УДК 517.518.82: 517.518.36: 517.518.45

Янчук П. С., к.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет, м. Рівне)

СПЕКТРАЛЬНІ МАШИННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

***Анотація**. У статті розкрито, що спектральні поліноміальні апроксимації мають велике значення в інженерній, гідродинамічній областях застосування. Запропоновано шляхи розвитку спектральних методів для розв'язання крайових задач для еліптичних рівнянь. З використанням фундаментальних ідей, створено техніку за методами дискретизації рівняння та граничних умов, яка закінчується повним алгоритмом для вирішення класичної задачі Діріхле. Метод квазі-спектральних поліномів застосовано до побудови швидких наближень розв'язку крайової задачі Діріхле.*
***Ключові слова**: моделювання, задача Діріхле, квазі-спектральні поліноми*

***Аннотация**. В статье раскрыто, что спектральные полиномиальные аппроксимации имеют важное значение в инженерной, гидродинамической областях применения. Предложены пути развития спектральных методов для решения краевых задач для эллиптических уравнений. С использованием фундаментальных идей, предложено технику по методам дискретизации уравнения и граничных условий, которая заканчивается полным алгоритмом для решения классической задачи Дирихле. Метод квази-спектральных полиномов применен к построению полиномиальной аппроксимации решения краевой задачи Дирихле.*
***Ключевые слова**: моделирование, задача Дирихле, квази-спектральные многочлены.*

***Annotation.** The article deals with spectral polynomial approximants which are impotent in engineering, and fluid dynamics. The aim of this work is to create spectral methods for solving boundary value problems for elliptic equations. Starting from the fundamental ideas, we go further on building techniques, as the treating of boundary conditions, finishing with a complete algorithm to solve a classical Dirichlet problem. The method of quasi-spectral polynomial is applied to the constructing a polynomial approximation of solution of the Dirichlet boundary value problem.*
***Keywords**: modelling, Dirichlet problem, quasi-spectral polynomials.*

Створення швидких алгоритмів розв’язування задачі Діріхле дасть змогу покращити ефективність, включаючи швидкість машинних обчислень та економію оперативної пам’яті, машинного моделювання процесів гідродинаміки. Задачі тут надзвичайно актуальні і разом з тим складні і не вирішені задовільно до теперішнього часу як у плані моделювання гідродинамічних процесів, створення фізичних і математичних моделей, так і в плані створення надійного програмного забезпечення.

Перший довгий етап в історії вивчення законів теоретичної гідромеханіки був пов'язаний з іменами Ейлера, Даламбера та інших дослідників і присвячений потенціальним течіям ідеальної та нестискуваної рідини. Знаменитий парадокс Ейлера-Даламбера про рівність нулю сумарної сили, яка діє на тіло, обтічне потоком, виявив недосконалість теорії ідеальної рідини. Детальний аналіз цього та інших парадоксів подано в книзі выдомого математика Біркгофа «Hydrodynamics, A study in logic, fact and Similitude». Математична модель в'язкої рідини з рівняннями Нав'є-Стокса покликана була усунути численні парадокси і значне розходження з практичними спостереженнями. Але, для нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса практично не має явних аналітичних розв'язків для встановлення відповідності реальним явищам. Попри малий запас точних розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса і тут було знайдено ряд парадоксів. Все це вказує на те, що незважаючи на довгу історію розвитку в гідродинаміці очікується багато відкриттів. І тоді комп'ютерним експериментам буде більше довіри, а значить потрібно буде менше витрат для випробувань в гідродинамічних трубах.

Автором розроблено метод квазі-спектральних поліномів, який належить до класу спектральних методів і призначений для машинного розв'язування задач з рівняннями Нав'є-Стокса, як лінійними так і нелінійними. Квазі-спектральні поліноми відкрив автор в середині 80-х. Вони виявились корисними для машинного розв'язування ряду задач математичної фізики, як еліптичного так і параболічного типів. Своєю чергою до цих задач автора привели задачі моделювання САПР, в першу чергу оптимізації за обсягами оперативної пам'яті та швидкодії. У цій роботі ми зосередимось на порівняно нескладній задачі, яку потрібно розв'язувати на комп'ютері десятки і сотні тисяч разів в секунду, тому актуальними є аналіз з точки зору швидкості обчислень.

