D_1$ відповідають маси компонент шихти, яка завантажується в доменну піч. Компоненти шихти різняться між собою не лише масою, а й хімічними властивостями. Щоб можна було такі «координати» точки $X \in D_1$ порівнювати між собою, їх треба зробити безрозмірними.

Цільові функції в реальній задачі визначають критерії різної природи – економічного, технічного чи іншого змісту. Щоб функції $f_i(X)$, $i=1,2,3$ в (3) можна було порівнювати між собою, їх треба зробити безрозмірними.

Перейдемо в задачі (3), (4) до безрозмірних координат точок області D і виконаємо масштабування (нормалізацію) критеріїв.

Нехай

$$x_1 = 4t_1; \quad x_2 = 2t_2; \quad 0 \leq t_i \leq 1, \quad i=1,2. \quad (5)$$

Підставимо (5) у третю умову обмежень (4), добудемо такий безрозмірний варіант цього обмеження:

$$t_1 + t_2 \leq 1,5. \quad (6)$$

Отже, обмеження (5), (6) визначають безрозмірний варіант області D . Він зображений на рис.2.

Підставимо (5) у кожену цільову функцію (3) і перейдемо до нових цільових функцій.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 25 - (4t_1 - 1)^2 - (2t_2 - 1)^2 = \\ &= 25 \left(1 - \frac{16}{25}(t_1 - 0,25)^2 - \frac{4}{25}(t_2 - 0,5)^2 \right) = 25\varphi_1(t_1, t_2); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2) &= 16 - (4t_1 - 3)^2 - (2t_2 - 0,5)^2 = \\ &= 16 \left(1 - (t_1 - 0,75)^2 - \frac{1}{4}(t_2 - 0,25)^2 \right) = 16\varphi_2(t_1, t_2); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f_3(x_1, x_2) &= 9 - (4t_1 - 2)^2 - (2t_2 - 2)^2 = \\ &= 9 \left(1 - \frac{16}{9}(t_1 - 0,5)^2 - \frac{4}{9}(t_2 - 1)^2 \right) = 9\varphi_3(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (9)$$

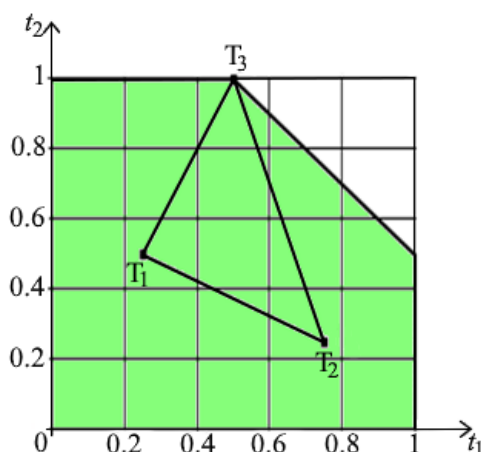


Рис.2. Безрозмірний варіант області D

Як результат, замість задачі (3), (4) матимемо таку безрозмірну задачу БКО

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1, t_2) = 1 - \frac{16}{25}(t_1 - 0,25)^2 - \frac{4}{25}(t_2 - 0,5)^2 \rightarrow \max; \\ \varphi_2(t_1, t_2) = 1 - (t_1 - 0,75)^2 - 0,25(t_2 - 0,25)^2 \rightarrow \max; \\ \varphi_3(t_1, t_2) = 1 - \frac{16}{9}(t_1 - 0,5)^2 - \frac{4}{9}(t_2 - 1)^2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (10)$$

Обмеженнями є такі умови:

$$\begin{cases} 0 \leq t_1 \leq 1, \\ 0 \leq t_2 \leq 1, \\ t_1 + t_2 \leq 1,5. \end{cases} \quad (11)$$

Після розв'язання задачі (10), (11) можна знайдений розв'язок перерахува-

ти на функції $f_i(X)$, $i=1,2,3$ (тобто на розмірний варіант задачі (3), (4)) за формулами (5), (7), (8), (9).

