УДК 519.63: 519.71 doi: 10.15421/321703

В.Л. Волошко
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

ОПТИМАЛЬНЕ ГРАНИЧНЕ КЕРУВАННЯ ПАРАМЕТРАМИ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ. ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянуто задачу знаходження оптимальної функції граничних умов неоднорідного бігармонічного рівняння. Досліджений функціонал якості в просторі Соболєва та знайдена його похідна Фреше для застосування одного з варіантів градієнтних методів.

Рассмотрена задача нахождения оптимальной функции граничных условий неоднородного бигармонического уравнения. Исследован функционал качества в пространстве Соболева и найдена его производная Фреше для применения одного из вариантов градиентных методов.

Problem of boundary conditions optimal function finding for inhomogeneous biharmonic equation has been considered. Cost functional in Sobolev space has been investigated and its Frechet derivative has been found. It was accomplished for gradient descent method applying.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, узагальнена функція, градієнтний метод, оптимальне керування

Вступ. Точність розв'язку лінійної крайової задачі є високою [4]. Отже, використавши його як базовий, можна отримати достатньо ефективний розв'язок відповідної нелінійної задачі. Саме такого роду проблема розглядається далі, а саме, задача відновлення оптимальних крайових умов бігармонічного неоднорідного рівняння [1]. Функціонал якості досліджується на опуклість [2]. В основі способу розв'язування лежить один із варіантів градієнтного методу [2], для його застосування знаходиться функціональна похідна [7]. Викладено алгоритм розв'язку поставленої задачі.

Постановка оптимізаційної задачі.

$$\Delta\Delta w(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega \tag{1}$$

$$w(x,y)=\varphi(x,y), \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial n}=\psi(x,y), \qquad (x,y)\in\Gamma, \tag{2}$$

де крива Γ задана параметрично $\begin{cases}\xi=\xi(s)\\ \eta=\eta(s)\end{cases}$, $0\le s\le S$ – природний параметр (довжина кривої), r – відстань між точками: $r(x,y;\xi,\eta)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$,

$\nu = \nu(s) = \nu(\xi,\eta)$ − внутрішня нормаль, що проведена до кривої Γ, $\Omega \in R^2$ – область, обмежена ліпшицевим контуром Γ, $w = w(x,y) \in H^2(\Omega)$ – невідома функція, $f(x,y) \in H^{-2}(\Omega)$ – функція правої частини рівняння (1) задана в області Ω, $\varphi(x,y) \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\psi(x,y) \in H^{1/2}(\Gamma)$ – функції крайових умов (2) задані на контурі Γ, n – внутрішня нормаль в точці $(x,y) \in \Gamma$ [5].

Як відомо [6], фундаментальний розв'язок рівняння (1) є

$$K^1 = K^1(x,y;\xi,\eta) = r^2(x,y;\xi,\eta)\ln r(x,y;\xi,\eta).$$

Позначимо $K^2 = K^2(x,y;\xi,\eta) = \dfrac{\partial}{\partial \nu} K^1(x,y;\xi,\eta)$, де точки $(\xi,\eta) \in \Gamma$, $(x,y) \in \Omega$.

Частинним розв'язком рівняння (1) є $w_1(x,y) = \dfrac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y})$.

Тоді можна отримати . [6] розв'язок задачі (1) – (2):

$$w(x,y) = w_1(x,y) + \int\limits_{\Gamma}\Big(\big(K^1(x,y;\xi,\eta),\, K^2(x,y;\xi,\eta)\big)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Gamma}\tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})\cdot\begin{pmatrix}\phi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\\ \psi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - \dfrac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\end{pmatrix}d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)\Bigg)d\Gamma(\xi,\eta), \quad (x,y)\in\Omega,$$

який залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. Припустивши, що функції $f(x,y) \in H^{-2}(\Omega)$ і $\varphi(x,y) \in H^{3/2}(\Gamma)$ задані, поставимо задачу знаходження $\psi(x,y) \in H^{1/2}(\Gamma)$ і $w(x,y) \in H^2(\Omega)$, які надають мінімум функціоналу

$$I(w(\cdot,\cdot),\psi(\cdot,\cdot)) = \iint\limits_{\Omega}(w(x,y) - w_{fixed}(x,y))^2 dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega}\Bigg[\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} r^2\ln r\cdot f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) + \int\limits_{\Gamma}\Big(\big(K^1(x,y;\xi,\eta),\, K^2(x,y;\xi,\eta)\big)\times \qquad (3)$$

$$\times\left(\int\limits_{\Gamma}\tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})\cdot\begin{pmatrix}\varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\\ \psi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - \dfrac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\end{pmatrix}d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)\Bigg)d\Gamma(\xi,\eta) - w_{fixed}\Bigg]^2 dxdy,$$

де $w_{fixed}(x,y) \in H^2(\Omega)$ – деяка задана функція. Коротко задача мінімізації записується так

$$I(w(\cdot,\cdot),\psi(\cdot,\cdot)) \to \min_{(w,\psi)\in P}, \qquad (4)$$

де P – множина допустимих розв'язків.

