УДК 519.8 doi: 10.15421/321809

О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЦІЛЬОВОМУ ФУНКЦІОНАЛІ

Запропоновано алгоритм розв'язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини з n-вимірного евклідового простору E_n на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та r-алгоритму Н.З. Шора.

Ключові слова: оптимальне розбиття, недиференційовна оптимізація, нечіткий параметр, нейронечіткі технології, r-алгоритм.

Предложен алгоритм решения непрерывной линейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества из n-мерного евклидового пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров этих подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств, целевой функционал которой имеет нечеткие параметры. Алгоритм основан на применении нейронечетких технологий и r-алгоритма Н.З. Шора.

Ключевые слова: оптимальное разбиение, недифференцируемая оптимизация, нечеткий параметр, нейронечеткие технологии, r-алгоритм.

The mathematical theory of optimal set partitioning (OSP) of the n-dimensional Euclidean space, which has been formed for todays, is the field of the modern theory of optimization, namely, the new section of non-classical infinite-dimensional mathematical programming. The theory is built based on a single, theoretically defined approach that sum up initial infinite-dimensional optimization problems in a certain way (with the function of Lagrange) to non-smooth, usually, finite-dimensional optimization problems, where latest numerical non-differentiated optimization methods may be used - various variants r-algorithm of N.Shor, that was developed in V. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

For now, the number of directions have been formed in the theory of continuous tasks of OSP, which are defined with different types of mathematical statements of partitioning problems, as well as various spheres of its application. For example, linear and nonlinear, single-product and multiproduct, deterministic and stochastic, in the conditions of complete and incomplete information about the initial data, static and dynamic tasks of the OSP without limitations and with limitations, both with the given position of the centers of subsets, and with definition the optimal variant of their location. Optimal set partitioning problems in uncertainty are the least developed for today is the direction of this theory, in particular, tasks where a number of parameters are fuzzy, inaccurate, or there are insufficient mathematical description of some dependencies in the model. Such models refer to the fuzzy OSP problems, and special solutions and methods are needed to solve them.

In this paper, we propose an algorithm for solving a continuous linear single-product problem of optimal set partitioning of n-dimensional Euclidean spaces E_n into a subset with searching of coordinates of the centers of these subsets with restrictions in the form of equalities and inequalities where target function has fuzzy parameters. The algorithm is built based on the application of neuro-fuzzy technologies and N.Shor r-algorithm.

Keywords: optimal partitioning, non-differentiable optimization, fuzzy parameter, neuro-fuzzy technologies, r-algorithm.

Вступ. Основи математичної теорії неперервних задач ОРМ n-вимірного евклідового простору на підмножини, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними, закладені в роботі [1], в якій наведена численна бібліографія, а також широкий спектр практичних застосувань неперервних задач оптимального розбиття множин та споріднених з ними задач. Це лінійні і нелінійні, однопродуктові й багатопродуктові, детерміновані й стохастичні, в умовах повної та неповної інформації про вихідні дані, статичні та динамічні задачі ОРМ без обмежень і з обмеженнями, як із заданим положенням центрів підмножин, так і з відшукання оптимального варіанту їх розташування.

Для розв'язання наведених класів задач оптимального розбиття множин запропонований єдиний, теоретично обґрунтований підхід, на основі якого розроблено алгоритми, складовою частиною яких, як правило, є r-алгоритм Н. З. Шора або його модифікації.

Найменш вивченими на сьогоднішній день є задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема, задачі, в яких ряд параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі. Такі моделі відносять до нечітких задач ОРМ, для їх розв'язання потрібна розробка спеціальних підходів і методів.

У даній роботі запропоновано алгоритм розв'язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору E_n на її підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, що не перетинаються (серед яких можуть бути і порожні), з відшукуванням координат центрів $\tau_1,..., \tau_N$ цих підмножин, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та r-алгоритму Н.З. Шора.

Наведемо спочатку математичну постановку цієї задачі з [1] з чіткими параметрами у цільовому функціоналі.

