УДК 517.9 doi: 10.15421/321805

В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук
Национальный технический университет Украины "КПИ им. Игоря Сикорского"

РЕКОНСТРУКЦИЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЕРСПЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Выполнена реконструкция системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца с использованием метода перспективных коэффициентов. Найдены четыре системы, общий вид уравнений которых не совпадает с уравнениями системы Лоренца, но которые способны воспроизвести временной ряд одной из переменных системы Лоренца.

Ключевые слова: временной ряд, дифференциальные уравнения, реконструкция, оригинальная система, стандартная система, метод перспективных коэффициентов.

Виконана реконструкція системи звичайних диференціальних рівнянь Лоренца з використанням метода перспективних коефіцієнтів. Знайдені чотири системи, загальний вигляд рівнянь яких не співпадає з рівняннями системи Лоренца, але які здатні відтворити часовий ряд однієї зі змінних системи Лоренца. В багатьох галузях науки є актуальною проблема ідентифікації системи звичайних диференціальних рівнянь за часовою послідовністю однієї спостережуваної змінної. Якщо праві частини рівнянь системи є поліномами, то розв'язання такої задачі тільки за допомогою чисельних методів призводить до отримання моделі, що в більшості випадків містить надлишкові складові та не відображає фізику процесу. Попередній вибір структури системи дозволяє покращити точність реконструкції.

Оскільки в даному досліджені розглядається тільки часова послідовність спостережуваної змінної та немає додаткових вимог до систем-кандидатів, то виконувався пошук тільки систем звичайних диференціальних рівнянь, що мають найменшу кількість складових в рівняннях. Пошук систем-кандидатів виконувався серед окремих випадків системи з поліномами другого ступеня в правих частинах рівнянь. Для розв'язання поставленої задачі застосовувалася запропонована в [12, 11] комбінація аналітичного та чисельного методів. Назвемо оригінальною системою (ОС) систему рівнянь, що точно описує динаміку досліджуваного процесу. В дослідженні також застосовувалася стандартна система (СС), що містить поліноміальну або дробово-раціональну функцію тільки в одному рівнянні. Кількість змінних ОС та СС однакова. Спостережувана змінна СС співпадає зі спостережуваною змінною ОС, і всі коефіцієнти СС можуть бути аналітично виражені через коефіцієнти ОС. Крім того, існує чисельний метод [12], що дозволяє визначити коефіцієнти СС за часовою послідовністю. Для пошуку найпростішої ОС застосовувався метод перспективних коефіцієнтів [10], який полягає в наступному. Спочатку чисельним методом за часовою послідовністю реконструюється СС. Далі, за аналітичними співвідношеннями та структурою СС визначається які коефіцієнти ОС точно нульові та точно ненульові і формується початкова система (ПС), що включає тільки точно ненульові коефіцієнти. Після цього ПС доповнюється коефіцієнтами ОС поки СС, що відповідає ОС, не співпадатиме з СС, отриманою чисельним методом. Результатом буде одна або декілька ОС. За допомогою такого підходу були знайдені 4 структури ОС з 7 коефіцієнта-

© *Городецкий В.Г., Осадчук Н.П., 2018*

ми, що відрізняються від системи Лоренца [17], але здатні точно відтворити часову послідовність змінної X системи Лоренца. Для кожної ОС були знайдені числові значення частини коефіцієнтів та співвідношення, що зв'язують решту коефіцієнтів між собою.

Ключові слова: часовий ряд, диференціальні рівняння, реконструкція, оригінальна система, стандартна система, метод перспективних коефіцієнтів.

Reconstruction of the Lorenz ordinary differential equations system is performed by using perspective coefficients method. Four systems that have structures different from Lorenz system and can reproduce time series of one variable of Lorenz system were found. In many areas of science, the problem of identifying a system of ordinary differential equations (ODE) from a time series of one observable variable is relevant. If the right-hand sides of an ODE system are polynomials, then solving such a problem only by numerical methods allows to obtain a model containing, in most cases, redundant terms and not reflecting the physics of the process. The preliminary choice of the structure of the system allows to improve the precision of the reconstruction.

Since this study considers only the single time series of the observable variable, and there are no additional requirements for candidate systems, we will look only for systems of ODE's that have the least number of terms in the equations. We will look for candidate systems among particular cases of the system with quadratic polynomial right-hand sides.