Апарат квазі-спектральних поліномів може широко використовуватися для розв'язування крайових задач для диференційних рівнянь, задачі Коші для систем звичайних нелінійних рівнянь та інших задач [1–4]. Однією з перших робіт з квазі-спектральних поліномів була робота [1]. У пропонованій роботі застосовано раніше вивчені властивості квазі-спектральних поліномів та відповідних рядів Фур'є до розв'язування крайових задач для еліптичних рівнянь із неперервними коефіцієнтами.

Метод відноситься до класу високоточних та ненасичених методів розв'язування задач математичної фізики, які розглядаються в класичних монографіях. Розглянемо застосування методу квазі-спектральних поліномів на прикладі модельної задачі для еліптичного рівняння із змінними коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
&-(au_x)_x-(bu_y)_y+cu=f,\ (x,y)\in(-1,1)^2,\\
&u=\phi,(x,y)\in\partial\left([-1,1]^2\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

з умовами Діріхле.

Задача полягає в апроксимації невідомої функції $u=u(x,y)$ за допомогою розвинення в ряди Фур’є-Лежандра та аналогічні ряди Фур’є за квазі-спектральними поліномами. Припустимо, що $u\in W_2^2\left([-1,1]^2\right)$.

У статті розглядаються функції двох змінних, інтегровних з квадратом: $u\in L_2\left([-1,1]^2\right)$, які розвиваються в ряди Фур’є-Лежандра

$$
u=\sum_{i,j=0}^{\infty}u_{i,j}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y),\ u_{i,j}=\int\limits_{[-1,1]^2}u(x,y)\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)\,dxdy,
$$

відповідно.

Для відрізків цих рядів запровадимо позначення:

$$
\pi_{m,r}^{n,s}u=\sum_{i=m,j=r}^{n,s}u_{i,j}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y),
$$

при цьому очевидним чином визначимо оператори проектування $\pi_{m,r}^{n,s}$, образи значень яких будемо позначати через $\mathrm{M}_{m,r}^{n,s}$.

Функції двох змінних $u=u(x,y)$ поставимо у відповідність скінченим рядам Фур’є за квазі-спектральними поліномами:

$$
\pi_{0,0}^{2n,2n+1}u=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=1}^{2n+2}u_{i,j}^{\bullet\,\circ}K_i^{\bullet}(x)K_j^{\circ}(y),\quad u_{i,j}^{\bullet\,\circ}=\int_{-1}^{1}uK_i^{\bullet}(x)K_j^{\circ}(y)\,dxdy.
$$

Звісно поліном $\pi_{0,0}^{2n,2n+1}u$ дає найкраще середньоквадратичне наближення для функції u в $\mathrm{M}_{0,0}^{2n,2n+1}$, тобто

$$
\left\|u-\pi_{0,0}^{2n,2n+1}u\right\|_{L_2}=\inf_{z\in\mathrm{M}_{0,0}^{2n,2n+1}}\|u-z\|_{L_2},
$$

де $u\in L_2\left([-1,1]^2\right)$ і аналогічно для інших скінчених рядів Фур’є.

Між коефіцієнтами Фур'є функцій u та їх похідних u_x, u_{xx} існують прості зв'язки для кожної із систем квазі-спектральних поліномів.

Наведемо одну з них [4–6]: формули для вираження коефіцієнтів Фур'є других похідних відносно ортогонально базису із поліномів першого роду:

$$u^{\circ}_{xx,i} = -\lambda^{\circ}_i u^{\circ}_i + d^i_{\circ}\Delta^i u + r^i_{\circ}[u_x]^{\bullet}_{2n+2-i'}, \quad i = 1,...,2n; \tag{2}$$

Параметри диференціювання $\mu^{\bullet}_i, d^i_{\bullet}, r^i_{\bullet}$ і ін. не залежать від цієї функції $u \in W^2_2[-1,1]$, а залежать лише від даного натурального параметра n і поширюються на функції двох і більше змінних [4–6].

Внутрішні коефіцієнти будемо знаходити із еліптичного рівняння.