Задача А. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_n\})} \left[\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x,\ \tau_i) + a_i)\rho(x)dx \right] \tag{1}$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i, i = 1,..., p, \int_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i, i = p+1,..., N \tag{2}$$

,

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega, mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i\neq j,\ i,j=1,...,N \quad , \qquad (3)$$
$$\tau=\left(\tau_1,...,\tau_N\right)\in\underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N}=\Omega^N,$$

де $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega\subset E_n$; $\tau_i=(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})\in\Omega$; функції $c(x,\ \tau_i)$ − обмежені, визначені на $\Omega\times\Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i=(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i=1,..,N$; координати $\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}$ центру τ_i, $i=1,..,N$, заздалегідь невідомі (які потрібно визначити); $\rho(x)$ − обмежені, вимірні, невід'ємні на Ω функції; $a_1,...a_N$, $b_1,...,b_N$ − задані невід'ємні числа, причому

$$S=\int_{\Omega}\rho(x)dx\leq\sum_{i=1}^{N}b_i,\ ,0\leq b_i\leq S,\ \ i=1,...,N.$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок Ω_i, $i=1,..,N$, дорівнює нулю.

У роботах [2],[3] передбачалося, що для функцій $\rho(x)$, $c(x,\ \tau_i)$, $i=1,...,N$, відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна нелінійна) не відома. В роботі [3] було запропоновано алгоритм розв'язання задачі (1), (3) з нейролінгвістичною ідентифікацією функції попиту $\rho(x)$. У даній роботі розглянемо випадок, коли параметри $a_i, i=1,...,N$, у функціоналі (1) можуть бути нечіткими, неточними, недостовірними. Для зняття нечіткості в подальшому будемо використовувати нейронечіткі технології, описані в роботах [3]-[4].

Для цього параметри $a_i, i=1,...,N$, представимо як параметри, що залежать від нечітких факторів $\tilde{\gamma}_j,\ j=1,...,n,$ у виді

$$\tilde{a}_i=a_i(\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n). \qquad (4)$$

Тоді задачу (1)-(3) можна записати з нечіткими параметрами у такому виді:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}(c(x,\ \tau_i)+\tilde{a}_i)\rho(x)dx\to\min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\tau)} \qquad (5)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=b_i, i=1,...,p,\ \int_{\Omega_i}\rho(x)dx\leq b_i, i=p+1,...,N, \qquad (6)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega, mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i\neq j,\ i,j=1,...,N. \qquad (7)$$

Нейролінгвістична ідентифікація нечітких параметрів $\tilde{a}_i$.

Позначимо, для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації, кожний параметр a_i, $i = 1,...,N$, як a та розглянемо функціональну залежність виходу a від входів $\gamma_1,...,\gamma_n$ у виді:

$$a = a(\gamma)\text{, де } \gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n). \tag{8}$$

Для задачі ідентифікації передбачаються відомими:

1) області визначення входів і область зміни виходу для (8):

$\Upsilon_i = \left[\gamma_{min_i}, \gamma_{\max_i}\right]$ - області визначення вхідних змінних γ_i, $i = 1,...,n$, (9)

$A = \left[a_{min}, a_{max}\right]$ - область зміни вихідної змінної a; (10)

2) експертно-експериментальна інформація про залежність (8) у вигляді вибірки з M пар даних про входи та вихід об'єкта $\{\gamma^{(m)}{}_{\exp}, a^{(m)}{}_{\exp}\}$, де $\gamma^{(m)}{}_{\exp} = \{\gamma^{(m)}{}_{1_{\exp}}, \gamma^{(m)}{}_{2_{\exp}}, ..., \gamma^{(m)}{}_{n_{\exp}}\}$ - вхідний вектор в m-ій парі, $m = \overline{1,M}$.

Нейролінгвістична ідентифікація складної, як правило нелінійної, функціональної залежності (8) складається з двох етапів:

перший етап - побудова нечіткої моделі об'єкта (8) у вигляді нечіткої продукційної моделі за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язок виходу a та входів $\gamma_1,...,\gamma_n$, як узгодженої множини окремих нечітких продукційних правил виду «ЯКЩО - ТО»;

другий етап - настройка параметрів нечіткої моделі з метою мінімізації відхилення результатів моделювання від експериментальних даних.

Далі коротко опишемо перший етап методу нейролінгвістичної ідентифікації - побудову нечіткої продукційної моделі, використовуючи деякі необхідні для цього поняття теорії нечітких множин і нечіткої логіки з [4].

