

Л.Л. Гарт, П.О. Довгай, В.Л. Селіщев
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

СІТКОВІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ

Робота присвячена аналізу сіткових алгоритмів розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою, що описується задачею Діріхле для рівняння Пуассона за наявності обмежень на змінні стану системи та керування. Виконано порівняння наближених алгоритмів розв'язання, один з яких використовує послідовність сіток, а інший – одну фіксовану сітку заданої розмірності.

Работа посвящена анализу сеточных алгоритмов решения задачи оптимального управления эллиптической системой, которая описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона при наличии ограничений на переменные состояния системы и управления. Выполнено сравнение приближенных алгоритмов решения, один из которых использует последовательность сеток, а другой – одну фиксированную сетку заданной размерности.

In this work the grid algorithms were analyzed for solving optimal control problem with elliptical systems. Optimal control problem was described as Dirichlet problem for Poisson's equation with constraints on state variable of system and control variable. Two numerical algorithms were compared, one of which uses sequence of grids, another one – one fixed grid with predetermined size.

Ключові слова: оптимальне керування, еліптична система, задача Діріхле, рівняння Пуассона, метод сіток, метод простої ітерації, метод регуляризації Тихонова, апроксимація, збіжність, наближений розв'язок.

Вступ. В сучасному світі майже всі процеси інженерії, економіки та інших галузей потребують оптимізації процесів керування для того, щоб досягти найліпших результатів без необхідності надлишкового використання ресурсів (грошових або матеріальних). Саме цими питаннями займається теорія оптимального керування. Одним з напрямів, які існують в рамках даної теорії є оптимальне керування еліптичними системами. Особливістю даного напрямку є те, що моделі, які розглядаються в рамках даної теорії, не залежать від часу.

Багато процесів, що встановилися, різної фізичної природи являють собою приклади стаціонарних задач, зокрема, це задачі теорії пружності, пластичності, дифракції, акустики, задачі поширення електромагнітних хвиль у хвилюваннях та багато інших. Універсальність математичних моделей дозволяє легко переходити до дослідження нових процесів та явищ. Для вивчення математичних моделей в основному використовуються чисельні методи.

Сучасні обчислювальні алгоритми дають можливість отримувати за допомогою комп'ютерів наближені розв'язки складних задач із заданою точністю за потрібний час.

Серед практичних задач можливо виділити задачу оптимізації нагріву товстого тіла в прохідних або камерних печах[1], яка приводить до постановки задачі з об'єктом, що описується рівнянням в частинних похідних другого порядку. Тут може виявитися необхідним з мінімальними витратами енергії досягти заданого розподілу температур в тілі, яке нагрівається, або забезпечити, щоб нерівномірність нагріву не перевищувало заданої. З такого роду задачами зіткаються при створенні систем автоматичного керування для широкого класу розповсюджених на практиці виробничих процесів. Крім згаданих нагрівних та термічних прохідних та камерних печей, до таких об'єктів відносяться обертові печі для спікання сипучих матеріалів, неперервні сушильні апарати для стрічкових та сипучих матеріалів, доменні та мартенівські печі, агломераційні стрічки, установки для неперервного нанесення покриття, задачі про стаціонарні течії тепла в двовимірному тілі, розподіл електричних напруг на площині, що проводить струм.

Постановка задачі. Нехай задачею стану є однорідна задача Діріхле для рівняння Пуасона на одиничному квадраті $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ з границею $\partial\Omega$:

$$\Delta u = u, x \in \Omega, \quad y(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $u \equiv u(x)$ – функція керування, $y \equiv y(x) \equiv y(x, u)$ – шукана функція стану системи. Множини обмежень на функції керування та стану мають вигляд

$$U = \{u \in L_2(\Omega) : \|u(x)\| \leq 1\}, \quad (2)$$

$$Y = \left\{ y \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} y(x) dx \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

а цільовий функціонал має вигляд

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx + \frac{r}{2} \int_{\Omega} u^2 dx, \quad (4)$$

де $r > 0$ – задана стала, $y_d \in L_2(\Omega)$ – задана функція. Тут $L_2(\Omega)$ – простір вимірних на множині Ω функцій, які при піднесенні до степеня 2 є інтегрованими за Лебегом на Ω , а $H_0^1(\Omega)$ – простір Соболева першого порядку.

Будемо розв'язувати наступну задачу оптимального керування:

$$\min_{(y, u) \in K} J(y, u), \quad (5)$$

де $K = \{(y, u) : y \in Y, u \in U, \text{виконана умова (1)}\}$.