To solve this problem, we will use a combination of analytical and numerical methods proposed in [12, 11]. We call the original system (OS) the ODE system, which precisely describes the dynamics of the process under study. We also use another type of ODE system - standard system (SS), which has the polynomial or rational function only in one equation. The number of OS variables is equal to the number of SS variables. The observable variable of the SS coincides with the observable variable of the OS. The SS must correspond to the OS. Namely, all the SS coefficients can be analytically expressed in terms of the OS coefficients. In addition, there is a numerical method [12], which allows to determine the SS coefficients from a time series. To find only the simplest OS, one can use the perspective coefficients method [10], which means the following. Initially, the SS is reconstructed from a time series using a numerical method. Then, using analytical relations and the structure of the SS, we determine which OS coefficients are strictly zero and strictly non-zero and form the initial system (IS), which includes only strictly non-zero coefficients. After that, the IS is supplemented with OS coefficients until the corresponding SS coincides with the SS obtained by a numerical method. The result will be one or more OS's. Using this approach, we have found 4 OS structures with 7 coefficients that differ from the Lorenz system [17], but are able to reproduce exactly the time series of X variable of the Lorenz system. Numerical values of the part of the coefficients and relations connecting the rest of the coefficients were found for each OS.

Keywords: time series, differential equations, reconstruction, original system, standard system, method of perspective coefficients.

Введение. Во многих областях современной науки актуальна задача идентификации системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временному ряду одной наблюдаемой переменной – задача реконструкции [8, 7]. Если правые части системы ОДУ представляют собой полиномы, то решение такой задачи только численными методами [6] позволяет получить модель, содержащую, как правило, избыточные слагаемые и не отражающую физику процесса. Если необходимо не только

воспроизвести временной ряд, но и получить систему ОДУ, имеющую физический смысл, то целесообразно использовать сочетание численных и аналитических методов реконструкции, например, предложенное в [12, 11] и развитое в [14, 15, 9, 10]. Кроме того, в качестве самостоятельной задачи можно выделить выбор структуры системы ОДУ – какие именно слагаемые, выбранные из фиксированного множества, должны входить в уравнения системы [3, 4, 5]. Предварительный выбор структуры системы позволяет повысить точность реконструкции. Так как по одной наблюдаемой переменной невозможно однозначно реконструировать систему ОДУ [16], то в некоторых задачах может быть необходимо найти все системы-кандидаты [2], способные воспроизвести исследуемый временной ряд.

Постановка задачи. Необходимо найти системы ОДУ, способные воспроизвести временной ряд переменной $x_1(t)$ системы Лоренца [17], которая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_6 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_3 x_3 + c_5 x_1 x_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1 = -10$, $a_2 = 10$, $b_1 = 28$, $b_2 = b_6 = -1$, $c_3 = -8/3$, $c_5 = 1$. Поскольку в данном исследовании рассматривается только временной ряд наблюдаемой, и нет дополнительных требований к системам-кандидатам, то будем искать только системы ОДУ, имеющие наименьшее количество слагаемых в уравнениях. Будем искать системы-кандидаты среди частных случаев системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 x_2 + a_6 x_1 x_3 + a_7 x_2^2 + a_8 x_2 x_3 + a_9 x_3^2, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1^2 + b_5 x_1 x_2 + b_6 x_1 x_3 + b_7 x_2^2 + b_8 x_2 x_3 + b_9 x_3^2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 x_2 + c_6 x_1 x_3 + c_7 x_2^2 + c_8 x_2 x_3 + c_9 x_3^2. \end{cases} \tag{2}$$

Метод решения. Для решения поставленной задачи будем использовать сочетание аналитических и численных методов, предложенное в [12, 11]. Назовем оригинальной системой (ОС) систему ОДУ, которая точно описывает динамику исследуемого процесса. ОС соответствует стандартная система (СС), которая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \vdots \\ \dot{y}_n = F\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \end{cases} \tag{3}$$

где n - количество переменных ОС и СС; F - полиномиальная или дробно рациональная функция; y_1 - наблюдаемая переменная СС, которая совпадает с наблюдаемой переменной ОС, т.е. $y_1(t) \equiv x_1(t)$. При этом все коэффициенты СС могут быть аналитически выражены через коэффициенты ОС. Кроме

того, существует численный метод [12], позволяющий по временному ряду определить коэффициенты СС.