Типова структура процесу побудови нечіткої продукційної моделі об’єкта (8) з декількома входами і одним виходом складається з таких блоків: фазифікація, нечітке логічне виведення, дефазифікація. Опишемо ці блоки.

Блок фазифікації. Для знаходження залежності (8) в явному вигляді будемо розглядати вхідні змінні і вихідну змінну як лінгвістичні змінні, задані на універсальних множинах (9) - (10).

У контексті нечіткої логіки під фазифікацією розуміється процедура визначення терм-множин вхідних та вихідної змінних з відповідними функціями належності для кожного терму.

У даної залежності (8) для оцінки лінгвістичних змінних a та γ_i, $i = 1,\ldots,n$, будемо використовувати терми з таких терм-множин:

$D = \{D_k\}$ - терм-множина змінної a, де D_k – k-й лінгвістичний терм змінної a, $k = 1,2,\ldots,L$, L – число різних класів виходу a. Для кожного класу D_k доберемо «найхарактернішого представника» $d_k \in D_k$ і назвемо його центром класу;

$\Gamma_i = \{\Gamma_{ir}\}$ - терм-множина змінної γ_i, де Γ_{ir} – r-й лінгвістичний терм змінної γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1, 2, \ldots, p_i$, p_i - кількість термів в терм-множині Γ_i змінної γ_i. Причому, у загальному випадку, $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$.

Значення лінгвістичних термів D_k и Γ_{ir} отримаємо на основі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється.

Лінгвістичні терми $\Gamma_{ir} \in \Gamma_i$ и $D_k \in D$ розглядаються як нечіткі множини, задані на універсальних множинах Υ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, та A, відповідно, визначених у (9)-(10). Кожний з нечітких термів $\Gamma_{ir} \in \Gamma_i$ представляє відповідну нечітку підмножину на множині значень γ_i. А кожну нечітку множину, у свою чергу, задамо її дзвоноподібною функцією належності $\mu_{ir}(\gamma_i)$, яку представимо у виді

$$\mu_{ir}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\gamma_i - b_{ir}}{c_{ir}} \right)^2}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; r = 1, 2, \ldots, p_i, \tag{11}$$

де $\mu_{ir}(\gamma_i)$ – число у діапазоні [0,1], яке характеризує суб'єктивну міру відповідності значення γ_i нечіткому терму Γ_{ir}; b_{ir} і c_{ir} – параметри, які спочатку обираються експертом, а потім (2-й етап побудови нечіткої моделі) настроюються на експериментальні дані: b_{ir} – координата максимуму функції $\mu_{ir}(\gamma_i)$, причому $\mu_{ir}(b_{ir}) = 1$, c_{ir} – коефіцієнт концентрації-розтягування функції $\mu_{ir}(\gamma_i)$.

Таким чином, на виході блоку фазифікації є заданими функції належності $\mu_{ir}(\gamma_i)$ для кожного лінгвістичного терму Γ_{ir} з терм-множини Γ_i відповідної вхідної змінної γ_i.

Блок нечіткого логічного виведення. На вході цей блок отримує з попереднього блоку ступінь належності значень вхідних змінних конкретним нечітким множинам (термам), тобто значення $\mu_{ir}(\gamma_i)$, та на його виході обчислюється результуюча функція належності вихідного значення моделі $\mu_{res}(a)$. Ця функція має складну форму і визначається за допомогою алгоритму нечіткого логічного виведення. Для виконання обчислень блок виведення повинен включати наступні компоненти: базу нечітких продукційних логічних правил, алгоритм нечіткого логічного виведення, функції належності $\mu_{D_k}(a)$ для кожного терму D_k з терм-множини D вихідної змінної a.

Далі представимо відому експертно-експериментальну інформацію про об'єкт (8) у вигляді системи нечітких продукційних логічних правил виду «ЯКЩО - ТО».

