

**В.Л. Волошко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ**

**Розглянуто задачу знаходження оптимальної функції граничних умов неоднорідного бігармонічного рівняння. Застосовується один з варіантів градієнтного методу, де на кожному кроці лінійна задача розв'язується методом потенціалів. Наведені фізичні приклади її чисельної реалізації.**

**Ключові слова:** бігармонічне рівняння, метод потенціалів, градієнтний метод, оптимальне керування.

**Рассмотрена задача нахождения оптимальной функции граничных условий неоднородного бигармонического уравнения. Применяется один из вариантов градиентного метода, где на каждом шаге задача решается методом потенциалов. Приведены физические примеры ее численной реализации.**

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, метод потенциалов, градиентный метод, оптимальное управление.

**Mathematical model construction of complicate physical phenomenon often leads to the setting and solving problems of parameters optimal control in differential equations in partial derivatives. Chosen equation with boundary and initial conditions is usually mathematical model basis of the object, which is under analysis. Optimal control of right-hand side function in non-linear problem for inhomogeneous biharmonic has been investigated. With the help of various gradient methods the problems of parameters control in such equations are solved successfully. Herewith linear problem is solved with the potential method on every step. In this work biharmonic potentials with logarithmic singularity are under consideration. That is why parameters optimization in these problems are conducted together with elimination of their incorrectness. It should be noted that system optimal control problems, described with biharmonic equations in irregular shape region, are studied poorly. Therefore the object of investigation is one of boundary conditions for inhomogeneous biharmonic equation. The circumstance which complicated the problem was irregularity of function domain. Clearly that this problem can be solved with computational mathematics methods. Without precise solution of linear problem, it is impossible to use gradient method, build converging iterative process, and obtain precise solution of optimization problem. Algorithm for linear boundary value problem solution with boundary integral equations overcomes this problem successfully. Physical examples of numerical implementation have been presented, analysis of obtained solutions have been conducted. Their accuracy, algorithm simplicity and time spent evidence about this approach promising for practical results obtaining in plate theory and mathematical physics problems successful numerical solving.**

**Keywords:** biharmonic equation, potential method, gradient method, optimal control.

**Вступ.** Точність розв'язку лінійної крайової задачі є високою [4]. Отже, використавши його як базовий, можна отримати достатньо ефективний розв'язок відповідної нелінійної задачі. В роботі розглядається задача відновлення оптимальних крайових умов бігармонічного неоднорідного рівняння. Раніше, в [2] функціонал якості досліджений на опуклість та проведено обґрунтування існування чисельного розв'язку. В основі способу розв'язування лежить один із варіантів градієнтного методу. Викладено алгоритм розв'язку поставленої задачі [1,3].

### Постановка оптимізаційної задачі

$$\Delta w(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$w(x, y) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де крива  $\Gamma$  задана параметрично  $\begin{cases} \xi = \xi(s) \\ \eta = \eta(s) \end{cases}$ ,  $0 \leq s \leq S$  – природний параметр

(довжина кривої),  $r$  – відстань між точками:  $r(x, y; \xi, \eta) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ,  $\nu = \nu(s) = \nu(\xi, \eta)$  – внутрішня нормаль, що проведена до кривої  $\Gamma$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  – область, обмежена гладким контуром  $\Gamma$ ,  $w = w(x, y)$  – невідома функція,  $f(x, y)$  – функція правої частини рівняння (1) задана в області  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  – функції крайових умов (2) задані на контурі  $\Gamma$ ,  $n$  – внутрішня нормаль в точці  $(x, y) \in \Gamma$ . Як відомо [6], фундаментальний розв'язок однорідного бігармонічного рівняння відповідного (1) є

$$K^1 = K^1(x, y; \xi, \eta) = r^2(x, y; \xi, \eta) \ln r(x, y; \xi, \eta).$$

Позначимо  $K^2 = K^2(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \nu} K^1(x, y; \xi, \eta)$ , де точки  $(\xi, \eta) \in \Gamma$ ,

$(x, y) \in \Omega$ . Тоді отриманий раніше [5,6] розв'язок задачі (1) – (2) має вид

$$\begin{aligned} w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) = & \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \\ & + \int_{\Gamma} \left( (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \\ & \left. \times \left( \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \\ \psi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) \right) d\Gamma(\xi, \eta), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

і залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов.