Для поиска только простейших ОС можно использовать метод перспективных коэффициентов [10], который состоит в следующем. Вначале по временному ряду численным методом реконструируется СС. Затем, используя аналитические соотношения, по структуре СС определяется, какие коэффициенты ОС строго равны нулю и строго не равны нулю и формируется исходная система (ИС), включающая только строго ненулевые коэффициенты. Далее ИС дополняется коэффициентами ОС, пока соответствующая СС не будет совпадать с СС, полученной численным методом. В результате будут получены одна или несколько ОС.

Учитывая выше изложенное, для решения задачи реконструкции системы Лоренца (1) была сформирована следующая последовательность действий:

1. Вывести соотношения, связывающие коэффициенты ОС и СС.
2. Реконструировать СС, соответствующую системе Лоренца (1).
3. Используя аналитические соотношения, определить, какие коэффициенты ОС должны быть строго нулевые, а какие - строго ненулевые.
4. Используя метод перспективных коэффициентов, найти все простейшие ОС, которым соответствует СС, полученная в п. 2.
5. Определить значения коэффициентов найденных ОС, если это возможно.

Результаты. Был выполнен вывод соотношений, связывающих коэффициенты ОС и СС. Для удобства использования соотношений необходимо, чтобы в них отсутствовали иррациональные слагаемые. Поэтому из уравнений ОС (2) были исключены произведения ненаблюдаемых переменных, которые приводят к появлению таких слагаемых в соотношениях. В результате система приняла вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3. \end{cases} \tag{4}$$

СС, соответствующая ОС (4), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \left(N_0 + N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_1^2 + N_5y_1y_2 + N_6y_1y_3 + N_7y_2^2 + N_8y_2y_3 + \right. \\ +N_9y_3^2 + N_{10}y_1^3 + N_{11}y_1^2y_2 + N_{12}y_1^2y_3 + N_{13}y_1y_2^2 + N_{14}y_1y_2y_3 + N_{16}y_2^3 + \\ +N_{20}y_1^4 + N_{21}y_1^3y_2 + N_{22}y_1^2y_3 + N_{23}y_1^2y_2^2 + N_{24}y_1^2y_2y_3 + N_{26}y_1y_2^3 + \\ \left. +N_{31}y_1^5 + N_{32}y_1^4y_2 + N_{33}y_1^4y_3 + N_{34}y_1^6 + N_{35}y_1^3y_2^2 + N_{36}y_1^5y_2 + N_{38}y_1^7\right): \\ :\left(D_0 + D_1y_1 + D_2y_2 + D_4y_1^2 + D_{10}y_1^3\right). \end{cases} \tag{5}$$

Соотношения между коэффициентами ОС (4) и СС (5) в данной статье не приведены по причине их значительного объема. Нумерация коэффициентов СС такая же, как в (9) из [1].

Для системы (1) методы реконструкции и значения коэффициентов СС известны из [13]. Используя подход из указанной работы, для (1) была получена СС, которая с учетом обозначений (5) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \left(N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_{20} y_1^4 + N_{21} y_1^3 y_2\right) \big/ D_1 y_1, \end{cases} \tag{6}$$

где $N_4 = 720$, $N_5 = -29{,}33$, $N_6 = -13{,}67$, $N_7 = 11$, $N_8 = D_1 = 1$, $N_{20} = -10$, $N_{21} = -1$ и $y_1(t) \equiv x_1(t)$.

Можно видеть, что СС (6) значительно проще, чем (5). Это означает, что ОС (4) содержит избыточные коэффициенты, которые необходимо приравнять нулю. Для определения того, какие коэффициенты ОС (4) равны нулю, был выполнен анализ, аналогичный рассмотренному в [1]. Зная, что некоторый коэффициент СС (6) нулевой (или ненулевой) и используя соотношения между коэффициентами ОС и СС, можно сделать вывод о наличии или отсутствии коэффициентов ОС. Многократное повторение данной операции для разных коэффициентов СС позволяет упростить структуру ОС. Последовательность основных этапов анализа для краткости представлена в виде диаграммы (рис. 1), обозначения которой имеют следующий смысл:

