УДК 519.6 doi: 10.15421/321704

Л.Л. Гарт
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ, ПОДІБНІ ДО МЕТОДУ НЬЮТОНА, ТА ЇХ МОДИФІКАЦІЇ

Досліджено ітераційні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь (в тому числі, параметричних) у банаховому просторі, основані на методі Ньютона та подібних до нього процесах. Доведено теореми про збіжність, отримано оцінки похибки.

Исследованы итерационные методы решения нелинейных операторных уравнений (в том числе, параметрических) в банаховом пространстве, основанные на методе Ньютона и подобных ему процессах. Доказаны теоремы о сходимости, получены оценки погрешности.

We study iterative methods for solving nonlinear operator equations (including parametric ones) in a Banach space based on the Newton method and similar processes. Theorems on convergence are proved, estimates of the error are obtained.

Ключові слова: нелінійне операторне рівняння, похідна Фреше, метод Ньютона, ітераційний процес, збіжність, наближений розв'язок, похибка.

Вступ. Одним з основних ітераційних методів розв'язання нелінійного рівняння виду

$$A\,u = f\,, \tag{1}$$

з диференційованим за Фреше оператором A, що діє з банахова простору X в банаховий простір Y ($f \in Y$ – відомий елемент), є метод Ньютона-Канторовича, який полягає в тому, що для знаходження наступного наближення $u^{(k+1)}$ до точного розв'язку $u^* \in X$ рівняння (1) лінеаризується в точці $u^{(k)}$ ($k = 0, 1, \ldots,\ u^{(0)} \in X$), і одержане лінійне рівняння розв'язується точно. Метод Ньютона-Канторовича (метод Ньютона або дотичних – у випадку дійсних рівнянь), а також деякі його модифікації є на сьогодні одними з небагатьох вживаних на практиці для фактичного знаходження розв'язку нелінійного функціонального рівняння. Важливо відзначити і теоретичне значення методу, оскільки з його допомогою можна робити висновок про існування, єдиність і область розташування розв'язку рівняння, не знаходячи самого розв'язку, що часом не менш важливо, ніж фактичне знання розв'язку. Дослідженню методу Ньютона-Канторовіча та його модифікацій присвячені роботи Л. В. Канторовича [5-8], І. П. Мисовських [10], Б. А. Вертгейма [3], С. Фенга [17], П. Дёфлхарда [16], Б. Т. Поляка [11] та інших авторів. Важливе практичне значення для розв'язання нелінійних рівнянь мають також методи, основані на наближеному розв'язанні лінеаризованих рівнянь, запропоновані і досліджені при різних припущеннях М. О. Красносельським, Я. Б. Рутицьким [12] і Б. П. Пугачовим [18]. Зокрема, градієнтні методи розв'язання нелінійних рівнянь вивчались Л. Ківістиком [9], В. М. Фридманом [14], М. Альтманом [15] та іншими ученими. Широко застосовуються також метод простої ітерації з різними способами вибору кроку та метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора, запропонований О. М. Ваарманном [1] і розвинутий В. М. Вержбицким [2].

Найбільш детально метод Ньютона вивчався при так званих умовах Канторовича (або інакше, в припущенні, що похідна оператора рівняння оборотна в початковій точці $u^{(0)} \in X$ і задовольняє в розглядуваній області умові Ліпшиця), в умовах Вертгейма (похідна оператора оборотна в початковій точці, але задовольняє лише умові Гельдера) і в умовах Мисовських (похідна оборотна в усіх точках розглядуваної області та зворотний до неї оператор є обмеженим). Для всіх цих випадків отримані умови збіжності, які є по суті достатніми, і знайдені відповідні оцінки швидкості збіжності.

В даній роботі метод Ньютона досліджується стосовно нелінійних операторних рівнянь (в тому числі, параметричних) при узагальнених умовах типу Коші, коли замість оборотного оператора до похідної в розглядуваній області припускається існування деякого лінійного оператора, близького до нього. Розглядаються питання обґрунтування як основного методу Ньютона за таких умов, так і деяких його модифікацій.