Метод розв'язання. Дискретизація моделі. Як відомо[2], застосування сіткових алгоритмів до розв'язання задачі оптимального керування (5) передбачає дискретизацію поставленої задачі на попередньо введеній сітці вузлів

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega} : x_{1,i} = ih_1, i = \bar{0}, N_1; x_{2,j} = jh_2, \\ j = \bar{0}, N_2; h_\alpha = \frac{1}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Для дискретизації цільового функціоналу (4) та обмежень (2),(3) було використано кубатурну формулу правих прямокутників, в результаті чого отримано сітковий функціонал виду

$$J_h(y_h, u_h) = \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (y_{ij} - y_{d,ij})^2 + \frac{r h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}^2 \quad (7)$$

з обмеженнями у вигляді

$$U_h = \{u_h: |u_{ij}| \leq 1, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}\}, Y_h = \{y_h: h_1 h_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{ij} \leq 1\}, \quad (8)$$

де $u_{ij} \approx u(x_{ij}), y_{ij} \approx y(x_{ij}), y_{d,ij} = y_d(x_{ij}); u_h = \{u_{ij}\}_{i=\overline{1, N_1}, j=\overline{1, N_2}}$,

$y_h = \{y_{ij}\}_{i=\overline{1, N_1}, j=\overline{1, N_2}}$ – сіткові функції, визначені на сітці $\overline{\omega}_h$.

Для дискретизації рівняння Пуасона було використано метод скінченних різниць на п'ятиточковому шаблоні. Сіткова задача Діріхле для рівняння Пуасона на сітці (6) має вигляд[3]:

$$\frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j} - 2y_{ij} + y_{i+1,j}) + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j-1} - 2y_{ij} + y_{i,j+1}) = u_{ij}, \quad (9)$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1};$$

$$y_{ij} = 0, x_{ij} \in \gamma_h.$$

Для розв'язання цієї різницевої задачі можна використовувати відомі методи[3].

Метод простої ітерації для розв'язання різницевої задачі Діріхле для рівняння Пуасона. Різницеву задачу (9) будемо трактувати як операторне рівняння

$$Au = f \quad (10)$$

в скінченновимірному просторі сіткових функцій[3], де оператор A визначається наступним чином: $Au = -\dot{\Delta}u$, де $\dot{\Delta}$ – сітковий оператор Лапласа, $u \in H, \dot{u} \in \dot{H}$ та $\dot{u}(x) = u(x)$ для $x \in \omega_h, f = f(x)$ – задана функція. Тут \dot{H} – множина сіткових функцій, заданих на $\overline{\omega}_h$, які обертаються в нуль на γ_h , а H – простір сіткових функцій, заданих на ω , зі скалярним добутком $(u, v) = \sum_{x \in \omega_h} u(x)v(x)h_1 h_2$.

В результаті розрахункові формули для методу простої ітерації для розв'язання задачі (9) будуть мати вигляд[3]

$$y_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k)} + y_{i,j+1}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k)}] - \frac{h^2}{4} u_{ij}, i = \overline{1, N_1 - 1},$$

$$j = \overline{1, N_2 - 1}, k = 0, 1, 2, \dots; y_{ij}^{(k)} = 0 \text{ для } x_{ij} \in \gamma_h$$

Метод штрафних функції для врахування обмежень[7]. В математичній моделі (7),(9), з урахуванням обмежень виду (8), розширений цільовий функціонал буде мати вигляд[8]:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_h(y_h, u_h) &= \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (y_{ij} - y_{d,ij})^2 + \frac{r h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}^2 \\ &+ K \left(h_1 h_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{ij} \right)^2 1[f(y)], \\ 1[f(y)] &= \begin{cases} 1, \text{ при } h_1 h_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{ij} > 1, \\ 0, \text{ при } h_1 h_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{ij} \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

де K – деяке достатньо велике число.

Метод регуляризації Тихонова мінімізації цільового функціоналу. Так як задача оптимального керування еліптичними системами є некоректно поставленою, то виникає необхідність в її регуляризації[4, 5]:

Загальна формула процесу регуляризації виглядає наступним чином:

$$J_k(u) = J(u) + \alpha_k Q(u),$$

$$J_k^* \leq J_k(u) \leq J_k^* + \varepsilon_k,$$

$$J_k^* = \inf J_k(u), u \in U.$$

Тут $\alpha_k > 0, \varepsilon_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) – числові параметри,

$Q(u)$ – регуляризуючий оператор.