Тоді функцію належності вихідної змінної a класу D_k побудуємо на підставі наявності залежності (8) і застосування принципу узагальнення Заде теорії нечітких множин у вигляді:

$$\mu_{D_k}(a) = (\mu_{11}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{21}^k(\gamma_2) \wedge .... \wedge \mu_{n1}^k(\gamma_n))$$

$$.......$$

$$\vee(\mu_{1j}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2j}^k(\gamma_2) \wedge .... \wedge \mu_{nj}^k(\gamma_n)) \qquad (12)$$

$$.......$$

$$\vee(\mu_{1s_k}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2s_k}^k(\gamma_2) \wedge .... \wedge \mu_{ns_k}^k(\gamma_n)), \qquad k = 1,2,...,L.$$

Замінимо в (12) операцію нечіткого «ТА» ($\wedge$) в кожному j-ому, $j = 1,2,\ldots,s_k$, правилі добутком і отримаємо:

$$\mu_{1j}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2j}^k(\gamma_2) \wedge .... \wedge \mu_{nj}^k(\gamma_n) = \mu_{1j}^k(\gamma_1) \cdot \mu_{2j}^k(\gamma_2) \cdot .... \cdot \mu_{nj}^k(\gamma_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{ij}^k(\gamma_i), \qquad (13)$$

$j = 1,2,\ldots,s_k$, $k = 1, 2, \ldots, L$,

тоді вираз для $\mu_{D_k}(a)$ з (12), із урахуванням (13), перепишемо у виді

$$\mu_{D_k}(a) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{i1}^k(\gamma_i) \vee ... \vee \prod_{i=1}^{n} \mu_{ij}^k(\gamma_i) \vee ... \vee \prod_{i=1}^{n} \mu_{is_k}^k(\gamma_i), \qquad (14)$$

де $$\mu_{ij}^k(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\gamma_i - b_{ij}^k}{c_{ij}^k} \right)^2}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \; j = 1,2,\ldots,s_k, \; k = 1, 2, \ldots, L. \qquad (15)$$

Крім того, для досягнення більшої гнучкості моделі, поставимо у відповідність кожному правилу число $w_j^k \in [0,1]$, яке означає ступінь достовірності j-го правила для k-го класу. Тоді, при урахуванні (13), вихід j-го правила будемо визначати за формулами:

$$p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) = w_j^k \prod_{i=1}^{n} \mu_{ij}^k(\gamma_i), \quad j = 1,2,\ldots,s_k, \; k = 1, 2, \ldots, L. \qquad (16)$$

Замінимо в (14) операцію нечіткого «АБО» ($\vee$) сумою з урізанням значення до одиниці і, враховуючи (16), вихід класу правил будемо обчислювати за формулами:

$$\mu_{D_k}(a) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{s_k} p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n), & \text{якщо} \quad \sum\limits_{j=1}^{s_k} p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \le 1, \\ 1 & \text{інакше}, \end{cases} \qquad (17)$$

$k = 1, 2, \ldots, L$.

Блок дефазифікації. Для отримання точного (чіткого) значення вихідної змінної будемо застосовувати дискретний аналог методу центру тяжіння [4]:

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{L} d_k \mu_{D_k}(a)}{\sum_{k=1}^{L} \mu_{D_k}(a)} \quad . \tag{18}$$

Таким чином, ми побудували нечітку модель об'єкта (8) у вигляді співвідношень (15) - (18), структура якої відповідає експертній нечіткій базі знань і грубо описує шукану залежність (8).

Напишемо побудовану нечітку модель у вигляді

$$a = F(\gamma, B, C, W), \tag{19}$$

тут $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ – вхідний вектор, $W = \{w_j^k\}$, $w_j \in [0;1]$, $j = 1, \ldots, s_k$, набір вагових коефіцієнтів правил, $B = \{b_{ij}^k\}$, $b_{ij}^k \in \left[b_{\min_i}; b_{\max_i}\right]$, $b_{\min_i} = \min_m(\gamma^{(m)}{}_{i_{\exp}})$, $b_{\max_i} = \max_m(\gamma^{(m)}{}_{i_{\exp}})$, $C = \{c_{ij}^k\}$, $c_{ij} \in [0; +\infty]$ – набори параметрів настройки функцій належності (17), $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, k = 1, 2, …, L; F – функція зв'язку входи-вихід, яка включає наведені вище перетворення.

Якщо побудована модель (19) недостатньо точно описує модельований об'єкт (8), то необхідно настроїти її, тобто знайти такі параметри *B, C, W*, які мінімізують відхилення модельних (теоретичних, отриманих за моделлю (19)) від експериментальних даних.