Постановка задачі. Нехай задане рівняння (1)

$$A\,u = f\,,$$

де A – диференційований за Фреше нелінійний оператор, який переводить деяку множину Ω банахова простору X в банаховий простір Y. Припустимо, що в Ω існує розв'язок u^* рівняння (1).

Візьмемо довільний елемент $u^{(0)} \in \Omega$. Припускаючи, що похідна Фреше $A'(u)$ неперервна по u в замкненій кулі

$$S(u^{(0)}, R) = \{\, u \in X : \| u - u^{(0)} \|_X \le R \,\} \subset \Omega,$$

з формули скінченних прирощень отримаємо [8], що в достатньо малому околі точки $u^{(0)}$ елемент Au достатньо близький до $Au^{(0)} + A'(u^{(0)})(u - u^{(0)})$ і, отже, розв'язок рівняння $Au^{(0)} + A'(u^{(0)})(u - u^{(0)}) = f$ достатньо близький до u^*. Це рівняння вже лінійне, і якщо існує $[A'(u^{(0)})]^{-1}$, то його розв'язок $u^{(1)}$ знаходиться за формулою $u^{(1)} = u^{(0)} - [A'(u^{(0)})]^{-1}(Au^{(0)} - f)$. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність наближень

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - [A'(u^{(k)})]^{-1}(Au^{(k)} - f), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

до розв'язку u^* рівняння (1), яка визначає ітераційний метод Ньютона.

Теоретичне обґрунтування методу (2) за умов типу Канторовича, коли в початковій точці $u^{(0)}$ припускається існування обмеженого оборотного оператора $[A'(u^{(0)})]^{-1}$, міститься в [8]. У ряді випадків виявляється доцільним замінити цю умову умовою типу Коші, згідно з якою оцінка норми оператора $\Gamma(u)=[A'(u)]^{-1}$ відома не тільки в точці $u^{(0)}$, а й у всій кулі $S(u^{(0)},R)$ (що дозволяє послабити обмеження на вибір $u^{(0)}$). Умови існування і область розташування розв'язку u^* рівняння (1), а також збіжність до нього ітераційної послідовності методу Ньютона (2) за умов типу Коші встановлені в роботі [10]. Узагальненням результату [10], коли замість оператора $\Gamma(u)=\left[A'(u)\right]^{-1}$ вимагається лише існування в $S(u^{(0)},R)$ оператора $D(u)$, близького до $\Gamma(u)$, є наступна теорема.

Теорема 1 [13]. Нехай оператор A диференційований за Фреше в деякій кулі $S(u^{(0)},R)\subset X$ і його похідна на цій кулі задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\|A'(u)-A'(v)\right\|_{X\to Y}\le L\left\|u-v\right\|_X,\quad \forall\, u,v\in S(u^{(0)},R),\ \ L>0. \tag{3}$$

Нехай в $S(u^{(0)},R)$ існує лінійний оператор $D(u)$, який переводить Y в X і має неперервний оборотний, причому для всіх $u\in S(u^{(0)},R)$

$$\left\|D(u)\right\|_{Y\to X}\le b,\quad \left\|E-D(u)A'(u)\right\|_{X\to X}\le \delta<1, \tag{4}$$

де $b>0$, $\delta>0$, E – тотожний оператор в X. Якщо початкове наближення $u^{(0)}$ задовольняє умови

$$\left\|A\,u^{(0)}-f\right\|_Y\le \eta^{(0)}, \tag{5}$$

$$h^{(0)}=\frac{b^2\eta^{(0)}L}{(1-\delta)^2}<2,\quad r=\frac{b\eta^{(0)}G}{1-\delta}\le R,\quad G=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^{2^i-1}, \tag{6}$$

то рівняння (1) має в кулі $S(u^{(0)},r)$ розв'язок u^*, до якого збігається метод Ньютона (2) з квадратичною швидкістю:

$$\left\|u^{(k)}-u^*\right\|_X\le\frac{b\eta^{(0)}}{1-\delta}G\left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^{2^k-1}.$$

Доведення теореми 1 можна знайти в роботі [13].