За регуляризатор оберемо евклідову норму керуючої змінної, тобто

$$Q(u) = \|u\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}^2 h_1 h_2}. \text{ Числові параметри визначатимемо}$$

наступним чином: $\alpha_k = \frac{1}{k}, \varepsilon_k = \frac{1}{k^2}, k = 1, 2, \dots$

Тоді регуляризований цільовий функціонал набуває вигляд

$$\begin{aligned} J_k(y_h, u_h) &= \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (y_{ij} - y_{d,ij})^2 + \frac{r h_1 h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}^2 + \\ &+ K \left(h_1 h_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{ij} \right)^2 1[f(y)] + \frac{1}{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}^2 h_1 h_2}. \end{aligned}$$

Метод золотого перерізу для мінімізації цільового функціоналу. Сітковий функціонал є функцією $N_1^2 N_2^2$ змінних, серед яких $N_1 N_2$ керуючих. Саме тому необхідно знайти мінімум функціоналу по $N_1 N_2$ змінним. Для цього застосуємо метод покоординатного спуску з використанням методу золотого перерізу[6]. А саме, нехай необхідно знайти найменше значення цільового

функціоналу $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Через M позначена точка n -вимірного простору з координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) . Виберемо деяку початкову точку $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ і розглянемо функцію $f(M)$ при фіксованих значеннях всіх змінних, окрім першої. Тоді вона перетвориться в функцію однієї змінної x_1 .

Для даної одновимірної функції застосовуємо метод золотого перерізу. Отриману n -вимірну точку позначимо через M_1 (отримана точка M_1 відрізняється від M_0 лише першою координатою), причому $f(M_0) \geq f(M_1)$. Фіксуємо аналогічним чином інші змінні. Діставшись до точки x_n , знову повертаємося до точки x_1 і повторюємо процес. Процес повторюється до тих пір, доки різниця в значеннях функціоналу для двох послідовних процесів не буде менша деякого наперед заданого $\varepsilon > 0$.

Алгоритм на послідовності сіток. Для покращення роботи алгоритму, про що свідчать результати роботи [2], де автори використовують дві вкладені сітки для задачі (5), було розглянуто модифікований алгоритм на послідовності сіток. Ідея полягає в наступному:

Нехай задана сітка розміру $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$. Знайшовши наближений розв'язок (y^*, u^*) , намагаємося побудувати сітку порядку $(\alpha N_1 + 1) \times (\alpha N_2 + 1)$, $\alpha > 1$. Використовуючи значення сіткової функції в відомих вузлах y_{ij}^* , $i, j = 1, 2, \dots, N$, намагаємося апроксимувати значення функції в додаткових вузлах одним з відомих методів (білінійної інтерполяції, бікубічної інтерполяції).

Знаходимо наближений розв'язок на отриманій сітці. Повторюємо процедуру до тих пір, доки різниця між значеннями наближених розв'язків на двох послідовних сітках не буде менша деякого наперед заданого $\varepsilon > 0$.

Опишемо даний алгоритм більш формально для поставленої задачі. Якщо покласти коефіцієнт $\alpha = 2$, кожна наступна сітка матиме вдвічі більше вузлів по кожному з напрямів за попередню. Після знаходження наближеного розв'язку задачі на фіксованій сітці за допомогою методики, описаної вище, постає питання подрібнити цю сітку. Для розрахунку значень наближених розв'язків у вузлах більш дрібної сітки використовується метод білінійної інтерполяції. У випадку вдвічі вкладених сіток з однаковою кількістю вузлів за кожним напрямком цей метод полягає в наступному.

Нехай маємо сітку $\omega_n = \{x_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, 2N\}$, значення у парних вузлах сітки ($i = 2k, j = 2l, k, l = 1, 2, \dots, N$) відомі. Необхідно знайти значення у непарних вузлах. Для знаходження значення сіткової функції у вузлі $x_{i,j}$ будемо використовувати значення з вузлів $x_{i+1,j-1}, x_{i+1,j+1}, x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j+1}$.

Білінійна інтерполяція основана на ідеї послідовної реалізації лінійної інтерполяції по напрямку x_1 на кожній з прямих $x_{2,j}$ (при фіксованому i), а потім навпаки. Розрахункові формули методу білінійної інтерполяції мають вигляд:

$$\begin{aligned} f(x_{ij}) \approx & f(x_{i-1,j-1}) \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j})}{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})} + \\ & + f(x_{i+1,j-1}) \frac{(x_{i,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j})}{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})} + \\ & + f(x_{i-1,j+1}) \frac{(x_{i,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})} + \\ & + f(x_{i+1,j+1}) \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})(x_{i,j} - x_{i,j})}{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}. \end{aligned}$$

Результат методу не залежить від порядку кроків, тобто можливо спочатку інтерполювати вздовж осі абсцис, а потім вздовж осі ординат, і навпаки, результат буде незмінним.

Для знаходження значень у вузлах, які лежать поміж відомими вузлами, тобто $x_{ij}, i = 2l, j = 2k + 1, l, k = 1, 2, \dots, N$, або навпаки $x_{ij}, i = 2l + 1, j = 2k, l, k = 1, 2, \dots, N$, було використано метод середнього арифметичного значення.