Перейдемо до *другого етапу* - настройки нечіткої моделі (19). Тоді в термінах математичного програмування задача настройки нечіткої моделі може бути сформульована таким чином:

знайти вектор (*B,C,W*), який забезпечує

$$\left\| F(\gamma_{\exp}, B, C, W) - a_{\exp} \right\| \to \min_{B,C,W} . \tag{20}$$

Позначимо вектор $\psi = (B, C, W)$, $\psi \in Q = \{Q_1 \times ... \times Q_i \times ... \times Q_n\}$, де $Q_i = \left[b_{\min_i}; b_{\max_i}\right] \times [0; +\infty] \times [0;1]$, $i = 1, ..., n$, та перепишемо задачу оптимізації (20) у виді

$$f(\psi) \to \min_{\psi \in Q}, \tag{21}$$

де $f(\psi) = \left\| a - a_{\exp} \right\|$, a – результати, які розраховані за моделлю (19), $a_{\exp}$ – експериментальні дані.

Тут норма $\|\cdot\|$ визначається як евклідова метрика

$$\left\| a - a_{\exp} \right\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left(a^{(m)} - a^{(m)}{}_{\exp} \right)^2} , \tag{22}$$

де ${a^{(m)}}_{\exp}$ – значення вихідної змінної a з m-ої пари експериментальної вибірки $\{{\gamma^{(m)}}_{\exp}, {a^{(m)}}_{\exp}\}$, $m = 1,...,M$; $a^{(m)}$ – результати, розраховані за моделлю (15)-(18) для значень вхідних змінних γ з m-ої пари експериментальної вибірки.

Для розв'язання задачі оптимізації (21) будемо застосовувати r-алгоритм Н.З.Шора в H-формі [1], з ітераційною формулою у виді

$$\psi^{(k+1)} = \mathrm{P}_Q\left[\psi^{(k)} - h_k \frac{H_k g_f\left(\psi^{(k)}\right)}{\sqrt{\left(H_k g_f\left(\psi^{(k)}\right), g_f\left(\psi^{(k)}\right)\right)}}\right],\ k = 0,1,2,... \tag{23}$$

де P_Q - оператор проектування на Q, $h_k \geq 0$ - кроковий множник; $g_f\left(\psi^{(k)}\right)$ - субградієнт цільової функції $f(\psi)$ з (21) у точці $\psi = \psi^{(k)}$, який розраховується для $\forall k, i, j, m$: $k = 1,...,L$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,s_k$, $m = 1,...,M$, за такими формулами:

$$g_f(\psi^{(k)}) = (g_f^B(\psi^{(k)}), g_f^C(\psi^{(k)}), g_f^W(\psi^{(k)})),$$

$$g_f^{w_j^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(a^{(m)} - {a^{(m)}}_{\exp}\right)^2}} \cdot \left(a^{(k)} - {a^{(k)}}_{\exp}\right) g_a^{w_j^k}(a^{(k)}),$$

$$g_f^{b_{ij}^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(a^{(m)} - {a^{(m)}}_{\exp}\right)^2}} \cdot \sum_{m=1}^{M}\left(a^{(m)} - {a^{(m)}}_{\exp}\right) g_a^{b_{ij}^k}(a^{(m)}),$$

$$g_f^{c_{ij}^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(a^{(m)} - {a^{(m)}}_{\exp}\right)^2}} \cdot \sum_{m=1}^{M}\left(a^{(m)} - {a^{(m)}}_{\exp}\right) g_a^{c_{ij}^k}(a^{(m)}),$$

$$g_a^{w_j^{k^*}}(a^{(k^*)}) = \frac{d_{k^*} g_{\mu_{D_k}}^{w_j^{k^*}}(a^{(k^*)}) \sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(k^*)}) - g_{\mu_{D_k}}^{w_j^{k^*}}(a^{(k^*)}) \sum\limits_{k=1}^{L} d_k \mu_{D_k}(a^{(k^*)})}{\left(\sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(k^*)})\right)^2},$$

$$g_a^{b_{ij}^{k^*}}(a^{(m)}) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{L} g_{\mu_{D_k}}^{b_{ij}^{k^*}}(a^{(m)}) d_k \sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(m)}) - \sum\limits_{k=1}^{L} g_{\mu_{D_k}}^{b_{ij}^{k^*}}(a^{(m)}) \sum\limits_{k=1}^{L} d_k \mu_{D_k}(a^{(m)})}{\left(\sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(m)})\right)^2},$$