Метод розв'язання. Збіжність ітераційного процесу, подібного до методу Ньютона, за умов типу Коші. Розглянемо для рівняння (1) процес послідовних наближень, подібний (2), із заміною в останньому оператора $\Gamma(u^{(k)})=[A'(u^{(k)})]^{-1}$ на близький до нього оператор $D(u^{(k)})$:

$$u^{(k+1)}=u^{(k)}-D(u^{(k)})(Au^{(k)}-f),\quad k=0,1,\ldots. \tag{7}$$

Здійсненність та збіжність до u^* в $S(u^{(0)},R)$ послідовності наближень $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, що визначається за формулами (7), встановлює наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконані всі умови теореми 1. Якщо початкове наближення $u^{(0)}$ задовольняє умови (5),

$$h^{(0)} = b^2 L \eta^{(0)} + \frac{2bL\delta}{1-\delta} < 2, \quad r^{(0)} = \frac{b\eta^{(0)}}{1 - h^{(0)}/2} \le R, \tag{8}$$

то рівняння (1) має в кулі $S(u^{(0)}, r^{(0)}) \subset X$ розв'язок u^*, до якого збігається процес наближень (7) з оцінкою похибки

$$\left\| u^{(k)} - u^* \right\|_X \le \frac{b\eta^{(0)}}{1 - h^{(0)}/2} (h^{(0)}/2)^k. \tag{9}$$

Доведення. Встановимо перш за все здійсненність процесу (7). Зазначимо, що, за теоремою Банаха про оборотний оператор [8], з другої умови (4) випливає існування для всіх $u \in S(u^{(0)}, R)$ лінійного обмеженого оператора $V(u) = [D(u)A'(u)]^{-1}$ з нормою $\|V(u)\|_{X \to X} \le 1/(1-\delta)$, звідки в свою чергу випливає існування неперервного оборотного оператора $[D(u)]^{-1} = A'(u)V(u)$, $u \in S(u^{(0)}, R)$; при цьому з урахуванням (3) $\left\| [D(u)]^{-1} \right\|_{X \to Y} \le L/(1-\delta)$ для всіх $u \in S(u^{(0)}, R)$. Зазначені властивості оператора $D(u)$ обґрунтовують можливість заміни вихідного рівняння (2) лінеаризованим по відношенню до нього рівнянням виду

$$Au^{(k)} + [D(u^{(k)})]^{-1}(u - u^{(k)}) = f.$$

Покажемо, що кожне наближення $u^{(k)}$ має властивості, аналогічні властивостям $u^{(0)}$. В цьому напрямку потрібно довести, що для будь-якого $k = 1, 2, \ldots$ виконуються умови

$$\left\| A u^{(k)} - f \right\|_Y \le \eta^{(k)}, \quad h^{(k)} = \frac{b^2 L \eta^{(k)}}{2} + \frac{bL\delta}{1-\delta} < 1, \quad r^{(k)} = \frac{b\eta^{(k)}}{1 - h^{(k)}/2} \le R, \tag{10}$$

$$S(u^{(k)}, r^{(k)}) \subset S(u^{(k-1)}, r^{(k-1)}). \tag{11}$$

Виконуваність (11) означатиме належність всіх наближень $u^{(k)}$ до $S(u^{(0)}, r^{(0)})$. Виходячи з умов теореми, можна доказати, що умови (10), (11) виконуються для $k = 0, 1, \ldots, i$. Покажемо їх виконуваність для $k = i+1$.

З формули (7), користуючись (4), (10), матимемо:

$$\left\| u^{(i+1)} - u^{(i)} \right\|_X \le \left\| D(u^{(i)}) \right\|_{Y \to X} \left\| Au^{(i)} - f \right\|_Y \le b\eta^{(i)}. \tag{12}$$