Аналіз результатів. Для аналізу ефективності описаних обчислювальних схем було побудовано програмний продукт, який реалізує їх на прикладі розв'язання конкретних задач.

Задача А. В постановці задачі оптимального керування (1)-(3) прийнято $y_d^{(x)} = x_1^{x_2}, x = (x_1, x_2), r = 50$.

Результати розрахунків наведені на рис. 1.

Бачимо, що за період роботи алгоритму сітка була подрібнена двічі, тобто на останній ітерації розмір сітки був $N = 40$.

Графічне відображення стану системи для задачі А наведене на рис. 2.

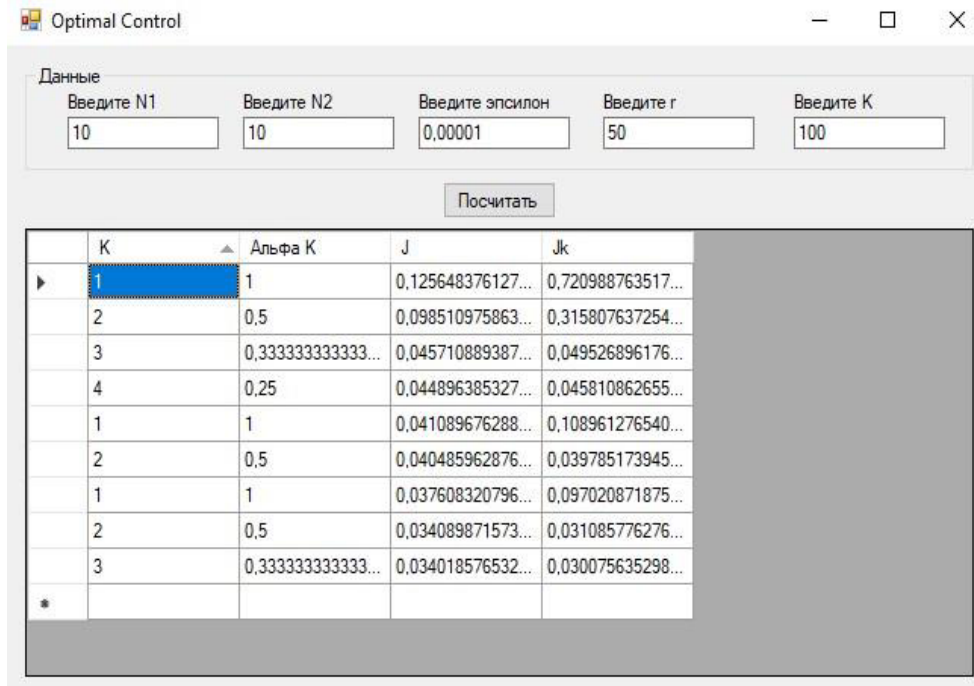


Рис. 1 Результати розрахунків для задачі А

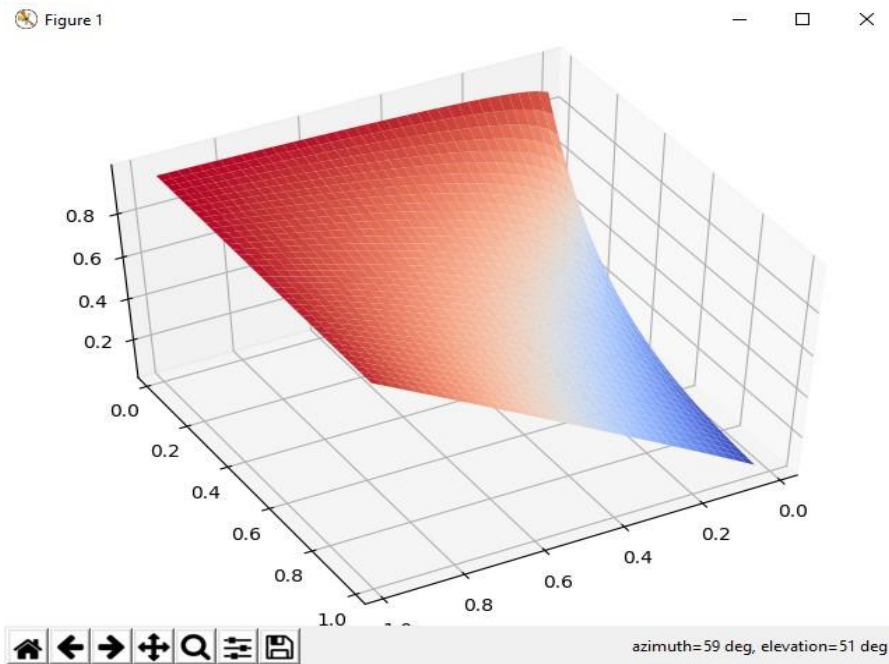


Рис. 2 Графічне зображення стану системи для задачі А

Графічне зображення керування системи має наступний вигляд:

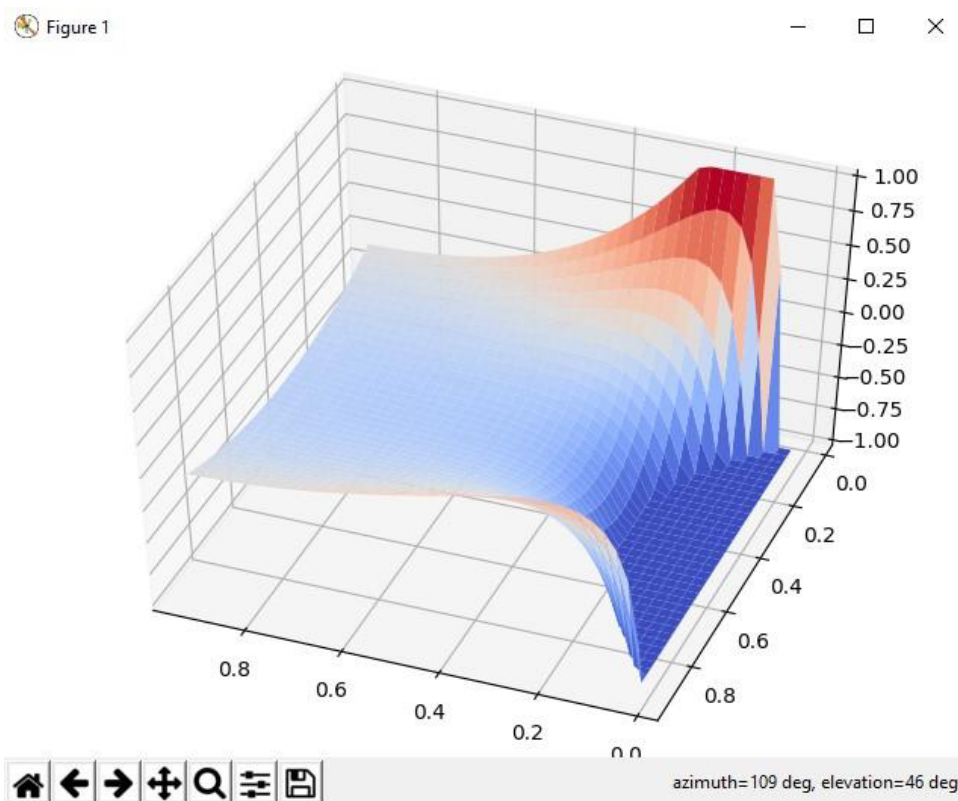


Рис. 3 Графічне зображення керування системи для задачі А

Якщо провести обчислення відразу для сітки розміру $N = 40$, то отримаємо результати, представлені на рис.4. (графічні зображення залишились незмінними):

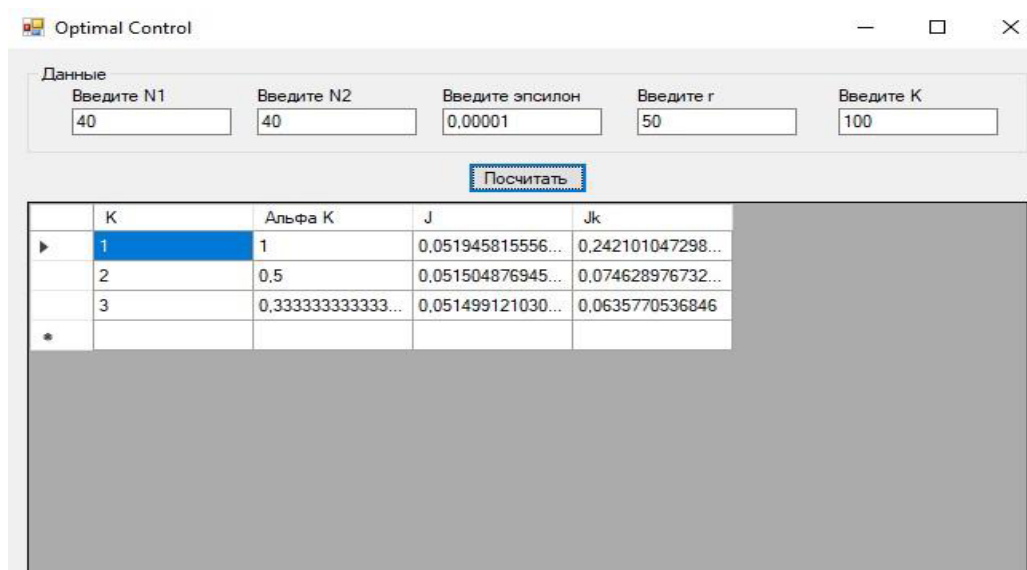


Рис. 4 Приклад розрахунку на дрібній сітці для задачі А

Задача Б. В постановці задачі оптимального керування (1)-(3) прийнято $y_d^{(x)} = e^{x_1 * x_2}, x = (x_1, x_2), r = 50$.

