УДК 519.8 doi: 10.15421/321804

Л.Л. Гарт
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛА

Досліджено проекційно-ітераційні процеси, засновані на методі умовного градієнта, для розв'язання задачі мінімізації функціонала в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі. Доведено збіжність за функціоналом, а в разі сильно опуклого функціонала – й за аргументом, декількох обчислювальних схем проекційно-ітераційного методу при різних способах вибору крокового множника. Отримано оцінки похибки та швидкості збіжності.

Ключові слова: функціонал, множина, простір, задача мінімізації, послідовність, метод умовного градієнта, проекційно-ітераційний метод, збіжність, оцінка, похибка.

Исследованы проекционно-итерационные процессы, основанные на методе условного градиента, для решения задачи минимизации функционала в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Доказана сходимость по функционалу, а в случае сильно выпуклого функционала – и по аргументу, нескольких вычислительных схем проекционно-итерационного метода при различных способах выбора шагового множителя. Получены оценки погрешности и скорости сходимости.

Ключевые слова: функционал, множество, пространство, задача минимизации, последовательность, метод условного градиента, проекционно-итерационный метод, сходимость, оценка, погрешность.

We study projection-iterative processes based on the conditional gradient method to solve the problem of minimizing a functional in a real separable Hilbert space.

To solve extremal problems, methods of approximate (projection) type are often used, which make it possible to replace the initial problem by a sequence of auxiliary approximating extremal problems. The work of many authors is devoted to the problems of approximating various classes of extremal problems. Investigations of projection and projection-iteration methods for solving extremal problems with constraints in Hilbert and reflexive Banach spaces were carried out, in particular, in the works of S.D. Balashova, in which the general conditions for approximation and convergence of sequences of exact and approximate solutions of approximating extremal problems considered both in subspaces of the original space and in certain spaces isomorphic to them were proposed.

The projection-iterative approach to the approximate solution of an extremal problem is based on the possibility of applying iterative methods to the solution of approximating problems. Moreover, for each of the "approximate" extremal problems, only a few approximations are obtained with the help of a certain iteration method and the last of them as the initial approximation for the next "approximate" problem is used.

This paper, in continuation of the author's past work to solve the problem of minimizing a functional on a convex set of Hilbert space, is devoted to obtaining theoretical estimates of the rate of convergence of the projection-iteration method based on the conditional gradient method (for different ways of specifying a step multiplier) of minimization of approx

imating functionals in certain spaces isomorphic to subspaces of the original space. We prove theorems on the convergence of a projection-iteration method and obtain estimates of error and convergence degree.

Keywords: functional, set, space, minimization problem, sequence, conditional gradient method, projection-iteration method, convergence, estimate, error.

Вступ. Ітераційні і проекційні (апроксимаційні) методи складають два найважливіших класи чисельних процедур, які застосовуються для побудови розв'язків різних задач, що виникають в теорії керування і оптимізації [1]. Правильно побудована апроксимація екстремальної задачі задачами більш простої природи дозволяє отримати змістовні результати якісного і кількісного характеру про досліджуваний процес. Основи теорії і методів апроксимації та стійкості екстремальних задач закладені в працях П.-Ж. Лорана, Ю. М. Єрмольєва, А. М. Тихонова, В. В. Васина, М. М. Потапова, А. Дончева, В. В. Петрішина, Б. Ш. Мордуховича та багатьох інших авторів. Перші результати із загальних умов збіжності за функціоналом, в тому числі для скінченно-різницевих апроксимацій екстремальних задач були отримані в роботах Б. М. Будака, Б. М. Берковича, Є. М. Соловьової [2]. Для збіжності апроксимаційних методів за аргументом використовувався метод регуляризації А. М. Тихонова. Основам теорії ітераційних методів і алгоритмів оптимізації присвячені відомі роботи Ж. Сеа, Е. Полака, Б. М. Пшеничного, Ю. М. Даниліна, Ф. П. Васильєва та багатьох інших вчених. Складність та ефективність методів оптимізації вивчалась в роботах А. С. Немировського, Д. Б. Юдина, М. М. Кузюрина, С. А. Фоміна.

Проекційні та проекційно-ітераційні методи розв'язання екстремальних задач в гільбертових і рефлексивних банахових просторах, засновані на базовій ідеї С. Д. Балашової, досліджувалися в роботах [3-10]. Стосовно задачі

$$F(u) \to \inf\ , \quad u \in \Omega , \tag{1}$$

мінімізації обмеженого знизу функціоналу $F(u)$ на множині Ω дійсного сепарабельного гільбертова простору H ця ідея полягає в тому, що задача (1) замінюється деякою послідовністю апроксимуючих її екстремальних задач

$$F_n(u_n) \to \inf\ , \quad u_n \in \Omega_n , \quad n = 1, 2, ..., \tag{2}$$

заданих на множинах $\Omega_n = \Omega \cap H_n$ із підпросторів H_n вихідного простору $(H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n \subset ... \subset H)$. Для кожної з «наближених» екстремальних задач (2) знаходиться за допомогою деякого ітераційного методу лише кілька наближень $u_n^{(k)} \in \Omega_n$, $k = 1, 2, ..., k_n$, останнє з яких обирається за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної, $(n+1)$-ої задачі. Послідовність наближень $\{u_n^{(k_n)}\}$ оголошується мінімізуючою послідовністю для вихідного функціоналу $F(u)$ на множині $\Omega \subset H$, а також послідовністю наближень до точки u^* мінімуму $F(u)$ на Ω (якщо така точка існує). Отримано загальні умови апроксимації і збіжності за функціоналом (а у випадку сильно опуклого функціоналу $F(u)$ на Ω – й за аргументом) проекційного і деяких проекційно-ітераційних методів розв'язання задачі (1), в тому числі безумовної мінімізації ($\Omega = H$) при проектуванні як у підпростори вихідного простору, так і в деякі простори, ізоморфні ним. Побудовано проекційні варіанти градієнтних методів (проекції градієнту [6], умовного градієнту [3], спряжених градієнтів [7]), методів релаксації та Ньютона [4] в дійсних сепарабельних гільбертових просторах. У той же час недослідженими залишились питання стійкості та швидкості збіжності проекційно-ітераційних методів розв'язання задачі (1), можливості побудування регуляризуючих проекційно-ітераційних методів розв'язання некоректних екстремальних задач у функціональних просторах.