Переходячи до коефіцієнтів Фур'є в еліптичному рівнянні, отримаємо

$$-\left[\left(au_x\right)_x\right]^{\circ,\circ}_{r,s} - \left[\left(bu_y\right)_y\right]^{\circ,\circ}_{r,s} + [cu]^{\circ,\circ}_{r,s} = [f]^{\circ,\circ}_{r,s}. \tag{3}$$

Виконуючи диференціювання в коефіцієнтах Фур'є за формулами типу (2), точніше за їх аналогами для двох змінних:

$$\left[\left(au_x\right)_x\right]^{\circ,\circ}_{r,s} = -\mu_r\left[au_x\right]^{\bullet,\circ}_{r,s}.$$

З іншої сторони,

$$\left[u_x\right]^{\bullet,\circ}_{i.j} = \mu_i u^{\circ,\circ}_{i.j} + \delta^i_{\bullet}\Delta^i u^{\circ}_j + r^i_{\bullet}\left[u_x\right]^{\bullet,\circ}_{2n+2-i',j}$$

Розвинемо функцію u_x в квазі-спектральний ряд вигляду

$$u_x = \sum_{i=0,\, j=1}^{2n,\,2n+2}\left[u_x\right]^{\bullet,\circ}_{i.j} K^{\bullet}_i(x) K^{\circ}_j(y)$$

Тут і далі залишок ряду Фур'є-Лежандра для компактності будемо опускати. Помножимо обидві частини рівності на a і знайдемо коефіцієнт Фур'є одержаного виразу $[\ ]^{\bullet,\circ}_{r,s}$:

$$\left[au_x\right]^{\bullet,\circ}_{r,s} = \sum_{i=0,\, j=1}^{2n,\,2n+2}\left[u_x\right]^{\bullet,\circ}_{i.j}\left[aK^{\bullet}_i(x)K^{\circ}_j(y)\right]^{\bullet,\circ}_{r,s}$$

Підставимо сюди коефіцієнти похідної через коефіцієнти самої функції:

$$\left[\left(au_x\right)_x\right]_{r,s}^{\bullet,\circ}=\sum_{i=0,j=1}^{2n,2n+2}-\mu_r\left(\mu_i u_{i.j}^{\circ.\circ}+\delta_\bullet^i\Delta^i u_j^\circ+r_\bullet^j\left[u_x\right]_{2n+2-i',j}^{\bullet,\circ}\right)\left[aK_i^\bullet K_j^\circ\right]_{r,s}^{\bullet,\circ}.$$

Аналогічно, обчислюємо $\left[\left(bu_y\right)_y\right]_{r,s}^{\circ,\circ}$ та $\left[cu\right]_{r,s}^{\circ,\circ}$. Підставивши одержані результати в (3), дістанемо

$$\sum_{i=0,j=1}^{2n,2n+2}a_{r,s}^{i,j}\mu_r\left(\mu_i u_{i.j}^{\circ.\circ}+\delta_\bullet^i\Delta^i u_j^\circ+r_\bullet^i\left[u_x\right]_{2n+2-i',j}^{\bullet,\circ}\right)+$$
$$\sum_{i=1,j=0}^{2n+2,2n}b_{r,s}^{i,j}\mu_з\left(\mu_i u_{i.j}^{\circ.\circ}+\delta_\bullet^j\Delta^j u_i^\circ+r_\bullet^j\left[u_y\right]_{i,2n+2-j'}^{\circ,\bullet}\right)+$$
$$\sum_{i=1,j=1}^{2n+2,2n+2}c_{r,s}^{i,j}u_{i.j}^{\circ.\circ}=\left[f\right]_{r,s}^{\circ,\circ},$$

де

$$a_{r,s}^{i,j}=\left[aK_i^\bullet K_j^\circ\right]_{r,s}^{\bullet,\circ}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}a(x,y)K_i^\bullet(x)K_j^\circ(y)K_r^\bullet(x)K_s^\circ(y)\,dxdy,$$
$$b_{r,s}^{i,j}=\left[bK_i^\circ K_j^\bullet\right]_{r,s}^{\circ,\bullet},c_{r,s}^{i,j}=\left[cK_i^\circ K_j^\circ\right]_{r,s}^{\circ,\circ}.$$