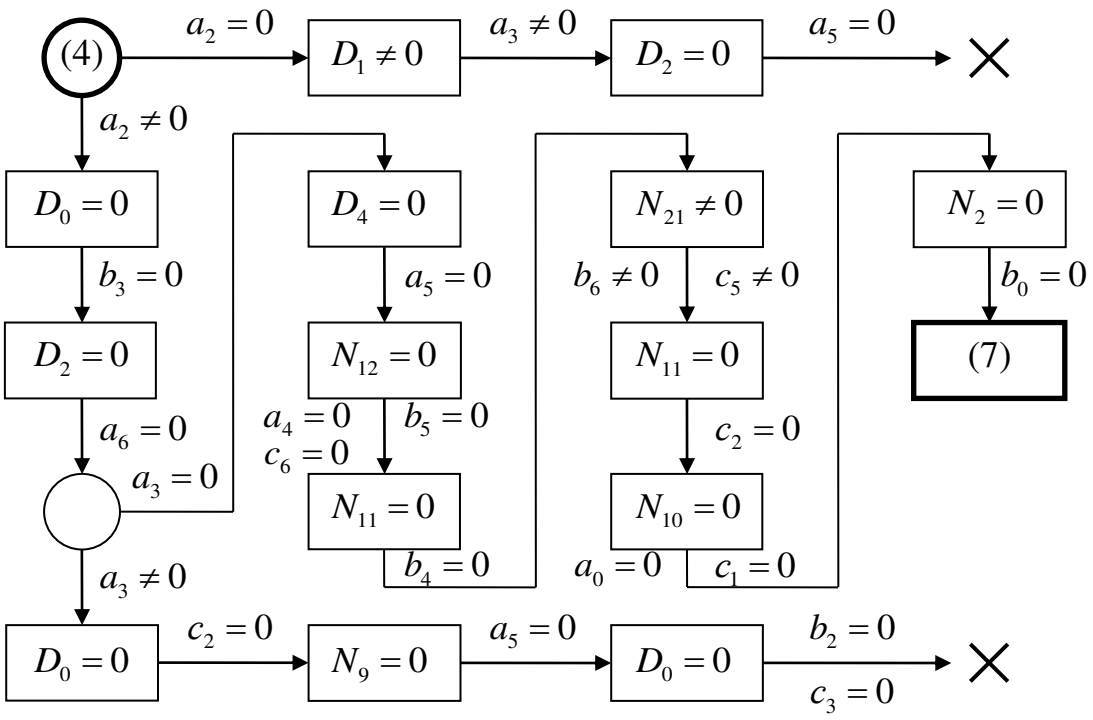


Рис. 1. Поиск частных случаев ОС (4), которым соответствует СС (6)

1. В прямоугольниках приведены исходные данные для очередного шага анализа – факты равенства или неравенства нулю соответствующего коэффициента СС. Сделанный на их основе вывод относительно коэффициентов ОС указан возле стрелок.

2. Круги обозначают рассмотрение взаимно исключающих гипотез, которое используется когда имеющихся фактов недостаточно для однозначного вывода.

3. Символ «X» означает, что предыдущие шаги анализа привели к противоречиям, делающим невозможным аналитический переход между ОС и СС.

Из рис. 1 можно видеть, что была найдена только одна ОС, которая является частным случаем (4) и которой соответствует СС (6). Система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_6 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 x_2. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что в системе (7) отсутствуют коэффициенты системы (4), которые согласно рис. 1 равны нулю, и точно присутствуют коэффициенты a_2, b_6, c_5, которые, согласно диаграмме, не равны нулю. Остальные коэффициенты системы (7) могут принимать как нулевые, так и ненулевые значения. Связь между коэффициентами ОС (7) и СС (6) выражается соотношениями

$$\begin{cases} N_4 = a_2 b_6 c_0 - a_2 b_1 c_3 + a_1 b_2 c_3, \\ N_5 = -\left(a_1 + b_2\right) c_3, \\ N_6 = a_1 + b_2 + c_3, \\ N_7 = -\left(a_1 + b_2\right), \\ N_8 = D_1 = 1, \\ N_{20} = a_2 b_6 c_4 - a_1 b_6 c_5, \\ N_{21} = b_6 c_5. \end{cases} \tag{8}$$