Постановка задачі. Нехай на деякій множині Ω дійсного сепарабельного гільбертова простору H заданий обмежений знизу функціонал $F(u)$:

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = F^* > -\infty . \tag{3}$$

Розглянемо задачу (1) мінімізації $F(u)$ на Ω, розуміючи під цим такі питання [11]: 1) знайти $F^* = \inf_{u\in\Omega} F(u)$; 2) вказати мінімізуючу послідовність $\{u^{(k)}\} \subset \Omega$, для якої $\lim_{k\to\infty} F(u^{(k)}) = F^*$, або ж, якщо це можливо, знайти точку $u^* \in \Omega$ з властивістю $F(u^*) = F^*$ (точку мінімуму $F(u)$ на Ω).

Для розв'язання задачі (1), як зазначалось вище, розроблено і досліджено на збіжність значну кількість проекційно-ітераційних методів, які дозволяють за певних умов будувати на Ω послідовності $\{u_n^{(k_n)}\}$, що є мінімізуючими для $F(u)$ або збігаються до точці мінімуму $u^* \in \Omega$. Частина з цих методів придатна для пошуку мінімуму функціонала на всьому просторі H, частина – на обмежених множинах Ω, а деякі методи нескладно пристосувати до пошуку мінімуму як при $\Omega = H$, так і при $\Omega \neq H$, причому множина Ω може бути обмежена або необмежена.

В даній роботі досліджуються декілька обчислювальних схем проекційно-ітераційного методу розв'язання задачі (1), основаного на методі умовного градієнту, при різних способах вибору крокового множника. За певних припущень доводиться збіжність відповідних послідовностей наближень за функціоналом і за аргументом та одержуються оцінки швидкості збіжності.

Метод розв'язання. *Проекційно-ітераційна реалізація методу умовного градієнту в гільбертовому просторі*. Для наближеного розв'язання задачі (1) апроксимуємо функціонал $F(u)$ послідовністю більш простих «наближених» функціоналів $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, заданих відповідно на деяких множинах $\tilde{\Omega}_n$ дійсних гільбертових просторів $\tilde{H}_n$. Будемо вважати, що простори $\tilde{H}_n$ ізоморфні підпросторам H_n вихідного простору H і Φ_n – лінійні неперервно оборотні оператори, які здійснюють взаємно однозначне відображення H_n на $\tilde{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причому Φ_n рівномірно по n обмежені, тобто

$$\|\Phi_n\| \le C', \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

Φ_n^{-1} – оператори оборотного відображення $\tilde{H}_n$ на H_n. В цьому випадку множини $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ мають вигляд

$$\tilde{\Omega}_n = \{\, \tilde{u}_n \in \tilde{H}_n : \ \tilde{u}_n = \Phi_n u_n, \ u_n \in \Omega_n = \Omega \cap H_n \}, \ n = 1, 2, \ldots; \ \tilde{\Omega}_1 \ne \varnothing. \tag{5}$$

Будемо припускати надалі, що функціонали $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ пов'язані з вихідним функціоналом $F(u)$ умовою близькості

$$\left| \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) \right| \le \tilde{\beta}_n, \quad \forall\, \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n, \tag{6}$$

де $\tilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$, а множини $\tilde{\Omega}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ пов'язані з Ω умовою

$$\forall\, u \in \Omega \quad \exists \{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}, \ \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n : \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n = u\,. \tag{7}$$

З умов (6) і (3), зокрема, виходить співвідношення

$$F^* - \tilde{\beta}_n \le F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) - \tilde{\beta}_n \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n), \quad \forall\, \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

звідки випливає обмеженість знизу кожного з наближених функціоналів $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на відповідній множині $\tilde{\Omega}_n$: $\inf\limits_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = \tilde{F}_n^* > -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

Будемо розглядати задачі мінімізації:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \to \inf\,, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Збіжність в H проекційного методу розв'язання задачі (1) встановлює

Теорема 1 [10]. *Нехай Ω – обмежена замкнена опукла множина з гільбертова простору H, $\tilde{\Omega}_n$ – множина виду (5) з гільбертова простору $\tilde{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, пов'язана з Ω умовою (7). Нехай виконується умова (3), функціонали $F(u)$ і $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ опуклі і неперервні на Ω і $\tilde{\Omega}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ відповідно і задовольняють умову близькості (6). Тоді при кожному $n = 1, 2, \ldots$ функціонал $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ досягає на $\tilde{\Omega}_n$ своєї нижньої грані і для будь-яких $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$ ($\tilde{M}_n^*$ – множина точок мінімуму $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) = F^*$. При цьому будь-яка послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімізуючою для $F(u)$ на Ω і кожна її слабка гранична точка є точкою мінімуму $F(u)$ на Ω, а у разі єдиності точки мінімуму до неї слабко збігається вся послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$.*

Нехай надалі Ω – опукла замкнена обмежена множина в гільбертовому просторі H і $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ – пов'язані з нею множини виду (5). При доведенні теореми 1 було показано, що з обмеженості, замкненості і опуклості в H множини Ω випливає обмеженість, замкненість і опуклість в $\tilde{H}_n$ множини $\tilde{\Omega}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Припустимо, що при кожному $n = 1, 2, \ldots$

наближений функціонал $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ неперервно диференційований за Фреше на $\widetilde{\Omega}_n$.

Для розв'язання задачі (1) мінімізації $F(u)$ на Ω будемо застосовувати до кожної з наближених задач (9) ітераційний метод умовного градієнту [11], причому будемо будувати лише кілька наближень $\widetilde{u}_n^{(k)}$ ($k = 1,2,\dots,k_n$, $k_n \le K$, $K \in \mathbb{N}$), останнє з яких будемо використовувати за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної наближеної задачі.