Припустивши, що функції  $f(x, y)$  і  $\varphi(x, y)$  задані, поставимо задачу знаходження  $\psi(x, y)$  і  $w(x, y)$ , які надають мінімум функціоналу

$$\begin{aligned}
 I(w(\cdot, \cdot), \psi(\cdot, \cdot)) &= \iint_{\Omega} (w(x, y) - w_{fixed}(x, y))^2 dx dy = \\
 &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_{\Gamma} \left( (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \\ \psi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) d\Gamma(\xi, \eta) - w_{fixed} \right]^2 dx dy,
 \end{aligned} \tag{4}$$

де  $w_{fixed}(x, y)$  – деяка задана функція. Коротко задача мінімізації записується так

$$I(w(\cdot, \cdot), \psi(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{w, \psi}. \tag{5}$$

Розглянемо частинний випадок, коли задача (1) – (2), (5) має конкретний фізичний зміст, а саме визначення згину тонкої пластини форми  $\Omega$ , обмеженої контуром  $\Gamma$ . Отже,

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad \text{де}$$

$q(x, y)$  та  $D = \frac{Eh^2}{12(1 - \sigma^2)}$  – поперекове навантаження та циліндрична жорсткість пластини,  $h$  – її товщина пластини,  $\sigma = 0.3$  – коефіцієнт Пуассона її матеріалу,  $E = 21.6 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$  – модуль Юнга.

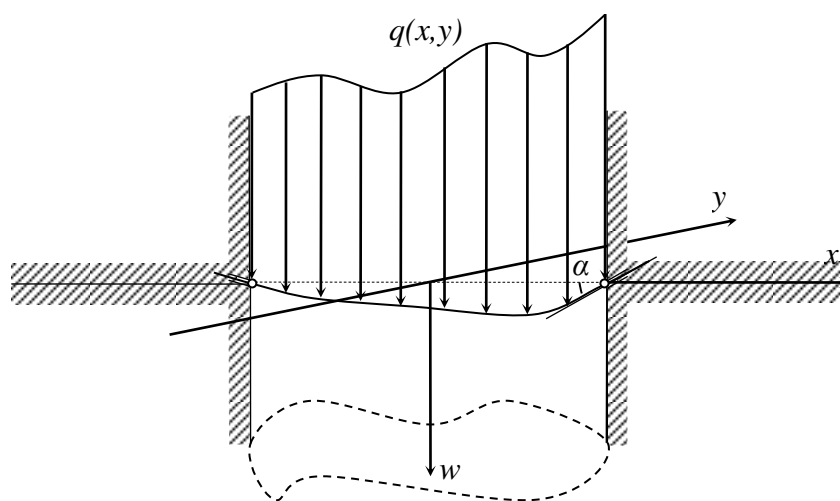


Рис. 1. Схематичне зображення способу кріплення пластини

Нехай маємо щільний півпростір з нескінченний наскрізним отвором форми  $\Omega$ , в якому закріплено пластину такої ж форми. Задамо значення однієї з крайових умов:  $w = \varphi(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \Gamma$ . Фізично це означає, що граничні точки пластини не зміщуються, тобто вона закріплена по контуру, а функція  $\psi(x, y)$  визначає тангенс кута нахилу  $\alpha(x, y)$  пластини в її граничних точках (кріплення пластини) в напрямку нормалі (рис 1).

Тоді задача полягає у визначенні таких кутів кріплення  $\psi(x, y) = \text{tg} \alpha(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$  і згину  $w(x, y)$ , щоб сума відхилень всіх точок її серединної площини від заданого згину  $w_{fixed}(x, y)$  була мінімальною.