Встановимо виконуваність при $k = i+1$ першої з умов (10). На підставі аналога формули Ньютона-Лейбница [8]

$$Au - Av = \int_u^v A'(z)\, dz = \int_0^1 A'(v + t(u-v))(u-v)\, dt$$

і умов (3), (4) отримаємо для будь-яких $u, v \in S(u^{(0)}, R)$:

$$\left\| Au - Av - [D(v)]^{-1}(u-v) \right\|_Y = \left\| \int_0^1 \left[A'(v + t(u-v)) - [D(v)]^{-1} \right] (u-v) dt \right\|_Y \le$$

$$\le \int_0^1 \Big[\left\| A'(v+t(u-v)) - A'(v) \right\|_{X\to Y} + \left\| A'(v) - [D(v)]^{-1} \right\|_{X\to Y} \Big] \left\| u-v \right\|_X dt \le$$

$$\le \int_0^1 \Big[Lt\left\| u-v \right\|_X + L\delta/(1-\delta) \Big] \left\| u-v \right\|_X dt = \frac{L}{2}\left\| u-v \right\|_X^2 + \frac{L\delta}{1-\delta}\left\| u-v \right\|_X . \qquad (13)$$

Тому з урахуванням (7) і (12) матимемо:

$$\left\| A\,u^{(i+1)} - f \right\|_Y = \left\| A\,u^{(i+1)} - Au^{(i)} - [D(u^{(i)})]^{-1}(u^{(i+1)} - u^{(i)}) \right\|_Y \le \frac{L}{2}\left\| u^{(i+1)} - u^{(i)} \right\|_X^2 +$$

$$+ \frac{L\delta}{1-\delta}\left\| u^{(i+1)} - u^{(i)} \right\|_X \le \frac{L}{2} b^2 \eta^{(i)2} + \frac{L\delta}{1-\delta} b\eta^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{2}\eta^{(i)} = \eta^{(i+1)}, \qquad (14)$$

тобто перша з умов (10) при $k = i+1$ виконується. Друга умова також виконується, так як

$$h^{(i+1)} = b^2 L\eta^{(i+1)} + \frac{2bL\delta}{1-\delta} = b^2 L\frac{h^{(i)}}{2}\eta^{(i)} + \frac{2bL\delta}{1-\delta} < b^2 L\eta^{(i)} + \frac{2bL\delta}{1-\delta} = h^{(i)} < 2 . \qquad (15)$$

Покажемо тепер включення (11) при $k = i+1$. Нехай $u \in S(u^{(i+1)}, r^{(i+1)})$. Тоді, використовуючи (12), легко отримати співвідношення

$$\left\| u - u^{(i)} \right\|_X \le \left\| u - u^{(i+1)} \right\|_X + \left\| u^{(i+1)} - u^{(i)} \right\|_X \le r^{(i+1)} + b\eta^{(i)} .$$

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що $r^{(i+1)} + b\eta^{(i)} < r^{(i)}$. Дійсно, з урахуванням останнього виразу в (10) і умов (14), (15) маємо:

$$r^{(i+1)} + b\eta^{(i)} = \frac{b\eta^{(i+1)}}{1 - h^{(i+1)}/2} + b\eta^{(i)} < \frac{b\,h^{(i)}/2\,\eta^{(i)}}{1 - h^{(i)}/2} + b\eta^{(i)} = \frac{b\eta^{(i)}}{1 - h^{(i)}/2} = r^{(i)} \le R ,$$

тобто $u \in S(u^{(i)}, r^{(i)})$, i.e. $S(u^{(i+1)}, r^{(i+1)}) \subset S(u^{(i)}, r^{(i})$.

Таким чином, здійсненність ітераційного процесу (7) встановлено.

Доведемо тепер збіжність цього процесу. Оскільки для кожного $k = 1, 2, \ldots$ на підставі (14), (15) справедливе співвідношення

$$\eta^{(k)} = \frac{h^{(k-1)}}{2}\eta^{(k-1)} = \frac{h^{(k-1)}}{2}\frac{h^{(k-2)}}{2}\eta^{(k-2)} = \ldots = \frac{h^{(k-1)}}{2}\frac{h^{(k-2)}}{2}\ldots\frac{h^{(0)}}{2}\eta^{(0)} < \left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^k \eta^{(0)},$$

то, користуючись ним і формулами (12), (10), (15), для будь-яких номерів $p \in \mathbb{N}$ і $k = 0, 1, \ldots$ отримаємо:

$$\left\| u^{(k+p)} - u^{(k)} \right\|_X \le \sum_{i=k}^{k+p-1} \left\| u^{(i+1)} - u^{(i)} \right\|_X \le \sum_{i=k}^{k+p-1} b\eta^{(i)} < \sum_{i=k}^{k+p-1} (r^{(i)} - r^{(i+1)}) =$$

$$r^{(k)} - r^{(k+p)} \le r^{(k)} = \frac{b\eta^{(k)}}{1 - h^{(k)}/2} \le \frac{b\eta^{(0)}}{1 - h^{(0)}/2}(h^{(0)}/2)^k .$$