За початкове наближення в проекційно-ітераційному процесі візьмемо деякий елемент $\widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1$. Дотримуючись [11], якщо вже відомо наближення $\widetilde{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$ ($k = 0, 1, \dots, k_n - 1$; $n = 1, 2, \dots$), то беремо головну лінійну частину

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) \equiv (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)})_{\widetilde{H}_n}, \quad \widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$$

прирощення $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) = (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)})_{\widetilde{H}_n} + o(\| \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)} \|_{\widetilde{H}_n})$ і визначаємо допоміжне наближення $\overline{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$ з умови

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)})_{\widetilde{H}_n}. \tag{10}$$

Такий елемент $\overline{u}_n^{(k)}$ на опуклій замкненій обмеженій множині $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$ для лінійного (і тим більше, опуклого) неперервного функціонала $\widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n)$ існує на підставі узагальненої теореми Вейерштраса [11]. При цьому, вочевидь,

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) \le \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n^{(k)}) = 0. \tag{11}$$

Якщо виявиться, що $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = 0$ при деякому $k \le k_n$, то з урахуванням (10) для всіх $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ матимемо $(\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)})_{\widetilde{H}_n} \ge 0$, звідки випливає, що елемент $\widetilde{u}_n^{(k)}$ задовольняє необхідну умову мінімуму функціонала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на множині $\widetilde{\Omega}_n$ [11]. В цьому випадку ітерації для $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$ припиняються і для з'ясування того, чи буде $\widetilde{u}_n^{(k)}$ точкою мінімуму $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$, а елемент $\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ – точкою мінімуму функціонала $F(u)$ на множині Ω, потрібні додаткові дослідження поведінки цих функціоналів в околі зазначених точок. Зокрема, якщо функціонал $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ опуклий на $\widetilde{\Omega}_n$ і $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = 0$, то $\widetilde{u}_n^{(k)}$ справді буде точкою мінімуму $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$. Якщо ж елемент $\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ не є точкою мінімуму функціонала $F(u)$ на Ω, то слід покласти $\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ (зрозуміло, що $\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_{n+1}$) і продовжити ітерації вже для наступного наближеного функціонала $\widetilde{F}_{n+1}(\widetilde{u}_{n+1})$ на множині $\widetilde{\Omega}_{n+1}$. Надалі вважатимемо, що $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) < 0$. Тоді завідомо $\overline{u}_n^{(k)} \ne \widetilde{u}_n^{(k)}$ і за наступне наближення відповідно до формул методу умовного градієнту можна прийняти [3]

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} + \widetilde{\alpha}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1; \tag{12}$$
$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1,$$

де $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ $(0 \le \widetilde{\alpha}_n^{(k)} \le 1)$ – кроковий множник, який вибирається з однієї із таких умов.

Умова А. $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ доставляє мінімум дійсній функції [12]

$$\widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min_{0 \le \widetilde{\alpha}_n \le 1} \widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n), \quad \widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n) \equiv \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)} + \widetilde{\alpha}_n(\overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)}); \tag{13}$$

Умова Б. $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ задовольняє нерівність [13]

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k+1)}) \ge \widetilde{\varepsilon}_n\, \widetilde{\alpha}_n^{(k)} \left| \widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) \right|, \quad 0 \le \widetilde{\alpha}_n^{(k)} \le 1, \tag{14}$$

де $\widetilde{\varepsilon}_n$ – параметр алгоритму, $0 < \widetilde{\varepsilon}_n < 1$;

Умова В. Якщо градієнт $\widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n)$ задовольняє на $\widetilde{\Omega}_n$ умову Ліпшиця

$$\left\| \widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n) - \widetilde{F}'_n(\widetilde{v}_n) \right\| \le L \left\| \widetilde{u}_n - \widetilde{v}_n \right\|_{\widetilde{H}_n}, \quad \forall\, \widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n \in \widetilde{\Omega}_n,\ n = 1, 2, \ldots,\ L > 0, \tag{15}$$

то $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ визначається так [13]:

$$\widetilde{\alpha}_n^{(k)} = \widetilde{\gamma}_n^{(k)} \widetilde{\eta}_n^{(k)}, \tag{16}$$

де $\widetilde{\eta}_n^{(k)} = \min\{\, 1;\ |\, \widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) \,| \big/ \|\, \overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)} \,\|_{\widetilde{H}_n}^2 \,\}$, $\widetilde{\delta}_n \le \widetilde{\gamma}_n^{(k)} \le 2(1 - \widetilde{\varepsilon}_n)/L$, $\widetilde{\varepsilon}_n$ і $\widetilde{\delta}_n$ – параметри алгоритму, $0 < \widetilde{\delta}_n \le 2(1 - \widetilde{\varepsilon}_n)/L$, $0 < \widetilde{\varepsilon}_n < 1$.

В силу опуклості $\widetilde{\Omega}_n$ ітераційне наближення $\widetilde{u}_n^{(k+1)}$, що визначається за формулою (12), вочевидь, належить $\widetilde{\Omega}_n$ при всіх $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$.

Розглянемо питання про збіжність і оцінку швидкості збіжності різних варіантів проекційно-ітераційного процесу (10), (12) для задачі (1) в залежності від умови вибору крокового множника $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$.

Вибір крокового множника з умови А. Нехай $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ в процесі (10), (12) вибирається з умови (13) (умови А). При такому виборі $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ послідовність $\{\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ не зростає, так як $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) = \widetilde{g}_n^{(k)}(0) \ge \widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n^{(k)}) = \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k+1)})$, $k = 0, 1, \ldots$. Для визначення $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ можуть бути використані відомі методи одновимірної мінімізації [11].