Похідна Фреше від функціоналу якості. Обґрунтування методу розв'язання задачі**.** Зважаючи на складність аналітичного вигляду функціоналу якості (3), для подальшого дослідження доцільно представити його як суперпозицію трьох функцій. Це спрощує знаходження функціональної похідної та встановлення опуклості функціоналу (3). Отже, нехай

$$I(w(\cdot,\cdot),\psi(\cdot,\cdot)) = I_1(w(\cdot,\cdot), I_2(I_3(\psi(\cdot,\cdot)))).$$

Тоді визначимо

$$I_1(w) = \iint_{\Omega} \left(w(x,y) - w_{fixed}(x,y)\right)^2 dxdy, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} I_2(\mu) = w(x,y) = \frac{1}{8\pi}\iint_{\Omega} K^1(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) + \\ + \int_{\Gamma}\left(K^1(x,y;\xi,\eta),\, K^2(x,y;\xi,\eta)\right)\cdot\begin{pmatrix}\mu_1(\xi,\eta)\\ \mu_2(\xi,\eta)\end{pmatrix} d\Gamma(\xi,\eta), \end{gathered} \tag{6}$$

$$I_3(\psi) = \mu(\xi,\eta) = \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})\cdot\begin{pmatrix}\varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\\ \psi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - \dfrac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta}). \tag{7}$$

Далі під нормою вектор-функції $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))$ будемо розуміти $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le k} \| x_i(t) \|$. Далі розглянемо похідну Фреше та опуклість функціоналу (5).

Знайдемо $\dfrac{\partial I_1(w)}{\partial w}$, де $I_1(w): H^2(\Omega)\to R.$ Нехай $h(x,y)\in H^2(\Omega)$ – довільна функція.

Тоді $I_1(w(x,y)+h(x,y)) - I_1(w(x,y)) = \iint_{\Omega}\left(w(x,y)+h(x,y)-w_{fixed}(x,y)\right)^2 dxdy -$

$$-\iint_{\Omega}\left(w(x,y)-w_{fixed}(x,y)\right)^2 dxdy = \iint_{\Omega} w^2(x,y)dxdy + \iint_{\Omega} h^2(x,y)dxdy +$$

$$+\iint_{\Omega} w_{fixed}^2(x,y)dxdy + +2\iint_{\Omega} w(x,y)\cdot h(x,y)dxdy -$$

$$-2\iint_{\Omega} w_{fixed}(x,y)\cdot h(x,y)dxdy - 2\iint_{\Omega} w_{fixed}(x,y)\cdot w(x,y)dxdy -$$

$$-\iint_{\Omega} w^2(x,y)dxdy + 2\iint_{\Omega} w_{fixed}(x,y)\cdot w(x,y)dxdy - \iint_{\Omega} w_{fixed}^2(x,y)dxdy =$$

$$= 2\iint_{\Omega} w(x,y)\cdot h(x,y)dxdy - 2\iint_{\Omega} w_{fixed}(x,y)\cdot h(x,y)dxdy + \iint_{\Omega} h^2(x,y)dxdy =$$

$$= 2\iint_{\Omega}\left(w(x,y) - w_{fixed}(x,y)\right)\cdot h(x,y)dxdy + \iint_{\Omega} h^2(x,y)dxdy.$$

Головна частина приросту лінійна по h; покажемо її обмеженість

$$\left\| 2\iint_{\Omega}\Big(w(x,y) - w_{fixed}(x,y)\Big)\cdot h(x,y)dxdy \right\|_R =$$

$$= \left| 2\iint_{\Omega}\Big(w(x,y) - w_{fixed}(x,y)\Big)\cdot h(x,y)dxdy \right| \le$$

$$\le 2\iint_{\Omega}\left| w(x,y)\right|\cdot\left| h(x,y)\right| dxdy + 2\iint_{\Omega}\left| w_{fixed}(x,y)\right|\cdot\left| h(x,y)\right| dxdy \le$$

$$\le 2\left(\iint_{\Omega}\left| w(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2}\cdot\left(\iint_{\Omega}\left| h(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2} +$$

$$+2\left(\iint_{\Omega}\left| w_{fixed}(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2}\cdot\left(\iint_{\Omega}\left| h(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\left\| w\right\|_{H^2(\Omega)}\cdot\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)} + 2\left\| w_{fixed}\right\|_{H^2(\Omega)}\cdot\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)} =$$

$$2\cdot\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}\cdot\left(\left\| w\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| w_{fixed}\right\|_{H^2(\Omega)}\right) = const.$$