Результати розрахунків приведені на рис. 5.

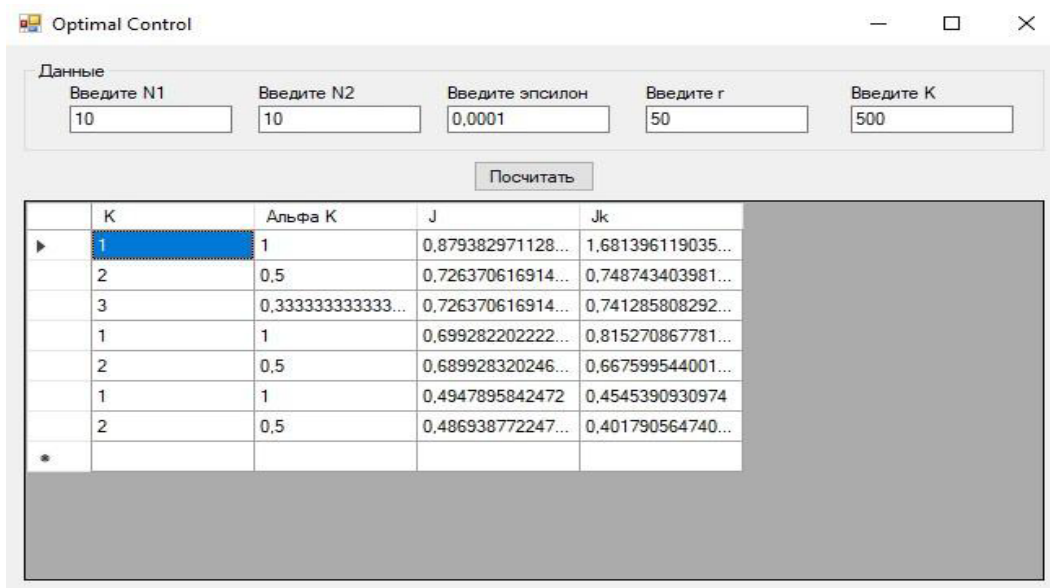


Рис. 5 Результати розрахунків для задачі Б

Графічне зображення стану системи має вигляд:

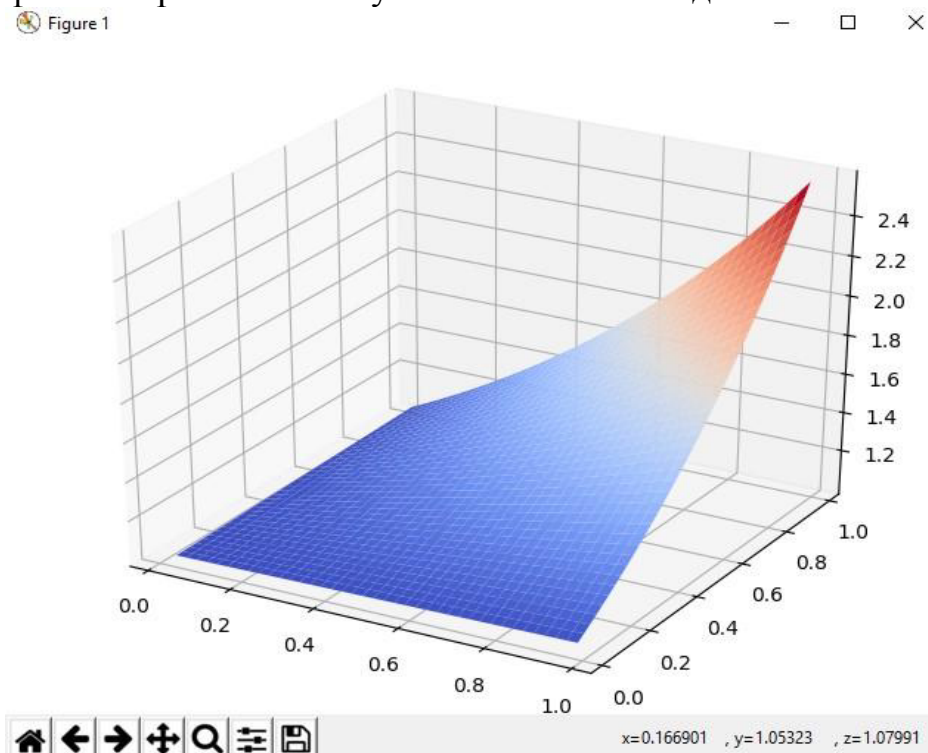


Рис. 6 Графічне зображення стану системи для задачі Б

Графічне зображення функції керування має вигляд:

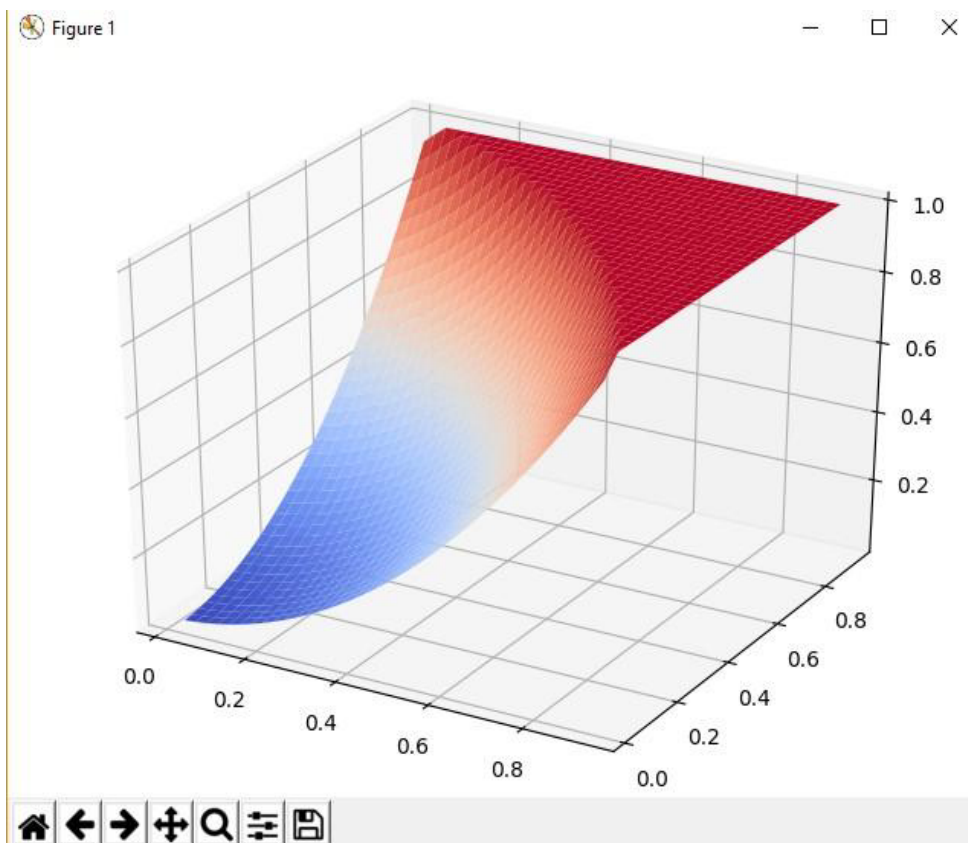


Рис. 7 Графічне зображення функції керування для задачі Б

Якщо провести обчислення відразу для сітки розміру $N = 40$, то отримаємо результати, представлені на рис.4. (графічні зображення залишились незмінними).