$$g_a^{c_{ij}^{k^*}}(a^{(m)})=\frac{\sum\limits_{k=1}^{L} g_{\mu_{D_k}}^{c_{ij}^{k^*}}(a^{(m)})d_k\sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(m)})-\sum\limits_{k=1}^{L} g_{\mu_{D_k}}^{c_{ij}^{k^*}}(a^{(m)})\sum\limits_{k=1}^{L} d_k\mu_{D_k}(a^{(m)})}{\left(\sum\limits_{k=1}^{L}\mu_{D_k}(a^{(m)})\right)^2},$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{w_j^k}(a^{(k)})=\prod_{i=1}^{n}\mu_{ij}^k(a_i^{(k)}),$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{b_{i^*j^*}^k}(a^{(m)})=\sum_{j=1..s_k} w_j^k\prod_{\substack{i=1\\ j^*\neq j}}^{n}\mu_{ij^*}^k(a_i^{(m)})g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{b_{i^*j^*}^k}(a_i^{(m)}),$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{c_{i^*j^*}^k}(a^{(m)})=\sum_{j=1..s_k} w_j^k\prod_{\substack{i=1\\ j^*\neq j}}^{n}\mu_{ij^*}^k(a_i^{(m)})g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{c_{i^*j^*}^k}(a_i^{(m)}),$$

$$g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{b_{i^*j^*}^k}(a_i^{(m)})=\frac{2\cdot\left(c_{i^*j^*}^k\right)^2(a_i^{(m)}-b_{i^*j^*}^k)}{\left(\left(c_{i^*j^*}^k\right)^2+\left(a_i^{(m)}-b_{i^*j^*}^k\right)^2\right)^2},$$

$$g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{c_{i^*j^*}^k}(a_i^{(m)})=\frac{2\cdot c_{i^*j^*}^k(a_i^{(m)}-b_{i^*j^*}^k)^2}{\left(\left(c_{i^*j^*}^k\right)^2+\left(a_i^{(m)}-b_{i^*j^*}^k\right)^2\right)^2}.$$

Зауважимо, що r-алгоритм є методом розв’язання задач безумовної оптимізації. В залежності від вигляду функцій належності термів для нечітких змінних моделі при використанні r-алгоритму необхідно ввести до цільового функціоналу негладкі штрафи та врахувати їх при розрахунку його градієнту.

У даній задачі обмеження для параметра B, що наведені вище, додаються до цільового функціоналу у вигляді негладкої штрафної функції $-S\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{s_k}\left(\max\left(0,b_{\min_i}-b_{ij}^k\right)+\max\left(0,b_{ij}^k-b_{\max_i}\right)\right)$, обмеження для параметра C - у вигляді негладкої штрафної функції $-S\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{s_k}\max\left(0,-c_{ij}^k\right)$, а для параметра W – у вигляді негладкої штрафної функції $-S\cdot\sum\limits_{k=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{s_k}\left(\max\left(0,-w_j^k\right)+\max(0,w_j^k-1)\right)$, де S – велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для цільового функціоналу).

У результаті розв'язання задачі оптимізації (21) отримуємо вектор $\psi^* = (B^*, C^*, W^*)$, який доставляє мінімальне значення цільовій функції $f(\psi)$. Тобто отримуємо такі значення $W^* = \{w_j^{k*}\}$ – для набору вагових коефіцієнтів правил і наборів параметрів $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}, C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$ функцій належності (15), для яких відхилення виду (22) експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі, досягає мінімального значення.

Наведемо результуючу нейронечітку ідентифікацію залежності (8) у вигляді наступних співвідношень:

$$a(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^{L} d_k \cdot \mu^*_{D_k}(a)}{\sum_{k=1}^{L} \mu^*_{D_k}(a)}, \quad \gamma \in \Upsilon = \Upsilon_1 \times \ldots \times \Upsilon_i \times \ldots \times \Upsilon_n, \tag{24}$$

де

$$\mu^*_{D_k}(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), & \text{якщо} \quad \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \le 1, \\ 1 & \text{інакше}, \end{cases} \tag{25}$$

$$p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{k*}(\gamma_i), \tag{26}$$

$$\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}}\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, s_k, \; k = 1, 2, \ldots, L. \tag{27}$$

У співвідношеннях (24)-(27) значення $\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i)$, $p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $\mu^*_{D_k}(a)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $W^* = \{w_j^{k*}\}, B^* = \{b_{ij}^{k*}\}, C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, отриманих після настройки.