Можно видеть, что система (7) содержит 9 ненулевых коэффициентов, что больше, чем 7 коэффициентов в системе Лоренца (1). Для дальнейшего упрощения системы (7) с использованием соотношений (8) был применен метод перспективных коэффициентов [10]. Вначале была сформирована ИС, содержащая только ненулевые коэффициенты a_2, b_6, c_5. Ей соответствует СС с ненулевыми коэффициентами N_8, N_{21}, D_1, а $N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = N_{20} = 0$, что противоречит (6). Для устранения этого противоречия необходимо добавлять в ИС отсутствующие в ней коэффициенты ОС (7) до тех пор, пока соответствующая СС не будет совпадать с (6). Всего было найдено 9 ОС, в том числе 3 системы с 6 коэффициентами и 6 систем с 7 коэффициентами. Структуры найденных ОС

приведены в табл. 1, где символом "+" обозначено, какие из коэффициентов системы (7) присутствуют в уравнениях.

Далее было выполнено определение коэффициентов ОС из коэффициентов СС (6). При этом оказалось, что для ОС №1-4 не существуют значений коэффициентов, обеспечивающих значения коэффициентов СС (6). Например, для ОС №1, из (8) можно вывести соотношения $a_1 = -N_{20}/N_{21}$ и $a_1 = -N_7$, которые становятся противоречивыми при подстановке значений коэффициентов СС (6). Такие ОС были исключены из дальнейшего рассмотрения. В результате оказалось, что стандартная система (6) соответствует оригинальным системам №5-9 из табл. 1, среди которых есть и система Лоренца (№7). Очевидно, все они способны воспроизвести исследуемый временной ряд. Несмотря на то, что по одной наблюдаемой переменной невозможно определить все коэффициенты ОС, для каждой из 5 найденных ОС можно однозначно определить значения части коэффициентов, используя значения коэффициентов СС (6). Например, значение коэффициента c_3 можно однозначно определить, если вывести из (8) соотношение $c_3 = N_5/N_7$.

Найденные значения коэффициентов ОС №5-9 приведены в табл. 2. Для того чтобы была возможность вычислить все коэффициенты ОС, были приняты значения $a_2 = b_6 = 1$. При вычислении коэффициентов ОС №9 было необходимо решить квадратное уравнение, из-за чего данной ОС соответствует два набора коэффициентов (№9А и №9Б). Жирным шрифтом выделены коэффициенты, которые можно однозначно определить.

Таблица 1

Структуры ОС, которым соответствует СС (6)

№	a_1	a_2	b_1	b_2	b_6	c_0	c_3	c_4	c_5
1	+	+			+	+	+		+
2	+	+	+		+		+		+
3	+	+		+	+		+		+
4	+	+	+		+	+	+		+
5	+	+		+	+	+	+		+
6	+	+			+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+		+		+
8	+	+	+		+		+	+	+
9	+	+		+	+		+	+	+