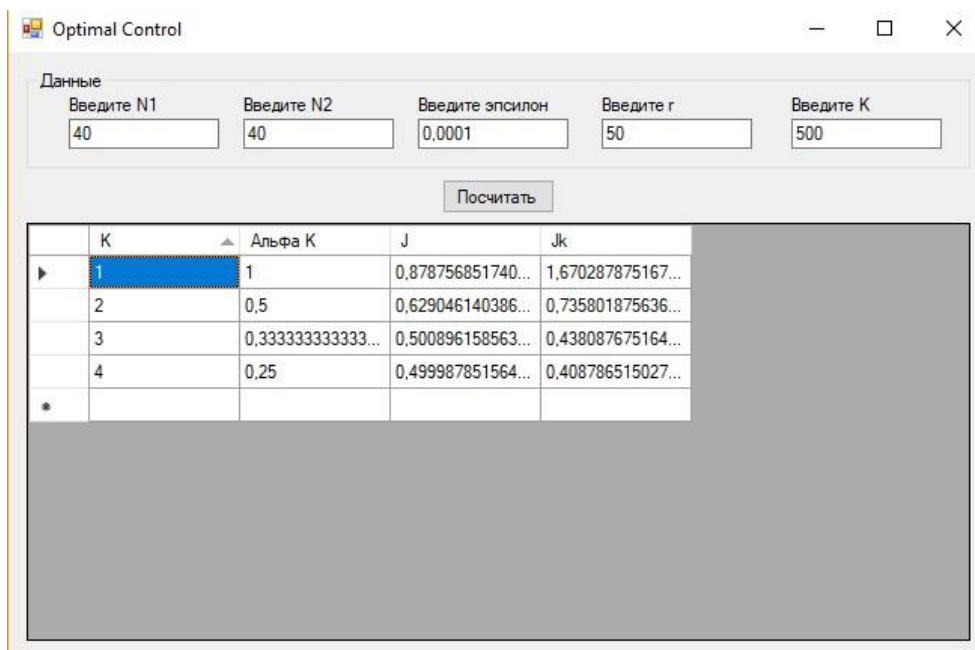


Рис. 8 Результати розрахунків на дрібній сітці для задачі Б

Наведемо порівняльну таблицю за результатами дослідження сіткових алгоритмів для задачі А.

Таблиця 1

Порівняння алгоритмів

Тип алгоритму	Час виконання, с.	Кількість ітерацій методу простої ітерації	Кількість ітерацій методу золотого перерізу
На послідовності сіток	145	Сітка 10x10: 27914 Сітка 20x20: 14597 Сітка 40x40: 7685	Сітка 10x10: 3102 Сітка 20x20: 1863 Сітка 40x40: 924
На великій сітці	160	62629	6084

Висновки. В роботі виконано аналіз сіткових алгоритмів розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою, що описується задачею Діріхле для рівняння Пуасона за наявності обмежень на змінні стану системи та керування. Виконано порівняння наближених алгоритмів розв'язання, один з яких використовує послідовність сіток, а інший – одну фіксовану сітку заданої розмірності.

Для вивчення математичних моделей в основному використовуються чисельні методи. Сучасні обчислювальні алгоритми дають можливість отримувати за допомогою комп'ютерів наближені розв'язки складних задач із заданою точністю за потрібний час. Для чисельного розв'язування крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь застосовуються два основних класи наближених методів – метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. В даній роботі використано метод скінченних різниць, який заміняє вхідну нескінченновимірну задачу сітковою, що дозволяє найбільш просто будувати і досліджувати обчислювальні схеми і алгоритми її розв'язання.

Некоректність задач оптимального керування еліптичними системами зумовила необхідність використання процедури регуляризації. В даній роботі було застосовано метод регуляризації Тихонова, згідно з яким замість мінімізації цільового функціоналу (4) за умов (1)-(3) було реалізовано збіжний процес мінімізації послідовності регуляризованих функціоналів для знаходження шуканого розв'язку з необхідною точністю.

При розв'язанні дискретної задачі Діріхле для рівняння Пуасона, отриманої методом скінченних різниць, було враховано, що оператором такої задачі є розріджена матриця, тому за доцільне було прийнято використання методу простої ітерації для розв'язання вказаної моделі, який оперує інформацією про зазначений тип матриці.

Окрім того, в роботі досліджено алгоритм розв'язання вхідної задачі оптимального керування (5) на послідовності сіток (з використанням інформації про наближений розв'язок на сітці меншого порядку дискретизації). Для

отримання значень шуканих сіткових функцій в додаткових вузлах було використано метод білінійної інтерполяції.

За результатами роботи можна зробити висновок, що алгоритм, який використовував послідовність сіток при однаковій точності наближених розв'язків працює швидше, порівняно з алгоритмом, який відразу використовує сітку високого порядку дискретизації. Для розглянутих конкретних розрахункових задач за результатами програмної реалізації було отримано, що алгоритм працює на 7-10% швидше при використанні послідовності сіток в порівнянні з алгоритмом на одній фіксованій сітці заданої розмірності.

Бібліографічні посилання

1. **Аверин, С.И.** Расчеты нагревательных печей / С.И. Аверин // под ред.Н.Ю. Тайца.— М.: Техника, 1969.—540 с.
2. **Лапін, А.В.** Задача оптимального керування правою частиною еліптичного рівняння з обмеженнями на стан [Текст] / А.В. Лапін, М.Г. Хасанов // Вчені записки Казанського університету.—Т. 152.—№4.—2010.—13 с.
3. **Самарский, А.А.** Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев // М.:Наука,1978.—299 с.
4. **Ліонс, Ж.-Л.** Оптимальне керування системам, які описуються рівняннями з частковими похідними [Текст] / Ж.-Л. Ліонс// М.:Мир,1972.—416 с.
5. **Васильев, Ф.П.** Методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев // Московский университет.-1974.-340 с.
6. **Самарский, А.А.** Численные методы[Текст] / А.А. Самарський, А.В.Гулин // М.: Наука,1989—432 с.
7. **Брайсон, А.** Прикладная теория оптимального управления [Текст] / А. Брайсон, Хо Ю-Ши // М.:Мир,1972-.272 с.

Надійшла до редколегії 26.04.2017