Теорема 2 [3]. *Нехай функціонал $F(u)$ визначений на опуклій замкненій обмеженій множині Ω гільбертова простору H, а функціонал $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ – на множині $\widetilde{\Omega}_n$ виду (5) гільбертова простору $\widetilde{H}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), причому виконані умови (3), (6) і $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\beta}_n < \infty$. Нехай при кожному $n = 1, 2, \ldots$ $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \in C^1(\widetilde{\Omega}_n)$ і градієнт $\widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n)$ задовольняє на $\widetilde{\Omega}_n$ умову Ліпшиця (15). Тоді послідовність наближень $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $k_n \le K$, яка визначається згідно з* *умовами (10), (12), (13) при* $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_n^2 < \infty$, *існує і* $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}),\ \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \to 0,\ n \to \infty$ *для всіх* $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ *при будь-якому виборі* $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$.

Позначимо через $D = \sup\limits_{u,v \in \Omega} \|u - v\|_H$ і $\tilde{D}_n = \sup\limits_{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}$ діаметри множин $\Omega \subset H$ і $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ відповідно. Оскільки Ω і $\tilde{\Omega}_n$ обмежені, то $D < \infty$, $\tilde{D}_n < \infty$ і, крім того, для $\tilde{D}_n$ з урахуванням (4), (5) справедлива оцінка

$$\tilde{D}_n = \sup_{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n} = \sup_{u_n, v_n \in \Omega_n} \|\Phi_n u_n - \Phi_n v_n\|_{\tilde{H}_n} \le C'D, \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (17)$$

Теорема 3. *Нехай зберігають силу всі умови теореми 2. Нехай, крім того, виконано (7), функціонали* $F(u)$ *і* $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *опуклі на* $\Omega \subset H$ *і* $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *відповідно і* $F(u) \in C(\Omega)$. *Нехай* $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ *вибрано довільно і послідовність* $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $k_n \le K$ *визначена згідно з умовами (10), (12), (13), причому* $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_n^2 < \infty$. *Тоді для всіх* $k = 1, 2, \ldots, k_n$ *існує* $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$, *послідовність* $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *є мінімізуючою для* $F(u)$ *на* Ω *і будь-яка її слабка гранична точка є точкою мінімуму* $F(u)$ *на* Ω, *причому в разі єдиності точки мінімуму до неї слабко збігається вся послідовність* $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. *Якщо до того ж, починаючи з деякого* $n = N > 1$, *число ітерацій* k_n *задовольняє умову*

$$k_n \le 2LC'^2 D^2, \qquad (18)$$

то справедлива оцінка

$$0 \le a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le \sigma_n, \qquad n \ge N, \qquad (19)$$

де $\sigma_n = M \prod\limits_{j=N+1}^{n} q_j + 2 \sum\limits_{i=N+2}^{n+1} (\tilde{\beta}_{i-1} + \tilde{\beta}_{i-2}) \prod\limits_{j=i}^{n} q_j$, $M > 0$ *– стала, яка не залежить від* n, $q_n = 1 - 4\,\bar{\theta}_n (2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) k_n \big/ (2LC'^2 D^2)$, $0 < \bar{\theta}_n < 1$, $\zeta_n \le 2\tilde{\beta}_{n-1}$, $L > 0$ *і* $C' > 0$ *визначені в (15) і (4) відповідно,* D *– діаметр множини* Ω.

Д о в е д е н н я. Нехай u^* – точка мінімуму $F(u)$ на $\Omega \subset H$, $\tilde{u}_n^*$ – точка мінімуму $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ ($u^* \in M^*$, $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$; M^* і $\tilde{M}_n^*$ – множини точок мінімуму $F(u)$ на Ω і $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$ відповідно).

Для опуклого функціонала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$ на опуклій множині $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ з урахуванням (10) можна отримати [11]:

$$0 \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^*)_{\tilde{H}_n} =$$
$$= -\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^*) \le -\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1,$$

тому

$$\left|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})-F^*\right|\le\left|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)\right|+\left|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)-F^*\right|\le$$
$$\le-\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)})+\left|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)-F^*\right|,\quad k=1,2,...,k_n,\ \ n=1,2,.... \quad (20)$$

Так як при $n\to\infty$ $\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)})\to 0$ для зазначених k в силу теореми 2, а $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)-F^*\to 0$ для будь-яких $\tilde{u}_n^*\in\tilde{M}_n^*$ в силу теореми 1, то, переходячи в останній нерівності до границі, отримуємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})=F^*,\ k=1,2,...,k_n$.

Далі, використовуючи (6) і (20), матимемо

$$0\le F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})-F^*=F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})+\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})-F^*\le$$
$$\le-\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})+\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)-F^*+\tilde{\beta}_n,\quad n=1,2,..., \quad (21)$$

звідки при $n\to\infty$ випливає граничне співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty}F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})=F^*$, тобто $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – мінімізуюча послідовність для функціонала $F(u)$ на Ω.

В силу слабкої компактності множини Ω, послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ має хоча б одну слабку граничну точку $v^*\in\Omega$, яка є слабкою границею деякої підпослідовності $\{\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}\}_{i=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{i\to\infty}(f,\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})_H=(f,v^*)_H$, $\forall f\in H$, а оскільки функціонал $F(u)$ слабко напівнеперервний знизу на Ω, то

$$F^*=\lim_{n\to\infty}F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})=\lim_{i\to\infty}F(\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})\ge\varliminf_{i\to\infty}F(\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})\ge F(v^*)\ge F^*,$$

тобто $F(v^*)=F^*$. Якщо $F(u)$ досягає свого мінімуму в єдиній точці $u^*\in\Omega$, то вся послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається до u^*:

$$\lim_{n\to\infty}(f,\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})_H=\lim_{i\to\infty}(f,\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})_H=(f,u^*)_H,\quad\forall f\in H.$$

Доведемо оцінку (19). Так як

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})=\tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)})\le\tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n)=\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}+\tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}))$$

для всіх $\tilde{\alpha}_n$, $0\le\tilde{\alpha}_n\le 1$, то, користуючись результатом леми 2.1.1 із [11]

$$\tilde{F}_n(\tilde{v}_n)-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)\le-(\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n),\ \tilde{u}_n-\tilde{v}_n)_{\tilde{H}_n}+\frac{L}{2}\|\tilde{u}_n-\tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}^2,\quad\forall\,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n\in\tilde{\Omega}_n \quad (22)$$