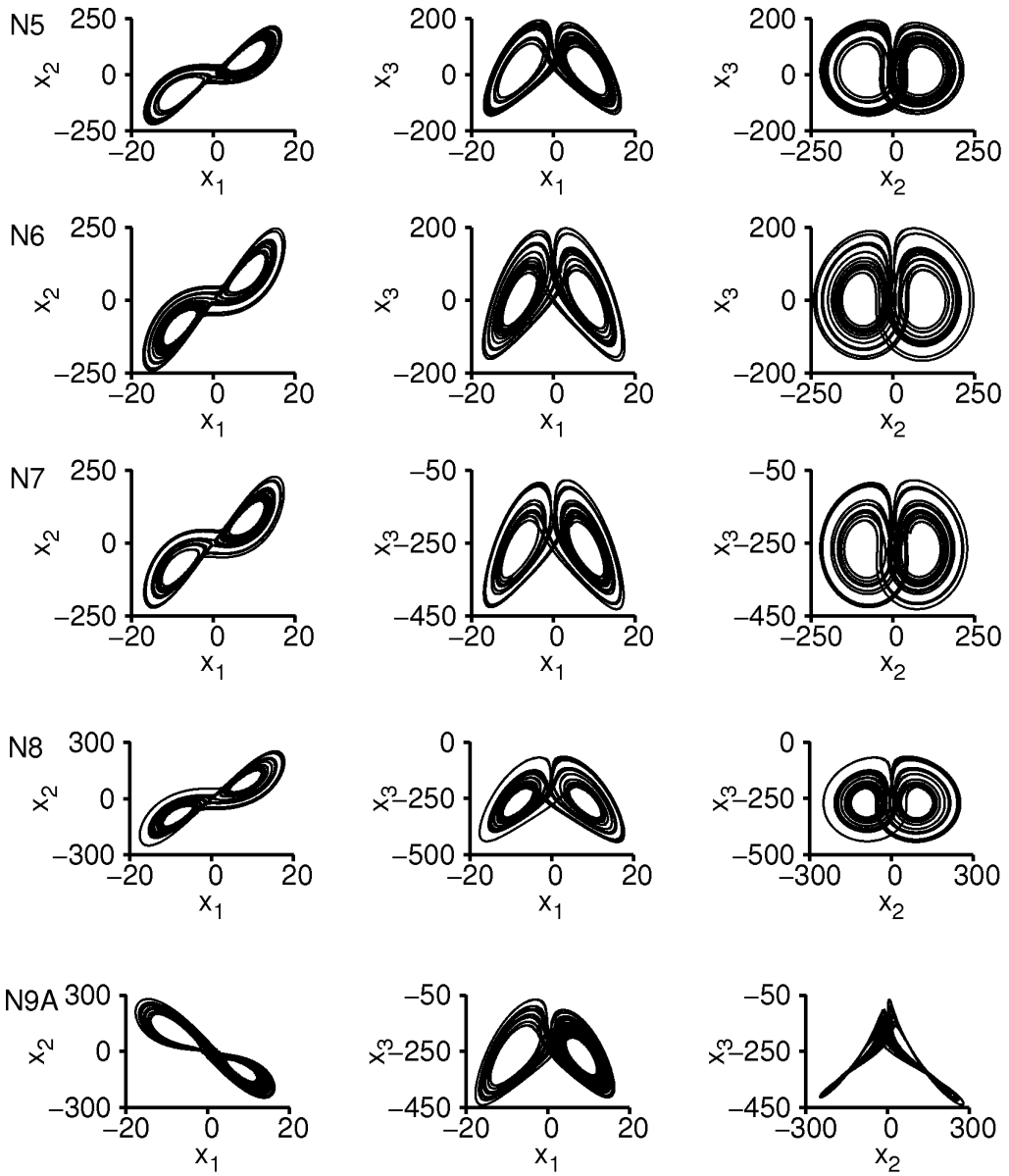
При подстановке значений коэффициентов ОС из табл. 2 в выражения (8) полученные коэффициентов СС будут такими же, как в (6). Следовательно, наблюдаемые переменные всех найденных ОС совпадают с наблюдаемой переменной системы Лоренца (1). Значения некоторых коэффициентов ОС будут зависеть от ранее принятых значений a_2, b_6. Если присвоить a_2 и b_6 произвольные ненулевые значения, то зависящие от них коэффициенты ОС

изменятся так, что коэффициенты СС и наблюдаемая останутся неизменными. Примером такой ситуации является система №7, структура которой совпадает со структурой системы Лоренца (1), но значения коэффициентов отличаются. Фазовые портреты ОС №5-9, построенные с использованием значений коэффициентов из табл. 2, показаны на рис. 2.

Таблица 2

Значения коэффициентов ОС №5-9

№	a_1	a_2	b_1	b_2	b_6	c_0	c_3	c_4	c_5
5	-10	1	0	-1	1	746,67	-2,67	0	-1
6	-11	1	0	0	1	720	-2,67	1	-1
7	-10	1	280	-1	1	0	-2,67	0	-1
8	-11	1	270	0	1	0	-2,67	1	-1
9А	11,828	1	0	-22,828	1	0	-2,67	-21,828	-1
9Б	-22,828	1	0	11,828	1	0	-2,67	12,828	-1