Звідси випливає фундаментальність послідовності $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, а в силу повноти X і існування $u^* \in S(u^{(0)}, r^{(0)}) \subset X$ такого, що $u^* = \lim_{k\to\infty} u^{(k)}$. Переходячи в останній нерівності до границі при $p \to \infty$, отримуємо оцінку похибки (9).

Залишилось довести, що границя u^* послідовності $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ є розв'язком рівняння (1). Дійсно, з (7) випливає, що

$$\left\|Au^{(k)} - f\right\|_Y \le \left\|[D(u^{(k)})]^{-1}\right\|_{X\to Y} \left\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\right\|_X \le b\eta^{(k)} L/(1-\delta), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Так як $\eta^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, а оператор A неперервний в силу диференційованості за Фреше, то переходячи в останній нерівності до границі при $k \to \infty$, отримуємо, що $Au^* = f$. Теорема доведена.

Зазначимо, що зі співвідношення (13) при $u = u^*$, $v = u^{(k)}$ випливає, що ітераційний процес (7) в загальному випадку збігається з лінійною швидкістю за винятком ситуації $\delta = 0$, коли він має квадратичну швидкість збіжності, оскільки перетворюється на звичайний метод Ньютона (2):

$$\left\|u^* - u^{(k+1)}\right\|_X \le b\left\|[D(u^{(k)})]^{-1}(u^* - u^{(k+1)})\right\|_Y =$$

$$= b\left\|Au^* - Au^{(k)} - [D(u^{(k)})]^{-1}(u^* - u^{(k)})\right\|_Y \le \frac{bL}{2}\left\|u^* - u^{(k)}\right\|_X^2 + \frac{bL\delta}{1-\delta}\left\|u^* - u^{(k)}\right\|_X.$$

Відмітимо в зв'язку з цим, що у випадку $\delta = 0$ оцінка похибки (9) для методу (7) (або, що те ж саме, (2)) суттєво завищена, більш відповідний результат для цього випадку міститься в теоремі 1.

Застосування методу Ньютона та подібних до нього процесів до розв'язування нелінійного операторного рівняння з параметром. Нерідко виявляється можливим задане рівняння (1) замінити на еквівалентне або близьке до нього, але вже більш просте рівняння, також, взагалі кажучи, нелінійне. Умови типу Канторовича і типу Коші, на підставі яких можна судити про розв'язність рівняння (1) по розв'язності рівняння $Au \equiv Tu + Qu = f$, де T і Q – деякі диференційовані за Фреше оператори, що діють із X в Y, сформульовані відповідно в [8] і [13]. Така ситуація є окремим випадком більш загальної, коли ліва частина рівняння (1) залежить від числового чи іншого параметра, причому при одному значенні параметра розв'язок рівняння відомий і потрібно встановити існування розв'язку для значень параметра, близьких до початкового. Припустимо, що згаданий параметр входить у рівняння лінійно, тобто будемо розглядати операторне рівняння виду

$$Au(\mu) \equiv Tu + \mu Qu = f, \tag{16}$$

де μ означає лінійний оператор в просторі Y, зокрема, μ може бути числовим множником.

Умови існування і область розташування розв'язку $u^* \equiv u^*(\mu)$ рівняння (16), а також умови типу Коші збіжності до нього ітераційної послідовності методу Ньютона (2)

$$u^{(k+1)}(\mu) = u^{(k)}(\mu) - [A'(u^{(k)})]^{-1}(Au^{(k)}(\mu) - f), \quad k = 0, 1, \ldots; \; u^{(0)}(\mu) = u^{(0)},$$

встановлює наступна теорема.