Доданок $\iint_{\Omega} h^2(x,y)dxdy \to 0,$ при $\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)} \to 0$. Дійсно,

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\left\|\iint_{\Omega} h^2(x,y)dxdy\right\|_R}{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}} \le \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\iint_{\Omega}\left| h^2(x,y)\right| dxdy}{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}} \le \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\iint_{\Omega}\left| h(x,y)\cdot h(x,y)\right| dxdy}{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}} \le$$

$$\le \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\left(\iint_{\Omega}\left| h(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2}\cdot\left(\iint_{\Omega}\left| h(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2}}{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}} = \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}\cdot\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}}{\left\| h\right\|_{H^2(\Omega)}} =$$

$$= \lim_{\|h\|\to 0}\left\| h_{H^2(\Omega)}\right\| = 0.$$

Диференційованість за Фреше доведено. Похідна Фреше (сильна похідна) має вигляд

$$\frac{\partial I_1(w)}{\partial w} = 2\iint_{\Omega}\Big(w(x,y) - w_{fixed}(x,y)\Big) dxdy. \qquad (8)$$

Покажемо, що функціонал (4) опуклий. Позначимо в ньому $\overline{w}(x,y) = (w(x,y) - w_{fixed}(x,y))$. Згідно класичного визначення опуклості [2],

$$I_1\Big((1-\alpha)\overline{w}_1 + \alpha\overline{w}_2\Big) \le (1-\alpha)I_1(\overline{w}_1) + \alpha I_1(\overline{w}_2), \quad \overline{w}_1(x,y), \overline{w}_2(x,y) \in H^2(\Omega).$$

В нашому випадку

$$I_1\left((1-\alpha)\overline{w}_1+\alpha\overline{w}_2\right)=\iint\limits_{\Omega}\left((1-\alpha)\overline{w}_1+\alpha\overline{w}_2\right)^2 d\Omega=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}(1-\alpha)^2\,\overline{w}_1^2 d\Omega+\iint\limits_{\Omega}2\alpha(1-\alpha)\overline{w}_1\overline{w}_2 d\Omega+\iint\limits_{\Omega}\alpha^2\overline{w}_2^2 d\Omega=$$

$$=(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega-(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega-\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega+$$

$$+(1-\alpha)^2\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+2\alpha(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\overline{w}_2 d\Omega+\alpha^2\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega=$$

$$=(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega+(1-\alpha)(1-\alpha-1)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+$$

$$+2\alpha(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\overline{w}_2 d\Omega+\alpha(\alpha-1)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega=$$

$$=(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega-\alpha(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+$$

$$+2\alpha(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\overline{w}_2 d\Omega-\alpha(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega=$$

$$=(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega-\alpha(1-\alpha)\left(\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega-2\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\overline{w}_2 d\Omega+\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega\right)=$$

$$=(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega-\alpha(1-\alpha)\left(\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\, d\Omega-\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2\, d\Omega\right)^2.$$

Очевидно, що $\alpha(1-\alpha)\left(\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1\, d\Omega-\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2\, d\Omega\right)^2\geq 0$, отже

$$\iint\limits_{\Omega}\left((1-\alpha)\overline{w}_1+\alpha\overline{w}_2\right)^2 d\Omega\leq(1-\alpha)\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_1^2 d\Omega+\alpha\iint\limits_{\Omega}\overline{w}_2^2 d\Omega.$$

Нерівність доведено, отже, функціонал (4) опуклий.

Аналогічноно отримуємо похідні Фреше та опуклість функціоналів (5)–(6), а їх похідні Фреше мають вигляд

$$\frac{\partial I_2(\mu)}{\partial\mu}=\int\limits_{\Gamma}\left(K^1(x,y;\xi,\eta),\,K^2(x,y;\xi,\eta)\right)d\Gamma(\xi,\eta);\tag{9}$$

$$\frac{\partial I_3(\psi)}{\partial\psi}=\int\limits_{\Gamma}\widetilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}d\Gamma(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}).\tag{10}$$

Розгляд властивостей складових функціоналу (3) завершено. Тепер можемо записати функціональну похідну Фреше і зробити висновок щодо розв’язку задачі (1) – (2), (4).