Відмітимо, що цільові функції (3) в області D набувають лише додатних значень. Для пошуку компромісного розв'язку багатоцільової задачі застосовувався метод згортки [2]. Для цього кожній цільовій функції призначався коефіцієнт її важливості (коефіцієнт пріоритету) $a_i \geq 0$, $i=1,2,3$; $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$ і впроваджувалася узагальнена цільова функція (наприклад, для розмірного варіанту задачі)

$$F_L(X) = \sum_{i=1}^3 a_i f_i(X) \rightarrow \max, \quad (12)$$

або

$$F_M(X) = \prod_{i=1}^3 (f_i(X))^{a_i} \rightarrow \max. \quad (13)$$

Нехай розв'язком однокритеріальної задачі (12), (4) буде точка $X_L \in D_p$ (відповідно, точка $X_M \in D_p$ для задачі (13), (4)), в якій узагальнений критерій набудатиме максимального значення. Після цього обчислювались значення цільових функцій $f_i(X)$, $i=1,2,3$ в знайдених точках X_L (або X_M).

Крім лінійної згортки критеріїв (12) та мультиплікативної згортки критеріїв (13), використовувався ще метод згортки точок, в яких цільові функції $f_i(X)$, $i=1,2,3$ набувають максимальних значень. Це точки C_i , $i=1,2,3$, показані на рис.1. В третьому варіанті методу згортки спочатку за допомогою коефіцієнтів важливості знаходилися координати точки

$$X_* = a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3, \quad (14)$$

а потім обчислювались значення $f_i(X_*)$, $i=1,2,3$. Розв'язувати додатково однокритеріальну задачу непотрібно.

Розроблений програмний продукт надає можливість ОПР, використовуючи свій досвід та обізнаність в реальній задачі, обрати на свій розсуд точку $X_0 \in D$ для дослідження та проаналізувати результат.

На рис.3 показано скріншот з результатами роботи програмного продукту при фіксованих пріоритетах кожної із цільових функцій.

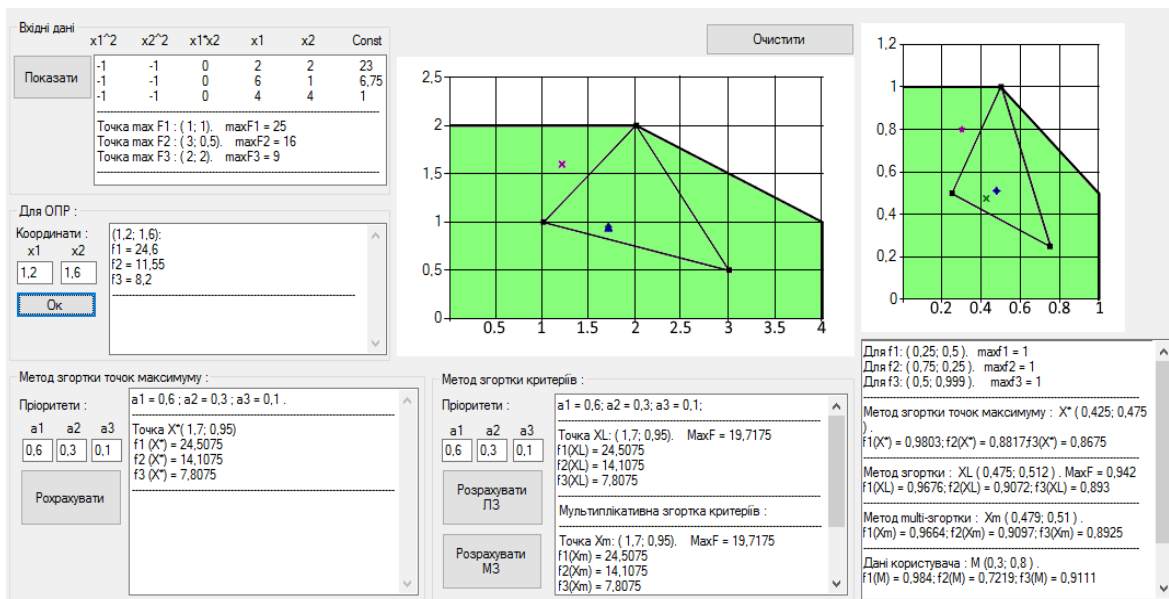


Рис.3. Результати роботи програмного продукту

В таблицях 1, 2 для прикладу зібрані результати пошуку компромісних точок та значення цільових функцій у цих точках для всіх трьох варіантів методу згортки в залежності від обраних пріоритетів.