Алгоритм розв'язання задачі з нейролінгвістичною ідентифікацією нечітких параметрів $\tilde{a}_i$.

Для формулювання алгоритму розв'язання задачі (5)-(7) з нечіткими параметрами $\tilde{a}_i, i = 1, \ldots, N$, перепишемо задачу **A** (з чіткими параметрами), вводячи характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \; x \in \Omega_i, \\ 0, x \in \Omega \setminus \Omega_i, \; i = 1, \ldots, \; N, \end{cases}$$

підмножини Ω_i, $i=1,...,N$, у виді задачі В.

Задача В. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_2\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau)$$

де

$$\Gamma_2=\{\lambda(x):\lambda(x)\in\Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x\in\Omega;$$
$$\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx=b_i,\quad i=1,...,p,\qquad \int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\quad i=p+1,...,N\},$$
$$\Gamma_1=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)):\lambda_i(x)=0\vee 1 \text{ м.в. для } x\in\Omega, i=1,...,N,$$
$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ м.в. для } x\in\Omega\};\quad \tau=\left(\tau_1,...,\tau_N\right)\in\underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N}=\Omega^N.$$

Тут

$$I(\lambda(\cdot),\tau)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)+a_i)\rho\left(x\right)\lambda_i\left(x\right)dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі **В** має наступний вигляд для $i=1,...,N$ та майже всіх $x\in\Omega$ [1]:

$$\lambda_{*i}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } c(x,\tau_{*i})+a_i+\psi_i^*\le c(x,\tau_{*j})+a_j+\psi_j^*,\\ \quad i\ne j \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ j=1,...,N, \text{ тоді } x\in\Omega_{*i},\\ 0 \text{ в інших випадках,}\end{cases}$$

в якості $\tau_{*1},...,\ \tau_{*N}$, $\psi_1^*,...,\ \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$G(\psi)=\min_{\tau\in\Omega^N}G_1(\tau,\psi)==\min_{\tau\in\Omega^N}\left\{\int_\Omega\min_{i=1,...,N}[c(x,\tau_i)+a_i+\psi_i]\rho\left(x\right)dx-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i\right\}\to\max \qquad (28)$$

за умов

$$\psi_i\ge 0,\quad i=p+1,...,N, \qquad (29)$$

де

$$G_1(\tau,\psi)=\int_\Omega\min_{i=1,...,N}[c(x,\tau_i)+a_i+\psi_i]\rho(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i. \qquad (30)$$

Для розв'язання скінченновимірної задачі (28) - (30) з недиференційовною функцією (30) застосуємо евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напряму різниці двох послідовних градієнтів, близький до *r*-алгоритму Н.З. Шора [5].

Для цього від задачі (28),(29) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (30) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i\ge 0, i=p+1,...,N\}$. Знайти

$$\max_{\psi \in \mathrm{E}_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau,\psi),$$

$$P(\tau,\psi) = G_1(\tau,\psi) - S \sum_{i=p+1}^{N} \max(0,-\psi_i),$$

де S − досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (30)).

Визначимо i-ту, $i = 1,...,N$, компоненту $2N$-вимірного вектора узагальненого псевдоградієнта

$$g_P(\tau,\psi) = \left(g_P^{\tau}(\tau,\psi), -g_P^{\psi}(\tau,\psi)\right) = \left(g_P^{\tau_1}(\tau,\psi),..., g_P^{\tau_N}(\tau,\psi), -g_P^{\psi_1}(\tau,\psi),..., -g_P^{\psi_N}(\tau,\psi)\right)$$

функції $P(\tau,\psi)$ в точці $(\tau,\psi) = \left(\tau_1,...,\tau_N,\psi_1,...,\psi_N\right)$ таким чином:

$$g_P^{\psi_i}(\tau,\psi) = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i, \quad i = 1,..., p, \\ \int\limits_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i + S\max\left(0, \mathrm{sign}(-\psi_i)\right), i = p+1,..., N, \end{cases} \tag{31}$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau,\psi) = \int\limits_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau,x)\lambda_i(x)dx, \quad i = 1,..., N, \tag{32}$$