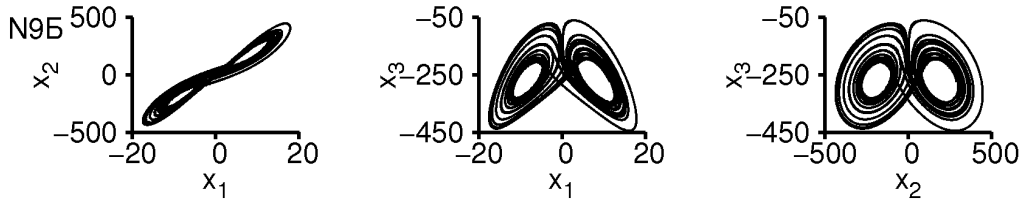


Рис. 2. Фазовые портреты ОС №5-9

Выводы. В статье выполнена реконструкция системы ОДУ Лоренца по одной наблюдаемой переменной с использованием метода перспективных коэффициентов. Были найдены 4 системы ОДУ, которые отличаются по структуре от системы Лоренца, но способны воспроизвести временной ряд одной из переменных системы Лоренца. Поиск систем ОДУ с одинаковыми наблюдаемыми переменными и различной структурой важен с практической точки зрения, поскольку таким системам могут соответствовать разные механизмы протекания исследуемого процесса.

Аналитический переход между ОС и СС возможен не для всех систем ОДУ, что создавало определенные трудности в данной работе. Поэтому дальнейшего исследования требуют вопросы выявления ОС, для которых возможен переход к СС, и вывод для них соответствующих аналитических соотношений.

Библиографические ссылки

1. **Городецкий В. Г.** Альтернативные модели для систем одного класса [Текст] / В. Г. Городецкий, Н. П. Осадчук // Питання прикладної математики та математичного моделювання: зб. наук. пр. – Д.: ЛІРА, 2017. – Вип. 17. – С. 62-72.
2. **Льюнг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст] / Л. Льюнг. – М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1991. – 432 с. – Перевод с английского.
3. **Aguirre L. A.** Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering [Text] / L. A. Aguirre, S. A. Billings // Int. J. Control. – 1995. – vol. 62. – № 3. – P. 569-587.
4. **Aguirre L. A.** Structure-selection techniques applied to continuous-time nonlinear models [Text] / L. A. Aguirre, U. S. Freitas, C. Letellier, J. Maquet // Physica D. – 2001. – vol. 158. – P. 1-18.
5. **Billings S. A.** Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator [Text] / S. A. Billings, S. Chen, M. J. Korenberg // Int. J. Control. – 1989. – vol. 49. – № 6. – P. 2157-2189.
6. **Baake E.** Fitting ordinary differential equations to chaotic data [Text] / E. Baake, M. Baake, H.G. Bock, K.M. Briggs // Phys. Rev. A. – 1992. – vol. 45. – № 8. – P. 5524-5529.
7. **Breeden J. L.** Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables [Text] / J. L. Breeden, A. Hubler // Phys. Rev. A. – 1990. – vol. 42. – P. 5817-5826.
8. **Cremers J.** Construction of differential equations from experimental data [Text] / J. Cremers, A. Hubler // Naturforsch. – 1987. – vol. 42a. – P. 797-802.
9. **Gorodetskyi V.** Analytic reconstruction of some dynamical systems [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // Physics Letters A. – 2013. – vol. 377. – P. 703-713.
10. **Gorodetskyi V.** Reconstruction of chaotic systems of a certain class [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // International Journal of Dynamics and Control. – 2015. – vol. 3. – № 4. – P. 341-353.

11. **Gouesbet G.** Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system [Text] / G. Gouesbet // Phys. Rev. A. – 1991. – vol. 44. – P. 6264-6280.
12. **Gouesbet G.** Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series [Text] / G. Gouesbet // Physical Review A. – 1991. – vol. 43. – № 10. – P. 5321-5331.
13. **Gouesbet G.** Reconstruction of vector fields: the case of Lorentz system [Text] / G. Gouesbet // Physical Review A. – 1992. – vol. 46. – № 4. – P. 1784-1796.
14. **Lainscsek C.** Ansatz library for global modeling with a structure selection [Text] / C. Lainscsek, C. Letellier, F. Schürrer // Physical Review E. – 2001. – vol. 64. –- 016206. – 15 p.
15. **Lainscsek C.** Global modeling of the Rössler system from the z-variable [Text] / C. Lainscsek, C. Letellier, I. Gorodnitsky // Physics letter A. – 2003. – vol. 314. – P. 409-427.
16. **Lainscsek C.** Nonuniqueness of global modeling and time scaling [Text] / C. Lainscsek // Phys. Rev. E. – 2011. – vol. 84. – 046205.
17. **Lorenz E. N.** Deterministic nonperiodic flow [Text] / E. N. Lorenz // J. Atmos. Sci. – 1963. – vol. 20. – P. 130-141.

Надійшла до редколегії 18.04.2018.