Теорема 3 [4]. Нехай оператори T і Q диференційовані за Фреше в деякій кулі $S(u^{(0)}, R) \subset X$ і їх похідні $T'(u)$ і $Q'(u)$ задовольняють на цій кулі умову

Ліпшиця з константами $K>0$ і $M>0$ відповідно. Нехай $u^{(0)}$ є розв'язком рівняння $T\,u=f$, так що

$$A\,u^{(0)}(0)\equiv T\,u^{(0)}=f\,, \qquad (17)$$

і для кожного $u\in S(u^{(0)},R)$ існує лінійний обмежений оператор $[T'(u)]^{-1}$, причому

$$\left\|[T'(u)]^{-1}\right\|_{Y\to X}\le b\,,\quad \left\|Q'(u)\right\|_{X\to Y}\le \nu \qquad (18)$$

для всіх $u\in S(u^{(0)},R)$. Тоді, якщо початкове наближення $u^{(0)}$ задовольняє умову

$$\left\|Q\,u^{(0)}\right\|_Y\le \zeta^{(0)} \qquad (19)$$

і μ таке, що

$$|\mu|\,b\,\nu<1,\quad h^{(0)}=\frac{b^2|\mu|\,\zeta^{(0)}(K+|\mu|\,M)}{(1-|\mu|\,b\nu)^2}<2\,,\quad r=\frac{b\,|\mu|\,\zeta^{(0)}G}{1-|\mu|\,b\nu}\le R\,, \qquad (20)$$

де G визначено в (6), то рівняння (16) має в кулі $S(u^{(0)},r)$ розв'язок $u^*\equiv u^*(\mu)$, до якого збігається процес Ньютона (2) з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(k)}(\mu)-u^*\right\|_X\le\frac{b\,|\mu|\,\zeta^{(0)}}{1-|\mu|\,b\nu}\,G\left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^{2^k-1}.$$

Доведення. Твердження теореми 3 виходить безпосередньо з теореми 1, якщо покласти в ній $D(u)=[T'(u)]^{-1}$.

Дійсно, за властивостями похідних [8], з диференційованості операторів T і Q в кулі $S(u^{(0)},R)\subset X$ випливає диференційованість оператора $A=T+\mu Q$ в тій же кулі. Крім того, для довільних $u,v\in S(u^{(0)},R)$ матимемо:

$$\|A'(u)-A'(v)\|_{X\to Y}\le\|T'(u)-T'(v)\|_{X\to Y}+|\mu|\,\|Q'(u)-Q'(v)\|_{X\to Y}\le$$
$$\le(K+|\mu|\,M)\,\|u-v\|_X\,,$$

тобто умова Ліпшиця (3) виконується з константою $L=K+|\mu|\,M$.

Далі з урахуванням (18) і першої з умов (20) отримуємо:

$$\left\|E-D(u)A'(u)\right\|_{X\to X}=\left\|E-[T'(u)]^{-1}(T'(u)+\mu\,Q'(u))\right\|_{X\to X}\le$$
$$\le|\mu|\left\|[T'(u)]^{-1}\right\|_{Y\to X}\left\|Q'(u)\right\|_{X\to Y}\le|\mu|\,b\nu<1,\quad \forall\,u\in S(u^{(0)},R)\,,$$

тобто виконується друга з умов (4) з константою $\delta=|\mu|\,b\,\nu$. Що стосується умови (5), то вона, вочевидь, виконується з константою $\eta^{(0)}=|\mu|\,\zeta^{(0)}$ на підставі виконуваності умов (17), (19):

$$\left\|A\,u^{(0)}-f\right\|_Y\equiv\left\|A\,u^{(0)}(\mu)-f\right\|_Y=\left\|T\,u^{(0)}+\mu\,Q\,u^{(0)}-f\right\|_Y\le|\mu|\,\zeta^{(0)}\,.$$

Враховуючи одержані вирази для констант L, δ і $\eta^{(0)}$ в останніх двох умовах (20), бачимо, що їх виконуваність відразу приводить до виконуваності відповідних умов (5). Таким чином, всі умови теореми 1 виконуються, з чого випливає справедливість тверджень даної теореми. Залишається замінити в оцінці похибки теореми 1 $\eta^{(0)}$ на $|\mu|\zeta^{(0)}$ і δ на $|\mu| b \nu$. Теорема доведена.