де $g_P^{\tau_i}(\tau,x)$ − i-а компонента N-вимірного вектора узагальненого градієнта $g_P^{\tau}(\tau,x)$ функції $c(x,\tau_i)$ в точці $\tau = \left(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N\right)$ при фіксиваному x, яка має вид

$$g_c^{\tau_i}(x,\tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x,\tau) \\ .... \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x,\tau) \end{pmatrix}.$$

У формулах (31), (32) $\lambda_i\left(x\right)$, $i = 1,...,N$, визначається наступним чином:

$$\lambda_i\left(x\right) = \begin{cases} 1, \text{ при } c\left(x,\tau_i\right) + a_i + \psi_i \le c\left(x,\tau_j\right) + a_j + \psi_j, \\ \quad i \ne j \text{ п. в. для } x \in \Omega,\ j = 1,..., N, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{33}$$

Опишемо алгоритм розв’язання задачі (5)-(7).

Алгоритм.

Область Ω укладаємо в n-вимірний паралелепіпед П, сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед П покриваємо прямокутної сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau,\psi) = (\tau^{(0)},\psi^{(0)})$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (33) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$ та $a_i, i = 1,...,N$, які обчислені за формулами (24)-(27), де в якості a взяті відповідні $a_i, i = 1,...,N$. Обчислюємо значення $g_P^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ у вузлах сітки за формулами (31) та (32) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, та $a_i, i = 1,...,N$, які обчислені за формулами (24)-(27), вибираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r-алгоритму та знаходимо

$$\tau^{(1)} = \mathrm{P}_{\Pi}\left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^{\tau}\left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}\right)\right),$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_P^{\psi}\left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}\right),$$

де P_{Π} − оператор проектування на П.

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k, $k = 1,2,...$, кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$, у вузлах сітки.

Опишемо ($k+1$)-й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (33) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ та $a_i, i = 1,...,N$, які обчислені за формулами (24)-(27).

2. Обчислюємо значення $g_P\left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}\right)$ за формулами (31), (32) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ та $a_i, i = 1,...,N$, які обчислені за формулами (24)-(27).

3. Проводимо $(k+1)$-й крок алгоритму узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору, близького до r-алгоритму [5], коротка схема якого має вигляд

$$\tau^{(k+1)} = \mathrm{P}_{\Pi}\left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_P^{\tau}\right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi},$$

де $B_{k+1}^{\tau}, B_{k+1}^{\psi}$ − оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n, причему $B_0^{\tau} = I_N$, $B_0^{\psi} = I_N$ (I_N − одинична матриця); $\tilde{g}_P = B_{k+1}^{*} g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$; h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму різниці

$$\left[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})\right]$$

у напряму антипсевдоградієнта $-g(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\|\left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}\right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}\right)\right\| \le \varepsilon, \varepsilon > 0, \qquad (34)$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$-го кроку алгоритму, якщо виконується - то до п. 5.

5. Вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l − номер ітерації, на

якій виконалася умова (34).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (30) при $\tau=\tau_*, \psi=\psi^*$ та $a_i, i=1,...,N$, які обчислені за формулами (24)-(27), й, для контролю правильності розрахунків, за формулою

$$I\left(\lambda_*(\cdot),\tau_*\right)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\left[c(x,\tau_{*i})+a_i\right]\rho(x)\lambda_{*i}(x)dx. \tag{35}$$

Алгоритм описаний.

Висновки. У роботі розроблено алгоритм розв’язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору E_n на підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$ з відшукуванням координат центрів (з розташуванням центрів) $\tau_1,...,\ \tau_N$ цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та r-алгоритму Н.З.Шора. Розроблений алгоритм дозволяє розв’язувати задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема, задачі, в яких ряд параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К .: Наукова думка, 2005. - 564 с.
2. **Киселева Е.М.** Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств n-мерного Евклидового пространства. Теоретические и практические приложения [Текст] / Е.М. Киселева // Проблемы управления и информатики, 2018. - №5. – С. 114-135.
3. **Elena M. Kiseleva** Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional [Text] / Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova , Sergey V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 50, 2018, Issue 3, pp. 1-20. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
4. **Elena M. Kiseleva**. Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies [Text] / Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova , Sergey V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 48, 2016, Issue 9, pp. 1-22. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
5. **Шор Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения [Текст] / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.

Надійшла до редколегії 11.10.2018.