Із одержаних рівностей, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження внутрішніх коефіцієнтів $u_{i.j}^{\circ.\circ},1\le i,j\le 2n$:

$$\sum_{i,j=1}^{2n}\left(\mu_r\mu_i a_{r,s}^{i,j}+\mu_s\mu_j b_{r,s}^{i,j}+c_{r,s}^{i,j}\right)u_{i.j}^{\circ.\circ}=\left[f\right]_{r,s}^{\circ,\circ}+\Phi_{r,s}+\varepsilon_{r,s},1\le r,s\le 2n,\qquad(4)$$

де

$$\Phi_{r,s}=\sum_{i=0,j=1}^{2n,2n+2}\mu_r a_{r,s}^{i,j}d_\bullet^i\Delta^i u_j^\circ+\sum_{i=1,j=0}^{2n+2,2n}\mu_s b_{r,s}^{i,j}d_\bullet^j\Delta^j u_i^\circ+$$
$$\sum_{i=0,j=2n+1}^{2n,2n+2}\mu_i\mu_r a_{r,s}^{i,j}u_{i.j}^{\circ.\circ}+\sum_{i=2n+1,j=0}^{2n+2,2n}\mu_j\mu_s b_{r,s}^{i,j}u_{i.j}^{\circ.\circ}+$$
$$\sum_{i=0,j=2n+1}^{2n,2n+2}\mu_r a_{r,s}^{i,j}r_\bullet^i\left[u_x\right]_{2n+2-i',j}^{\bullet,\circ}+\sum_{i=2n+1,j=0}^{2n+2,2n}b_{r,s}^{i,j}\mu_s r_\bullet^j\left[u_y\right]_{i,2n+2-j'}^{\circ,\bullet},$$
$$\sum_{i=0,j=2n+1}^{2n,2n+2}c_{r,s}^{i,j}u_{i.j}^{\circ.\circ}+\sum_{i=2n+1,j=0}^{2n+2,2n}c_{r,s}^{i,j}u_{i.j}^{\circ.\circ}+$$
$$\varepsilon_{r,s}=\sum_{i=0,j=1}^{2n,2n}\mu_r a_{r,s}^{i,j}r_\bullet^i\left[u_x\right]_{2n+2-i',j}^{\bullet,\circ}+\sum_{i=1,j=0}^{2n,2n}b_{r,s}^{i,j}\mu_s r_\bullet^j\left[u_y\right]_{i,2n+2-j'}^{\circ,\bullet}.$$

Величини $\Phi_{r,s}$ обчислюються за відомими коефіцієнтами еліптичного рівняння та відомими крайовими значеннями функції u, проте для обчислення величин $\varepsilon_{r,s}$ необхідно знати невідомий розв'язок розглядуваної нами крайової задачі.

Опущення величин $\varepsilon_{r,s}$ у практичних обчисленнях істотно не вплине на похибку в знаходженні наближеного розв'язку в метриці простору $L_2\left(\left[-1,1\right]^2\right)$.

Знайшовши крайові коефіцієнти $u^{\circ,\circ}_{2n+2-i',j}, u^{\circ,\circ}_{i,2n+2-j'}$, а із одержаної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4) внутрішні коефіцієнти $u^{\circ,\circ}_{i,j}, 1 \le i, j \le 2n$, побудуємо поліном:

$$\sigma_{0,0}^{2n+1,2n+1}u = \sum_{i=1}^{2n+2}\sum_{j=1}^{2n+2} u^{\circ,\circ}_{i,j} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right).$$

який апроксимує точний розв'язок поставленої задачі Діріхле.

Висновки. Застосовано метод квазі-спектральних поліномів для наближеного розв'язування модельної крайової задачі Діріхле (1). Відзначимо найважливіші властивості методу:

– поліноміальні розв'язки задач Діріхле вигляду (1), степінь яких не вище $2n+1$ по кожній із змінних, відновлюються точно;

– метод квазі-спектральних поліномів зводить задачу Діріхле до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною, додатно визначеною матрицею, що зумовлює обчислювальну стійкість методу;

– метод не потребує зведення до однорідних умов, а застосовується легко і відразу до задачі Діріхле з неоднорідними крайовими умовами.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2012. – Вип. 9(18). – С. 189–207. **3**. Янчук П. С. Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Питання прикладної математики і математичного моделювання. –Д., 2012. – С. 261–268. **4**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8(17). – С. 213–239.

Рецензент: д.ф.-м.н., професор Джунь Й. В.