Для знаходження розв'язку задачі (1) – (2) було обрано один з варіантів градієнтного методу. Як відомо [1], якщо  $I'_\psi(w, \psi) \neq 0$ , то напрямком найшвидшого спадання функціоналу (4) співпадає з напрямком антиградієнта  $(-I'_\psi(w, \psi))$ . Саме ця властивість лежить в основі градієнтних методів, які мають такі переваги [3]: достатньо прості в реалізації; вимоги до цільової функції не є дуже жорсткими – достатньо існування похідної функціоналу. Застосування цих методів доцільне у випадку, коли початкове наближення знаходиться далеко від точки мінімуму функціоналу, тоді кроки вздовж антиградієнта дозволяють зменшити значення функціоналу [3].

Нехай  $\psi^0(x, y)$  – обране початкове наближення. Тоді будемо послідовність  $\{\psi^k(x, y)\}$  за правилом

$$\psi^{k+1}(x, y) = \psi^k(x, y) - \alpha_k \frac{\partial I(\psi(x, y))}{\partial \psi(x, y)}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Таким чином члени послідовності  $\{\psi^k(x, y)\}$  є розв'язками відповідних лінійних крайових задач (1) – (2) на кожному кроці ітераційного процесу.

Різні способи вибору величини кроку  $\alpha_k$  визначають різні варіанти градієнтних методів. Будемо використовувати метод з дробленням кроку, оскільки метод найшвидшого спуску буде занадто трудомістким для даної задачі, а метод з апріорним завданням величини  $\alpha_k$  не гарантує виконання умови монотонності, збігається повільно і, взагалі, не є достатньо ефективним [3]. Застосування градієнтного методу, перехід від неперервної задачі до дискретної і та алгоритм її розв'язання, знаходження похідної Фреше від функціоналу якості досить детально розглянуті в роботах [2,5]. Там же наведені чисельні результати модельних задач, а також теоретична і практична оцінки похибок. Далі розглянемо задачі фізичного змісту – проектування оптимального кріплення пластин.

Приклад 1. Квадратна пластина у випадку гідростатичного навантаження. Нехай сторона квадрату  $a=2$  м, гідростатичне навантаження  $q(x, y) = \left(\frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a}\right)$ ,  $x \in \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$  з параметром  $q_0 = 17500$  кН/м.кв. (рис.2).

Оберемо  $w_{fixed}(x, y) = A \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{a}$ , де  $A = \frac{q_0}{16D} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^4$ ,  $D$  – циліндрична жорсткість,  $w(x, y)$  – функція зміщення точок серединної площини пластини,  $q(x, y)$  – поперечне навантаження на пластину,  $h=0,05$  м – товщина пластини,  $\sigma = 0.3$  – коефіцієнт Пуассона її матеріалу,  $E = 21.6 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup> – модуль Юнга,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  – функції крайових умов, які визначають спосіб кріплення пластини. Тепер за допомогою викладеного алгоритму визначаємо оптимальні кути кріплення пластини по контуру, щоб сума квадратів відхилень точок пластини від її серединної площини була мінімальною.