при $\tilde{u}_n=\tilde{u}_n^{(k)}$, $\tilde{v}_n=\tilde{u}_n^{(k)}+\tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)})$, $0\le k\le k_n-1$, а також оцінками (11), (17), отримаємо співвідношення

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\le\tilde{\alpha}_n(\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}),\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n}+\frac{L}{2}\tilde{\alpha}_n^2\|\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2\le$$
$$\le-\tilde{\alpha}_n\,|\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,|+LC'^2D^2\tilde{\alpha}_n^2/2,\quad 0\le\tilde{\alpha}_n\le 1,\ 0\le k\le k_n-1.$$

З урахуванням цього матимемо для довільного $n>1$:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})=\sum_{k=0}^{k_n-1}\left(\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\right)+\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\le$$

$$\le -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| + LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + |\,\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\,|,$$

а оскільки в силу умови близькості (6) і другої частини формули (12)

$$|\,\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\,| \le |\,\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(0)})\,| + |\,F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(0)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\,| +$$
$$+ |\,F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\,| \le \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1,$$

то для зазначених $n > 1$ матимемо:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| + LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}.$$

Тоді з використанням (6) можна отримати

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) -$$
$$- \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| +$$
$$+ LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1. \tag{23}$$

Оскільки, за теоремою 2, $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}),\ \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \to 0$, $n \to \infty$ при всіх $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$, то знайдеться число $n = N_0 > 1$, починаючи з якого величина $\bar{\alpha}_n = \sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| \Big/ (LC'^2 D^2 k_n)$ задовольнятиме умову $0 \le \bar{\alpha}_n \le 1$. Тоді мінімальне значення функції

$$LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 - \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}$$

змінної $\tilde{\alpha}_n$ при $-\infty < \tilde{\alpha}_n < +\infty$, яке досягається при $\tilde{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n$, збігатиметься з мінімальним її значенням на відрізку $0 \le \tilde{\alpha}_n \le 1$ при всіх $n \ge N_0$. Тому, покладаючи в оцінці (23) $\tilde{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n$, отримаємо для всіх $n \ge N_0$:

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\left(\sum_{k=0}^{k_n-1} |\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,|\right)^2 \Big/ (2LC'^2 D^2 k_n) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}.$$

Так як $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \to 0$ з ростом k, то за умови $|\,\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\,| \ge |\,\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})\,|$, $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ матимемо для всіх $n \ge N_0$:

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -k_n\,|\,\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})\,|^2 / (2LC'^2 D^2) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1},$$

або, приймаючи позначення

$$a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*, \quad \rho_n = k_n / (2LC'^2 D^2), \tag{24}$$
$$a_n - a_{n-1} \le -\rho_n\,|\,\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})\,|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \ge N_0.$$

Далі, при кожному $n = 1, 2, \ldots$ з (8) маємо: $F^* - \tilde{\beta}_n \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)$, $\forall\, \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$. З іншого боку, для будь-яких $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$ і $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$ з урахуванням (6) виходить:

$$0 \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) = \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le$$
$$\le \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*).$$

Звідси випливає, що $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)$, так що має силу співвідношення

$$F^* - \tilde{\beta}_n \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n), \quad \forall\, \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*,\ \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n,\ \ n = 1, 2, \ldots,$$

на підставі якого

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \le \tilde{\beta}_n + \zeta_n, \quad \forall\, \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*,\ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

де $\zeta_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{v}_n) - F^*$ ($\tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ – послідовність, пов'язана з u^* співвідношенням $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{-1}\tilde{v}_n = u^*$, так що $\zeta_n \to 0$, $n \to \infty$). Тоді з (21) маємо

$$|\,\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})\,| \ge a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

тому

$$a_{n-1} - a_n \ge \rho_n (a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n)^2 - 2\tilde{\beta}_n - 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \ge N_0,$$

або

$$\rho_n (a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n)^2 + (a_n - 2\tilde{\beta}_n) - (a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1}) \le 0, \quad n \ge N_0.$$

Якщо $\zeta_n \le 2\tilde{\beta}_{n-1}$ ($n \ge N_0$), то розв'язання останньої нерівності відносно a_n з урахуванням того, що $a_n \ge 0$, дає

$$0 \le a_n \le (-1 + \sqrt{\Delta_n})\big/(2\rho_n) + 2\tilde{\beta}_n + \zeta_n, \qquad n \ge N_0, \tag{27}$$

де $\Delta_n = 1 + 4\rho_n (a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$.

Застосуємо узагальнену формулу біному Ньютона для оцінки $\sqrt{\Delta_n}$ в (27). Позначимо через $z_n = 4\rho_n (a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$, так що $\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2}$, $n \ge N_0$. Оскільки, $a_n \to 0$, $\tilde{\beta}_n \to 0$, $\zeta_n \to 0$ ($n \to \infty$), то знайдеться число $N \ge N_0$ таке, що при всіх $n \ge N$ будуть виконані одночасно умова (18) і нерівність

$$0 \le a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n \le 1/4, \tag{28}$$

Тоді для вказаних n, згідно з (18), (24), буде $\rho_n \le 1$ і, як наслідок з цього і (28), $z_n \le 1$, що гарантує [14] при будь-якому значенні r збіжність ряду

$$(1 + z_n)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (r - j)\, z_n^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{i!}\, z_n^i + R_n^{(m)}(z_n),$$