До рівняння (16) можна також застосовувати процес послідовних наближень виду (7), подібний до методу Ньютона, якщо замінити в (2) оператор $[A'(u^{(k)})]^{-1}$ на близький до нього оператор $D(u^{(k)}) = [T'(u^{(k)})]^{-1}$:

$$u^{(k+1)}(\mu) = u^{(k)}(\mu) - [T'(u^{(k)})]^{-1}(Au^{(k)}(\mu) - f), \quad k = 0, 1, \ldots; \; u^{(0)}(\mu) = u^{(0)}. \quad (21)$$

В цьому випадку умови існування і область розташування розв'язку $u^* \equiv u^*(\mu)$ рівняння (16), а також умови збіжності до нього процесу наближень (21) даються наступною теоремою.

Теорема 4. Нехай виконані всі умови теореми 2. Якщо початкове наближення $u^{(0)}$ задовольняє умову (19) і μ таке, що

$$|\mu| b \nu < 1, \quad h^{(0)} = b^2 |\mu| (K + |\mu| M)\left(\zeta^{(0)} + \frac{2\nu}{1 - |\mu| b \nu}\right) < 2, \quad r^{(0)} = \frac{b |\mu| \zeta^{(0)}}{1 - h^{(0)}/2} \le R, \quad (22)$$

то рівняння (16) має в кулі $S(u^{(0)}, r^{(0)}) \subset X$ розв'язок $u^* \equiv u^*(\mu)$, до якого збігається процес наближень (21), розпочатий з $u^{(0)}$, з лінійною швидкістю

$$\left\| u^{(k)}(\mu) - u^* \right\|_X \le \frac{b |\mu| \zeta^{(0)}}{1 - h^{(0)}/2} (h^{(0)}/2)^k.$$

Доведення. Як зазначалось вище (див. доведення теореми 2), при $D(u) = [T'(u)]^{-1}$ виконуваність умов теореми 2 приводить до виконуваності всіх умов теореми 1 з константами $L = K + |\mu| M$, $\delta = |\mu| b \nu$, $\eta^{(0)} = |\mu| \zeta^{(0)}$. Враховуючи ці вирази для констант в умовах (22), бачимо, що їх виконуваність відразу приводить до виконуваності відповідних умов (8). Тому справедливість тверджень даної теореми негайно випливає з теореми 2. Залишається замінити в оцінці похибки (9) $\eta^{(0)}$ на $|\mu|\zeta^{(0)}$. Теорема доведена.

Зазначимо, що основним недоліком ітераційних методів (2), (7) і (21) є те, що на кожному кроці ітерацій доводиться визначати відповідно оператори $[A'(u^{(k)})]^{-1}$, $D(u^{(k)})$ і $[T'(u^{(k)})]^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots$. Найбільш часто замість вказаних методів використовують відповідно модифікований метод Ньютона

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - [A'(u^{(0)})]^{-1}(Au^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \ldots \quad (23)$$

та методи, подібні до нього, із заміною в (23) оператора $[A'(u^{(0)})]^{-1}$ на близькі до нього оператори $D(u^{(0)})$ і $[T'(u^{(0)})]^{-1}$:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - D(u^{(0)})(Au^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad (24)$$

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - [T'(u^{(0)})]^{-1}(Au^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \ldots. \quad (25)$$

Ітераційні процеси (23)-(25), хоча і збігаються повільніше (з лінійною швидкістю) за основний метод Ньютона (2), але менш трудомісткі, оскільки визначення відповідних операторів $[A'(u)]^{-1}$, $D(u)$ і $[T'(u)]^{-1}$ в них відбувається лише в початковій точці $u^{(0)}$. Останній же з наведених процесів має ту додаткову перевагу, що в ньому використовується зворотний оператор $[T'(u^{(0)})]^{-1}$, який відповідає не тільки початковій точці $u^{(0)}$, а ще й початковому значенню параметра $\mu = 0$. Теоретичне обґрунтування процесів (23)-(25) за умов типу Канторовича міститься в роботі [8].