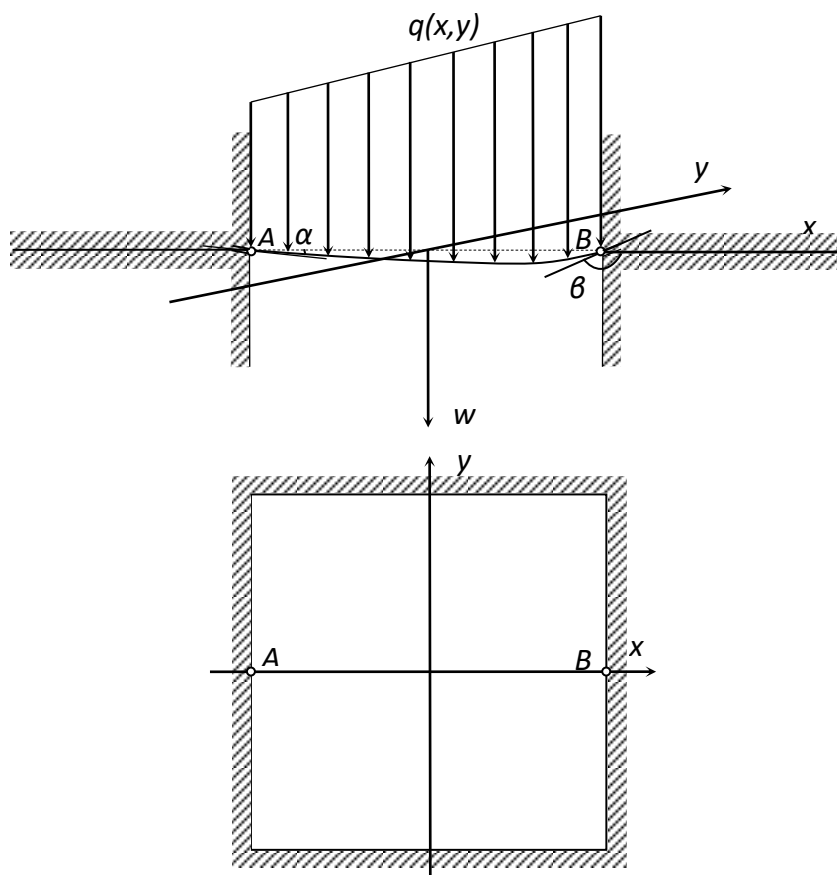


Рис. 2. Оптимальні кути кріплення квадратної пластини

Нехай початкове наближення  $\psi^0(x, y) \equiv \operatorname{tg} \alpha(x, y) = 0.5$  для всіх  $(x, y) \in \Gamma$ . При цьому початкове наближення значення функціоналу  $I(\psi^0(x, y)) = 0.108$ . Для збіжності процесу достатньо сімнадцяти ітерацій. Оптимальне значення тангенсів кутів кріплення пластини в точках  $A$  і  $B$  складають  $\operatorname{tg} \alpha(A) = -0.18$ ,  $\operatorname{tg} \alpha(B) = -0.22$ , при цьому сума прогинів серединних точок пластини зменшується до  $I(\psi^{17}(x, y)) = 0.0005$  (рис. 2).

Приклад 2. Пластина складної форми з рівномірним навантаженням.

Нехай пластина має форму овалу Касіні з параметрами  $a=1\text{м}$ ,  $c=0,8\text{м}$  рівномірне навантаження  $q=3\text{кН/м.кв.}$ (рис.3). Інші параметри беремо з попереднього прикладу. Функцію  $w_{fixed}(x, y)$  задамо, як розв'язок прямої задачі (1) – (2) при  $\psi(x, y) = 0$ . Початкове наближення  $\psi^0(x, y) \equiv \text{tg}\alpha(x, y) = 2$  для  $(x, y) \in \Gamma$ , відповідне значення функціоналу  $I(w^0, \psi^0(x, y)) = 0.503$ . Для збіжності процесу достатньо двадцяти шести ітерацій. На рис.3 знаками «+» і «-» в штрихованому сегменті позначені ділянки додатних і від'ємних значень відповідних тангенсів кутів нахилу кріплення пластини в граничних точках, тобто спостерігається чергування знаків при переході через точки позначені на рисунку символами « $\overset{\sim}{\_}$ » і « $\underset{\sim}{\_}$ ». Крім того, має місце симетрія отриманих розрахунків

$$\begin{aligned} \text{tg}\alpha(A) &= -0.019, \text{tg}\alpha(A') = -0.018, \text{tg}\alpha(B) = 0.055, \text{tg}\alpha(B') = 0.059, \\ \text{tg}\alpha(C) &= 0.028, \text{tg}\alpha(C') = 0.029, \text{tg}\alpha(D) = -0.011, \text{tg}\alpha(D') = -0.011, \\ \text{tg}\alpha(E) &= 0.077, \text{tg}\alpha(E') = 0.073. \end{aligned}$$