Таблиця 1

Результати розрахунків, виконаних для безрозмірної задачі

Пріоритети	Згортка точок $T_i, i = 1, 2, 3$	Лінійна згортка критеріїв	Мультиплікативна згортка критеріїв
$a_1 = 0, 2;$ $a_2 = 0, 6;$ $a_3 = 0, 2.$	$T_*(0, 600; 0, 450)$ $\varphi_1(T_*) = 0, 9212;$ $\varphi_2(T_*) = 0, 975;$ $\varphi_3(T_*) = 0, 8478.$	$T_L(0, 600; 0, 450)$ $\varphi_1(T_L) = 0, 9216;$ $\varphi_2(T_L) = 0, 9672;$ $\varphi_3(T_L) = 0, 8481.$	$T_M(0, 590; 0, 450)$ $\varphi_1(T_M) = 0, 9252;$ $\varphi_2(T_M) = 0, 9643;$ $\varphi_3(T_M) = 0, 8528.$
$a_1 = 0, 6;$ $a_2 = 0, 3;$ $a_3 = 0, 1.$	$T_*(0, 425; 0, 475)$ $\varphi_1(T_*) = 0, 9803;$ $\varphi_2(T_*) = 0, 8817;$ $\varphi_3(T_*) = 0, 8675.$	$T_L(0, 475; 0, 512)$ $\varphi_1(T_L) = 0, 9676;$ $\varphi_2(T_L) = 0, 9072;$ $\varphi_3(T_L) = 0, 8930.$	$T_M(0, 479; 0, 510)$ $\varphi_1(T_M) = 0, 9664;$ $\varphi_2(T_M) = 0, 9097;$ $\varphi_3(T_M) = 0, 8925.$
$a_1 = 0, 33;$ $a_2 = 0, 33;$ $a_3 = 0, 33.$	$T_*(0, 500; 0, 583)$ $\varphi_1(T_*) = 0, 9589;$ $\varphi_2(T_*) = 0, 9097;$ $\varphi_3(T_*) = 0, 9228.$	$T_L(0, 503; 0, 498)$ $\varphi_1(T_L) = 0, 9590;$ $\varphi_2(T_L) = 0, 9236;$ $\varphi_3(T_L) = 0, 8888.$	$T_M(0, 503; 0, 498)$ $\varphi_1(T_M) = 0, 9592;$ $\varphi_2(T_M) = 0, 9237;$ $\varphi_3(T_M) = 0, 8889.$
$a_1 = 0, 5;$ $a_2 = 0, 3;$ $a_3 = 0, 2.$	$T_*(0, 450; 0, 525)$ $\varphi_1(T_*) = 0, 9743;$ $\varphi_2(T_*) = 0, 8911;$ $\varphi_3(T_*) = 0, 8953.$	$T_L(0, 483; 0, 508)$ $\varphi_1(T_L) = 0, 9652;$ $\varphi_2(T_L) = 0, 9121;$ $\varphi_3(T_L) = 0, 8919.$	$T_M(0, 485; 0, 507)$ $\varphi_1(T_M) = 0, 964;$ $\varphi_2(T_M) = 0, 9133;$ $\varphi_3(T_M) = 0, 8916.$

Таблиця 1 містить розрахунки для безрозмірної задачі (10), (11). Ці ре-

зультати були перераховані за формулами (5), (7), (8), (9) на розмірний варіант задачі і наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Результати розрахунків, виконаних для розмірної задачі