В [7] наведено техніку знаходження похідної Фреше у випадку суперпозиції функцій з використанням теореми Лагранжа. Слідуючи їй та використовуючи вирази (8), (9), (10), остаточно отримаємо функціонал

$$\frac{\partial I(w(\cdot,\cdot),\psi(\cdot,\cdot))}{\partial\psi}=2\iint_{\Omega}\Big[(w(x,y)-w_{fixed}(x,y))\times$$
$$\times\int_{\Gamma}\Big(K^{1}(x,y;\xi,\eta),\,K^{2}(x,y;\xi,\eta)\Big)\int_{\Gamma}\tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta})d\Gamma(\xi,\eta)\Big]dxdy, \tag{11}$$

який відповідає умовам теореми про опуклість суперпозиції функцій [2]. Очевидно, що цей функціонал напівнеперервний знизу. Отже, згідно теорем, наведених в [2], маємо наступний результат. Якщо в функціоналі (3) $w(x,y)\in H^{2}(\Omega),\ f(x,y)\in H^{-2}(\Omega),\ \varphi(x,y)\in H^{3/2}(\Gamma),\ \psi(x,y)\in H^{1/2}(\Gamma)$, то він є опуклим, для нього існує похідна Фреше. На множині P визначення функціоналу існує єдиний мінімум, який досягається при $(w^*(x,y),\psi^*(x,y))\in P,$ тобто $I(w^*,\psi^*)=\min\limits_{(w,\psi)\in P}I(w,\psi),$ де $w^*(x,y)$ розв'язок задачі (1) – (2) при функції $\psi^*(x,y)$ другої крайової умови.

Для знаходження розв'язку задачі (1) – (2), (4) було обрано один з варіантів градієнтного методу. Як відомо [2], якщо $I'_{\psi}(w,\psi)\neq 0$, то напрямок найшвидшого спадання співпадає з напрямком антиградієнта $\left(-I'_{\psi}(w,\psi)\right)$. Саме ця властивість лежить в основі градієнтних методів, які мають такі переваги: достатньо прості в реалізації; вимоги до цільової функції не є дуже жорсткими – достатньо існування похідної функціоналу; їхнє застосування доцільне у випадку, коли початкове наближення знаходиться далеко від точки мінімуму функціоналу; кроки вздовж антиградієнта дозволяють значно зменшити значення функціоналу [3].

Суть градієнтних методів полягає в наступному: нехай $\psi^{0}(x,y)$ – обране початкове наближення. Тоді градієнтний метод полягає в побудові послідовності $\left\{\psi^{k}(x,y)\right\}$ за правилом

$$\psi^{k+1}(x,y)=\psi^{k}(x,y)-\alpha_{k}\frac{\partial I(\psi(x,y))}{\partial\psi(x,y)},\ \ (x,y)\in\Gamma,\ \alpha_{k}>0,\ \ k=1,2,\dots . \tag{12}$$

Разом з (12) природнім чином виникає послідовність $\left\{w^{k}(x,y)\right\}$, члени якої є розв'язками відповідних лінійних крайових задач (1) – (2) на кожному кроці ітераційного процесу.

Висновок. Сформульована математична постановка задачі оптимального граничного керування для неоднорідного бігармонічного рівняння. Знайдено похідну Фреше від функціоналу якості. Доведено, що розв'язок поставленої задачі існує, єдиний і досягається на множині його визначення.

Бібліографічні посилання

1. **Боборикін, В.Г.** Про один ефективний чисельний розв’язок неоднорідного бігармонічного рівняння та постановки оптимізаційних задач [Текст] / В.Г. Боборикін, В.Л. Волошко, Л В. Волошко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наукових праць. Д.: ДНУ. – 2014. – С. 22 – 29.
2. **Васильев, Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 550с.
3. **Кісельова, О.М.** Чисельні методи оптимізації [Текст] / О. М. Кісельова, А. Є. Шевельова. – Д.: Видавництво ДНУ, 2008. – 212с.
4. **Кісельова, О.М.** Щодо розв’язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми [Текст] / О.М. Кісельова, В. Д. Ламзюк, Л.В. Волошко // «Вісник ДНУ», серія «Моделювання». – 2011. – Вип. 3. – №8. – С. 20 – 28.
5. **Когут, О.П.** Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах: монографія [Текст] / О. П. Когут, П. І. Когут, О. А. Рядно.–Дніпропетр. держ. фін. акад.−Д., 2010.−236 с.
6. **Лебедев, Н. Н.** Сборник задач по математической физике [Текст] / Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд. – М.: Гос. изд-тво тех.-теор. лит., 1955. – 421с.
7. **Люстерник, Л.А.** Элементы функціонального анализа [Текст] / Л. А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

Надійшла до редколегії 04. 04. 2017