Аналіз одержаних результатів та висновки. У роботі для нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі, в тому числі залежних від параметра, досліджені питання про існування, область розташування розв'язку та збіжність до нього ітераційних методів, основаних на методі Ньютона і подібних до нього процесах. Доведено відповідні теореми, отримано оцінки похибки. Обґрунтування методів проведено при узагальнених умовах типу Коші, коли замість обмеженого оборотного оператора до похідної вихідного оператора в розглядуваній області припускається лише існування деякого лінійного обмеженого оператора, близького до нього. Заміна умов типу Канторовича (коли припускається існування обмеженого оборотного оператора до похідної в початковій точці) умовами типу Коші дозволила послабити обмеження, які накладаються на вибір початкового наближення в процесі ітерацій. Ця обставина є надзвичайно важливою, оскільки при розв'язуванні ітераційними методами нелінійних задач вибір належного початкового наближення є одним з найбільш складних моментів.

Результати роботи можуть бути використані при дослідженні конкретних функціональних рівнянь, зокрема, нелінійних інтегральних і диференціальних рівнянь, а також операторних рівнянь, що виникають в теорії збурень і задачах наближеної побудови конформних відображень.

Бібліографічні посилання

1. **Ваарманн, О. М.** О некоторых итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора [Текст] / О. М. Ваарманн // Изв. АН ЭстССР, Сер. физ.-матем. и тех. наук. – 1968. – Т. 17, № 4. – С. 379–390.
2. **Вержбицкий, В. М.** Итерационные методы с последовательной аппроксимацией обратных операторов [Текст] / В. М. Вержбицкий // Известия Института математики и информатики. – Ижевск, 2006. – № 2(36). – С. 129-138.
3. **Вертгейм, Б. А.** Некоторые теоремы о сходимости метода Ньютона [Текст] / Б. А. Вертгейм // Сб. научн. трудов Пермского политехн. ин-та. – 1960. – Т. 7, № 1. – С. 3-28.
4. **Гарт, Л. Л.** О численном моделировании решения нелинейного параметрического уравнения проекционно-итерационным методом [Текст] / Л. Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С. 66-75.
5. **Канторович, Л. В.** О методе Ньютона для функциональных уравнений [Текст] / Л. В. Канторович // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 59, № 7. – С. 1237–1240.
6. **Канторович, Л. В.** Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
7. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ и прикладная математика [Текст] / Л. В. Канторович // УМН. – 1948. – Т. 3, № 6. – С. 89-185.

8. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
9. **Кивистик, Л.** О некоторых итерационных методах для решения операторных уравнений в пространстве Гильберта [Текст] / Л. Кивистик // Изв. АН ЭстССР, Сер. физ.-матем. и тех. наук. – 1960. – Т. 9, № 3. – С. 229-241.
10. **Мысовских, И. П.** О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных уравнений и его применениях [Текст] / И. П. Мысовских // Вестник ЛГУ. – 1953. – № 11. – С. 25-48.
11. **Поляк, Б. Т.** Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике [Текст] / Б. Т. Поляк // Труды ИСА РАН. – 2006. – Т. 28. – С. 48-66.
12. Приближённое решение операторных уравнений [Текст] / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
13. **Тавадзе, Л. Л.** К вопросу о сходимости метода Ньютона при условиях типа Коши [Текст] /Л. Л. Тавадзе // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. – Д.: ДГУ, 1997. – С. 152-155.
14. **Фридман, В. М.** Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения [Текст] / В. М. Фридман // ДАН СССР. – 1961. – Т. 139, № 5. – С. 1063-1066.
15. **Altman, M.** Connections between the method of steepest descent and Newton's method [Text] / M. Altman // Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III. – 1957. – V. 5, № 11. – P. 1031-1036.
16. **Deulfhard, P.** Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms [Text] / P. Deuflhard. – Berlin: Springer, 2004. – 424 p.
17. **Feng, C.** The convergence region of a modified Newton method [Text] / C. Feng // Numer. Math. J. Chin. Univ. – 1988. – V. 10, № 1. – P. 92-96.
18. **Pugachev, B. P.** On the acceleration of the convergence of iterative processes of the second degree [Text] / B. P. Pugachev // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1963. – V. 2, № 4. – P. 784-787.

Надійшла до редколегії 05.03.2017.