Пріоритети	Згортка точок $C_i, i = 1, 2, 3$	Лінійна згортка критеріїв (10)	Мультиплікативна згортка критеріїв (11)
$a_1 = 0, 2;$ $a_2 = 0, 6;$ $a_3 = 0, 2.$	$X_*(2, 40; 0, 90)$ $f_1(X_*) = 23, 0299;$ $f_2(X_*) = 15, 4799;$ $f_3(X_*) = 7, 6301.$	$X_L(2, 40; 0, 90)$ $f_1(X_L) = 23, 0296;$ $f_2(X_L) = 15, 4794;$ $f_3(X_L) = 7, 6300.$	$X_M(2, 40; 0, 90)$ $f_1(X_M) = 23, 0298;$ $f_2(X_M) = 15, 4797;$ $f_3(X_M) = 7, 6303.$
$a_1 = 0, 6;$ $a_2 = 0, 3;$ $a_3 = 0, 1.$	$X_*(1, 70; 0, 95)$ $f_1(X_*) = 24, 5075;$ $f_2(X_*) = 14, 1075;$ $f_3(X_*) = 7, 8075.$	$X_L(1, 70; 0, 95)$ $f_1(X_L) = 24, 5075;$ $f_2(X_L) = 14, 1075;$ $f_3(X_L) = 7, 8075.$	$X_M(1, 70; 0, 95)$ $f_1(X_M) = 24, 5075;$ $f_2(X_M) = 14, 1075;$ $f_3(X_M) = 7, 8075.$
$a_1 = 0, 33;$ $a_2 = 0, 33;$ $a_3 = 0, 33.$	$X_*(2, 00; 1, 67)$ $f_1(X_*) = 23, 9722;$ $f_2(X_*) = 14, 5556;$ $f_3(X_*) = 8, 3056.$	$X_L(2, 00; 1, 67)$ $f_1(X_L) = 23, 9721;$ $f_2(X_L) = 14, 5551;$ $f_3(X_L) = 8, 3061.$	$X_M(2, 00; 1, 67)$ $f_1(X_M) = 23, 9721;$ $f_2(X_M) = 14, 5551;$ $f_3(X_M) = 8, 3061.$
$a_1 = 0, 5;$ $a_2 = 0, 3;$ $a_3 = 0, 2.$	$X_*(1, 80; 1, 05)$ $f_1(X_*) = 24, 3575;$ $f_2(X_*) = 14, 2575;$ $f_3(X_*) = 8, 0575.$	$X_L(1, 80; 1, 05)$ $f_1(X_L) = 24, 3577;$ $f_2(X_L) = 14, 2575;$ $f_3(X_L) = 8, 0574.$	$X_M(1, 80; 1, 05)$ $f_1(X_M) = 24, 3571;$ $f_2(X_M) = 14, 2578;$ $f_3(X_M) = 8, 0573.$

З таблиць 1,2 бачимо, що всі три варіанти методу згортки дають однаковий або досить близький результат, що говорить про їхню однакову ефективність в розглянутому прикладі.

Аналізуючи результати проведених розрахунків для наведеного прикладу, можна відмітити таке:

1. Розроблений програмний продукт дає можливість не лише використовувати незалежно один від одного приведені вище три варіанти методу згортки, а й дозволяє ОПР надавати пріоритети критеріям, що оптимізуються, та обирати координати компромісної точки на власний розсуд.

2. При однакових пріоритетах всі три варіанти методу згортки дають достатньо правильні та близькі один до одного результати.

3. В методі згортки точок максимуму критеріїв (на відміну від методів лінійної та мультиплікативної згортки критеріїв) для знаходження координат компромісної точки не потрібно розв'язувати однокритеріальну задачу для

узагальненої цільової функції. В цьому його перевага над іншими двома варіантами методу згортки.

4. Похибку результатів можна оцінювати апостеріорним методом.

5. Якщо ОПР обере компромісну точку в області D навмисно за межами трикутника, то результати будуть гіршими, ніж у випадку, коли компромісна точка розташована в області трикутника. Таким чином, теоретично доведено твердження, що область трикутника є Парето-оптимальною множиною для задачі (3), (4), підтверджувалося результатами роботи програмного продукту.

Висновок. Розроблений програмний продукт можна адаптувати до реальної задачі з відповідною доробкою, яка залежить безпосередньо від змісту реальної задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Бойко, Л.Т.** Розробка математичної моделі задачі оптимізації складу шихти доменної плавки та метод її розв'язування / Л.Т. Бойко, Д.М. Тогобицька, А.І. Белькова, К.А. Колісник [Текст] // XIV міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS-2016). Тези доповідей. 16-18 листопада 2016 р. Дніпро, Україна, с. 22-23.
2. **Згуровський, М.З.** Основи системного аналізу [Текст] / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.

Надійшла до редколегії 15. 05. 2017