де $R_n^{(m)}(z_n) = \dfrac{r(r-1)\ldots(r-m)}{m!}\, z_n^{m+1} \left(\dfrac{1-\theta_n}{1+\theta_n z_n} \right)^m (1+\theta_n z_n)^{r-1}$ – залишковий член ряду при даному $m \ge 0$; $0 < \theta_n < 1$, $n \ge N$. Представимо $\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2}$ у вигляді суми двох членів зазначеного ряду та його залишкового члену:

$$\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} z_n + R_n^{(1)}(z_n) = 1 + \frac{1}{2} z_n - \frac{1}{4} z_n^2 \frac{1-\theta_n}{\sqrt{(1+\theta_n z_n)^3}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} z_n - \frac{1}{4} \bar{\theta}_n z_n^2, \quad \bar{\theta}_n = \frac{1-\theta_n}{\sqrt{(1+\theta_n z_n)^3}}, \ \ 0 < \bar{\theta}_n < 1, \ \ n \ge N.$$

Тоді формула (27) для $n \ge N$ набуде вигляду

$$0 \le a_n \le \frac{1}{2\rho_n}\left(\frac{1}{2}z_n - \frac{1}{4}\bar{\theta}_n z_n^2\right) + 2\tilde{\beta}_n + \zeta_n = a_{n-1} - 2\bar{\theta}_n\rho_n(a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)^2 + 2\tilde{\beta}_n +$$

$$+ 2\tilde{\beta}_{n-1} \le a_{n-1} - 4\,\bar{\theta}_n\rho_n a_{n-1}(2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} = q_n a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1},$$

де $q_n = 1 - 4\,\bar{\theta}_n\rho_n(2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$, а з того, що $0 < 4\bar{\theta}_n\rho_n(2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) \le \bar{\theta}_n z_n < 1$, $n \ge N$, випливає, що $0 < q_n < 1$ для всіх зазначених n.

З урахуванням цього отримаємо:

$$0 \le a_n \le q_n a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} \le q_n q_{n-1} a_{n-2} + 2q_n(\tilde{\beta}_{n-1} + \tilde{\beta}_{n-2}) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} \le \ldots \le$$

$$\le a_N \prod_{j=N+1}^{n} q_j + 2\sum_{i=N+2}^{n+1}(\tilde{\beta}_{i-1} + \tilde{\beta}_{i-2})\prod_{j=i}^{n} q_j, \quad n \ge N.$$

Користуючись теоремою 6.2.3 із [11] про збіжність методу умовного градієнту для задачі мінімізації (9), знаходимо при $n = N$:

$$0 \le a_N = F(\Phi_N^{-1}\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) + \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* + \tilde{F}_N^* - F^* \le$$

$$\le \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* + 2\tilde{\beta}_N + \zeta_N \le B/k_N + 2\tilde{\beta}_N + \zeta_N = M, \quad \tilde{k}_N < k_N \le 2LC'^2D^2,$$

де $B = \max\{2LC'^2D^2;\ \tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{N}}(\tilde{u}_N^{(0)}) - \tilde{F}_N^*\}(\tilde{k}_N + 1)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{N}}^* = \inf_{\tilde{u}_N \in \tilde{\Omega}_N} \tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{N}}(\tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}})$, $\tilde{u}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$, $\tilde{k}_N \ge 1$ – номер ітерації, починаючи з якого $\alpha_N = |\tilde{F}_N^{(k)}(\bar{u}_N^{(k)})| / (LC'^2D^2)$ задовольняє умову $0 \le \alpha_N < 1$. Таким чином, справедливість оцінки (19) встановлена. Якщо до того ж $0 < q_n \le q < 1$ для всіх $n \ge N$, то в (19) $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доведена. ■

На практиці при розв'язуванні задач мінімізації виду (1) обмеження (18) на вибір чисел k_n може виявитись занадто жорстким і навіть нездійсненним. В зв'язку з цим корисною може бути така оцінка швидкості збіжності проекційно-ітераційного процесу (10), (12) (13), яка, хоча і буде, можливо, завищеною в порівнянні з (19), але не потребуватиме додаткових обмежень на вибір k_n і на швидкість збіжності $\{F(\Phi_n^{-1}\tilde{v}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ до F^*.

Теорема 4 [8]. *Нехай виконуються всі умови теореми 3, за винятком (18). Тоді справедлива оцінка*

$$0 \le a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le \sigma_n, \quad n \ge 1, \tag{29}$$

де $\sigma_n = M\prod_{j=2}^{n} q_j + \sum_{i=2}^{n}\tilde{\alpha}_i k_i(\zeta_i + LC'^2D^2\tilde{\alpha}_i/2)\prod_{j=i}^{n} q_j + 4\sum_{i=2}^{n-1}\tilde{\beta}_i\prod_{j=i+1}^{n} q_j + 2\tilde{\beta}_n$, $n > 1$;

$\sigma_1 = B/k_1 + 2\tilde{\beta}_1 + \zeta_1$; $q_n = 1/(1 + \tilde{\alpha}_n k_n)$, $0 < \alpha \le \tilde{\alpha}_n \le 1$; ζ_n *даються в (25);* $M > 0$, $B > 0$ *– сталі, які не залежать від* n; $L > 0$ *і* $C' > 0$ *визначені в (15) і (4) відповідно,* D *– діаметр множини* Ω.

В умовах теореми 3 може бути також отримана оцінка, яка характеризує швидкість збіжності послідовності $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$ до F^*. А саме, з першої частини співвідношення (21) з урахуванням (6) і (19) (або (29)) випливає:

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \le |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})| + |F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \le \sigma_n + \tilde{\beta}_n. \tag{30}$$

Теорема 5 [8]. *Нехай виконуються всі умови теореми 2, за винятком (3), і умова (7). Нехай, крім того, функціонал $F(u)$ неперервний і сильно опуклий на $\Omega \subset H$, а функціонали $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ опуклі на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ відповідно. Тоді послідовність $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, де $\tilde{u}_n^{(k_n)}$ визначаються згідно з умовами (10), (12), (13) і $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^2 < \infty$, збігається до єдиної точки u^* мінімуму $F(u)$ на Ω за нормою простору H при будь-якому $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ і справедлива оцінка*

$$\| \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} - u^* \|_H^2 \le 2\sigma_n / \chi, \quad n \ge 1,$$

де $\sigma_n \ge 0$ визначено в (19) (або в (29)), $\chi > 0$ − стала з умови сильної опуклості $F(u)$ на Ω.