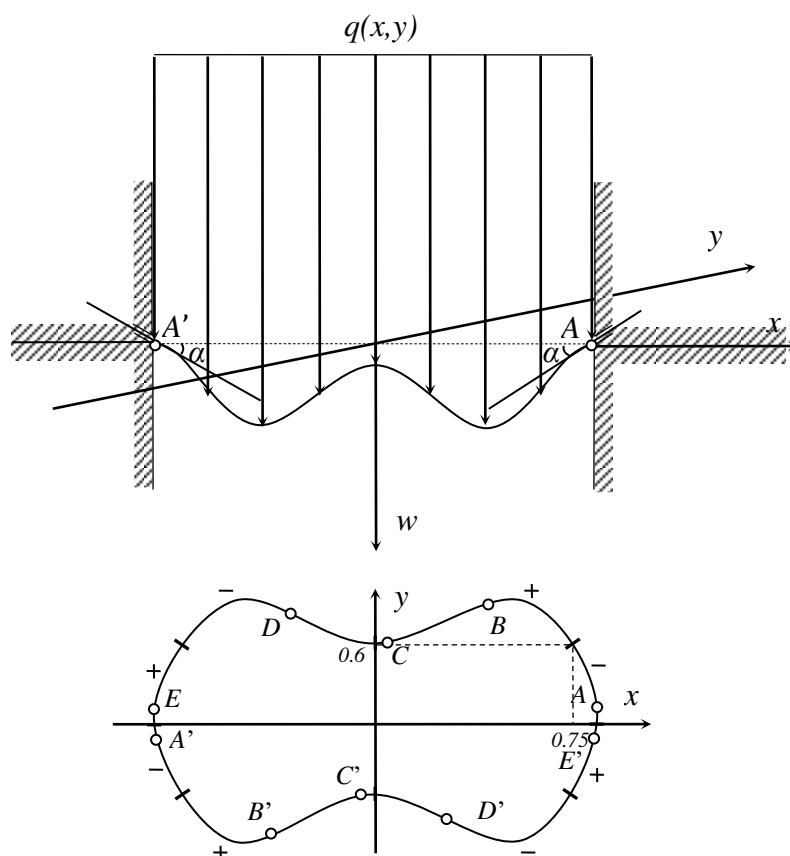


Рис. 3. Оптимальні кути кріплення пластини форми овал Касіні

Значення тангенсів кутів кріплення близькі до нуля, при цьому сума прогинів точок пластини зменшується до  $I(w^{26}, \psi^{26}(x; y)) = 9.44\text{E} - 5$ (рис. 3).

**Висновок.** Сформульована математична постановка задачі оптимального граничного керування для неоднорідного бігармонічного рівняння. Вказані основні етапи її розв'язання, а саме обґрунтування достовірності і єдності розв'язку, аналіз функціоналу якості, знаходження похідної Фреше, застосування градієнтного методу та розв'язування модельних задач, а також зроблені відповідні посилання.

Важливо, що в цій статті метод проілюстрований конкретним фізичним прикладом для пластин складної форми. Розрахунки параметрів кріплення в різних граничних точках таких пластини відповідають уявленням про фізичну картину процесу, а симетрія отриманих результатів для пластин відповідної форми у випадку рівномірного навантаження є додатковим підтвердженням вірогідності наведених розрахунків.

#### Бібліографічні посилання

1. **Васильев, Ф. П.**, Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 550с.
2. **Волошко, В.Л.** Оптимальне граничне керування параметрами неоднорідного бігармонічного рівняння. Обґрунтування методу розв'язування задачі [Текст] : зб. наук.пр. / В.Л.Волошко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д., 2017. – С. 25 – 32.
3. **Кісельова, О. М.** Чисельні методи оптимізації [Текст] / О. М. Кісельова, А. Є. Шевельова. – Д.: Видавництво ДНУ, 2008. – 212с.
4. **Кісельова, О. М.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми [Текст] / О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк, Л. В. Волошко // «Вісник ДНУ», серія «Моделювання». – 2011. – Вип. 3. – №8. – С. 20 – 28.
5. **Киселева, Е. М.** Решение задачи оптимального граничного управления для неоднорідного бигармонического уравнения [Текст] / Е. М. Киселева, Л. В. Волошко // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №4. С. 58–68.
6. **Лебедев, Н. Н.** Сборник задач по математической физике [Текст] / Н. Н.Лебедев, И. П.Скальская, Я. С.Уфлянд. – М.: Гос. изд-тво тех.-теор. лит., 1955. – 421с.

*Надійшла до редколегії 02.10.2018.*