Вибір крокового множника з умов Б і В. Нехай при розв'язанні задачі мінімізації (1) в проекційно-ітераційному процесі (10), (12) $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ вибирається з умови (14) (умови Б). Нижче буде показано, що при деяких обмеженнях на функціонали $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ такий вибір $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ можливий. На практиці спочатку обирають $\tilde{\alpha}_n^{(k)} = 1$ і перевіряють умову (14). Якщо вона виконана, то залишають $\tilde{\alpha}_n^{(k)} = 1$; якщо ж ні, то здійснюють дроблення $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ до тих пір, поки не виконається (14), намагаючись при цьому зупинитися на значенні $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$, по можливості близькому до одиниці [11].

Теорема 6 [9]. *Нехай функціонал $F(u)$ визначений на опуклій замкненій обмеженій множині Ω гільбертова простору H, а функціонал $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ − на множині $\tilde{\Omega}_n$ виду (5) гільбертова простору $\tilde{H}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), причому виконані умови (3), (6) і $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n < \infty$. Нехай при кожному $n = 1, 2, \ldots$ $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$ і градієнт $\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n)$ задовольняє на $\tilde{\Omega}_n$ умову Ліпшиця (15). Тоді послідовність наближень $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $k_n \le K$, яка визначається відповідно до умов (10), (12), (14), існує і $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \to 0$, $n \to \infty$ ($k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$) при будь-якому виборі $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$.*

Теорема 7. *Нехай зберігають силу всі умови теореми 6. Нехай, крім того, виконана умова (7), функціонали $F(u)$ і $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $\mathrm{n} = 1, 2, \ldots$ опуклі на $\Omega \subset H$ і $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $\mathrm{n} = 1, 2, \ldots$ відповідно і $F(u) \in C(\Omega)$. Нехай $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ вибрано довільно і послідовність $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathrm{k_n} \le K$ визначена відповідно до умов (10), (12), (14). Тоді для всіх $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{k_n}$ існує $\lim_{n \to \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$, послідовність $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімізуючою для $F(u)$ на Ω і будь-яка її слабка* *гранична точка є точкою мінімуму $F(u)$ на Ω, причому в разі єдиності точки мінімуму до неї слабко збігається вся послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Якщо до того ж, починаючи з деякого $n=N>1$, число ітерацій k_n задовольняє умову $k_n \le C'^2D^2/(\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n)$, то справедлива оцінка*

$$0 \le a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le \sigma_n, \quad n \ge N, \tag{31}$$

де $\sigma_n = M\prod_{j=N+1}^{n} q_j + 2\sum_{i=N+2}^{n+1}(\tilde{\beta}_{i-1}+\tilde{\beta}_{i-2})\prod_{j=i}^{n} q_j$, $M>0$ *– стала, яка не залежить від* n; $q_n = 1-4\,\overline{\theta}_n(2\tilde{\beta}_{n-1}-\zeta_n)\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n k_n/(C'^2D^2)$, $\zeta_n \le 2\tilde{\beta}_{n-1}$, $0<\tilde{\varepsilon}\le\tilde{\varepsilon}_n<1$, $0<\tilde{\delta}\le\tilde{\delta}_n\le 2(1-\tilde{\varepsilon}_n)/L$, $0<\overline{\theta}_n<1$; $C'>0$ *і* $L>0$ *визначені в (4) і (15) відповідно,* D *– діаметр множини* Ω.

Доведення. Нехай u^* – точка мінімуму $F(u)$ на $\Omega\subset H$, $\tilde{u}_n^*$ – точка мінімуму $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n=1,2,\ldots$ ($u^*\in M^*$, $\tilde{u}_n^*\in\tilde{M}_n^*$, $n=1,2,\ldots$; M^* і $\tilde{M}_n^*$ – множини точок мінімуму $F(u)$ на Ω і $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$ відповідно).

Повторюючи міркування, аналогічні проведеним при доведенні теореми 3, можна переконатись, що послідовність $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\}_{n=1}^{\infty}$, де $\tilde{u}_n^{(k)}\in\tilde{\Omega}_n$ визначені відповідно до умов (10), (12), (14), збігається до F^* при $n\to\infty$ для будь-яких $k=1,2,\ldots,k_n$. Дійсно, так як при $n\to\infty$ $\tilde{F}_n^{(k-1)}(\overline{u}_n^{(k-1)})\to 0$ для вказаних k в силу теореми 6, а $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)-F^*\to 0$ для будь-яких $\tilde{u}_n^*\in\tilde{M}_n^*$ в силу теореми 1, то існування $\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})=F^*$ для всіх $k=1,2,\ldots,k_n$ негайно випливає з (20) при переході до границі при $n\to\infty$. З тих же підстав, зі співвідношення (21) виходить, що послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімізуючою для $F(u)$ на Ω. Доведення слабкої збіжності $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ до точок із множини M^* проводиться дослівно доведенню аналогічного факту з теореми 3.

Отримаємо оцінку (31). Як показано в [9] при доведенні теореми 6,

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n\sum_{k=0}^{k_n-1}\min\left\{1;\frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C'^2D^2}\right\}|\tilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})| + \\ +\tilde{\beta}_n+\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n>1.$$

Тому з використанням (6) можна отримати

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})-F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})+\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})- \\ -\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})+\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})-F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le \\ \le -\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n\sum_{k=0}^{k_n-1}\min\left\{1;\frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C'^2D^2}\right\}|\tilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|+2\tilde{\beta}_n+2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n>1.$$

В силу теореми 6, $\tilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})\to 0$ при $n\to\infty$ для будь-яких $k=0,1,\ldots,k_n-1$, тому знайдеться число $N_0>1$ таке, що при всіх $n\ge N_0$ буде

$$\min\left\{1; \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C'^2D^2}\right\} = \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C'^2D^2}, \quad k = 0, 1, ..., k_n - 1,$$

і для зазначених $n \ge N_0$ матимемо

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\frac{\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{C'^2D^2}\sum_{k=0}^{k_n-1}|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}.$$

Так як $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \to 0$ з ростом k при кожному фіксованому $n \ge N_0$, то за умови $|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| \ge |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|$, $k = 0, 1, ..., k_n - 1$ матимемо:

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\frac{\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{C'^2D^2}k_n|\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1},$$

або, приймаючи позначення $a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*$, $\rho_n = \tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n k_n / (C'^2D^2)$,

$$a_n - a_{n-1} \le -\rho_n |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \ge N_0.$$

Подальші міркування з отримання оцінки для a_n повністю збігаються з аналогічними міркуваннями при доведенні оцінки в теоремі 3. Якщо для всіх зазначених в (28) значень $n \ge N$ $0 < q_n \le q < 1$, то в (31) $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доведена. ■

В умовах теореми 7 може бути також отримана оцінка, що характеризує швидкість збіжності послідовності $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=N}^{\infty}$ до F^*. Аналогічно (30),

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \le \sigma_n + \tilde{\beta}_n, \quad n \ge N,$$

де $\sigma_n \ge 0$ і $\tilde{\beta}_n > 0$ визначені в (31) і (6) відповідно.

Теорема 8 [9]. *Нехай виконуються всі умови теореми 2, за винятком (3), і умова (7). Нехай, крім того, функціонал $F(u)$ неперервний і сильно опуклий на $\Omega \subset H$, а $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ опуклі на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, ...$ відповідно. Тоді послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, де $\tilde{u}_n^{(k_n)}$ визначаються відповідно до умов (10), (12), (14), збігається до єдиної точки u^* мінімуму $F(u)$ на Ω за нормою простору H при будь-якому виборі $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ і справедлива оцінка*

$$\|\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|_H^2 \le 2\sigma_n/\chi, \quad n \ge N,$$

де $\sigma_n \ge 0$ визначено в (31), $\chi > 0$ – стала з умови сильної опуклості функціонала $F(u)$ на Ω.

Зауважимо, що наведені схеми проекційного методу, а також проекційно-ітераційного методу (10), (12) з вибором крокового множника з умови А, Б або В зберігаються без змін і в рефлексивних банахових просторах [10].

Аналіз одержаних результатів та висновки. У роботі досліджено різні варіанти проекційно-ітераційного методу, заснованого на методі умовного градієнту, для розв'язання задачі умовної мінімізації функціонала в гільбертовому просторі. При достатньо загальних умовах апроксимації вихідної задачі розглянуті питання збіжності проекційно-ітераційних процесів наближень, що виникають в результаті проектування в гильбертові простори, ізоморфні підпросторам вихідного простору. Встановлені умови, за якими проекційно-ітераційні послідовності наближень мінімізують вихідний функціонал та слабко (або сильно) збігаються за нормою основного простору до точки мінімуму функціонала на розглядуваній множині. Отримано теоретичні оцінки швидкості збіжності та похибки за функціоналом (а у випадку сильно опуклого функціонала, й за аргументом) кожного з варіантів проекційно-ітераційного методу залежно від способу вибору крокового множника в методі умовного градієнту. Методика досліджень і результати статті можуть бути використані при розробці і теоретичному обґрунтуванні інших проекційно-ітераційних методів і алгоритмів розв’язання нескінченновимірних екстремальних задач, в тому числі без обмежень, а також при наближеному розв’язуванні деяких класів задач оптимального керування.

Бібліографічні посилання

1. Методы оптимизации сложных систем [Текст] / И. В. Кузьмин, М. М. Биков, С. М. Москвина, А. И. Кузьмин. – Винница: ВДТУ, 2003. – 165 с.
2. **Будак Б. М.** Об аппроксимации экстремальных задач [Текст]: в 2 ч. / Б. М. Будак, Б. М. Беркович, Е. Н. Соловьева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 2, № 3. – С. 580-506; № 4. – С. 870-884.
3. **Тавадзе Э. Л.** Проекционно-итерационный метод решения задачи минимизации с ограничениями, основанный на методе условного градиента [Текст] / Э. Л. Тавадзе, Л. Л. Тавадзе // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1998. – № 3. – С. 18-21.
4. **Балашова С. Д.** Некоторые способы аппроксимации задачи минимизации сильно выпуклого функционала [Текст] / С. Д. Балашова, З. Т. Плаксий. – Днепропетровск, 1983. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 781 – В 83.
5. **Балашова С. Д.** О решении задач минимизации проекционно-итерационными методами [Текст] / С. Д. Балашова // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д.: ДГУ, 1996. – С. 99-104.
6. **Балашова С. Д.** О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями [Текст] / С. Д. Балашова, Э. Л. Тавадзе // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д.: ДГУ, 1996. – С. 128-134.
7. **Гарт Э. Л.** Проекционно-итерационный вариант метода сопряженных градиентов [Текст] / Э. Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2003. – С. 38–48.
8. **Гарт Л. Л.** Об оценке скорости сходимости проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации с ограничениями [Текст] / Л. Л. Гарт // Динамические системы.– Симферополь: КФТ, 2012.– Т. 2(30).– № 3-4. – С. 211-225.
9. **Гарт Л. Л.** Проекционно-итерационная реализация метода условного градиента минимизации функционала в гильбертовом пространстве [Текст] / Л. Л. Гарт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 3. – С. 104-117.
10. **Гарт Л. Л**. Проекційно-ітераційні методи розв’язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації [Текст]: автореф. дис… д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01 / МОН України. – Д., 2017. – 40 с.
11. **Васильев Ф. П.** Лекции по методам решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 376 с.

12. **Трухаев Р. И.** Теория неклассических вариационных задач [Текст] / Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – 168 с.
13. **Данилин Ю. М.** Методы минимизации, основанные на аппроксимации исходного функционала выпуклым [Текст] / Ю. М. Данилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 5. – С. 1067–1080.
14. **Смирнов В. И**. Курс высшей математики [Текст]: в 5 т. Т. 1. / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

Надійшла до редколегії 05.03.2018.