

## ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦЕПИ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБКИХ СВЯЗЕЙ

При проведении активных аэродинамических экспериментов по изучению возмущений космической плазмы и других научных исследований целесообразно построение цепи космических аппаратов (КА) на круговой орбите. Эта цепь должна быть ориентирована по радиусу-вектору с заданным стабильным расстоянием между КА. В связи с этим в настоящей статье рассмотрены принципиальные и технические возможности создания вертикальной цепи тел, связанных гибкой связью на основе рассмотрения движения цепи материальных точек в плоскости орбиты. Ряд вопросов исследования динамики такой системы может быть решен на основе рассмотрения движения в плоскости орбиты цепи материальных точек. Ниже представлена математическая модель такой механической системы.

Рассмотрим цепь материальных точек, соединенных невесомой гибкой нитью в ньютоновском поле сил. Одно из звеньев цепи изображено на рис. 1,а. К каждой из масс приложены силы  $T$  со стороны прилегающих звеньев и внешняя сила  $P$ . Общее количество звеньев  $n$  с номерами  $i$  от 1 до  $n$ , общее количество масс –  $n+1$  с номерами от 0 до  $n$ .

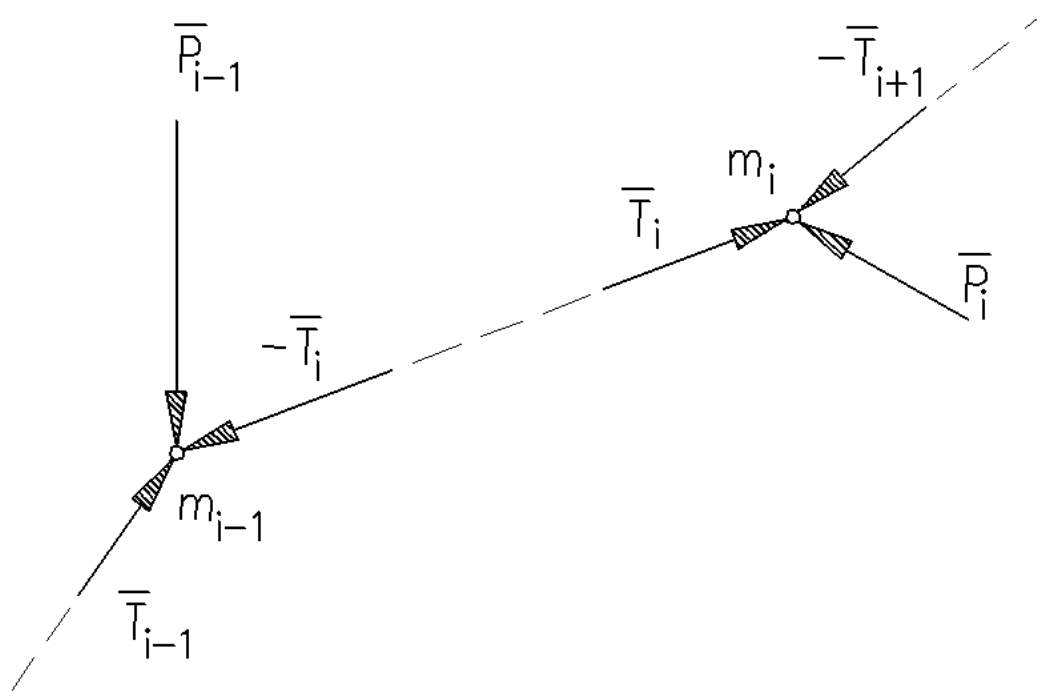
Цепь движется в ньютоновском поле сил вокруг притягивающего центра  $O$  (рис. 1, б), располагаясь все время в плоскости орбиты. Введем системы координат:  $OXY$  – инерциальная с началом в притягивающем центре  $O$ ;  $O_i X_i Y_i$  – связанная с  $i$ -м звеном, при этом ось  $X_i$  направлена вдоль звена от массы  $m_{i-1}$  к массе  $m_i$ , начало системы координат совпадает с точечной массой  $m_{i-1}$ . Положение  $i$ -го звена будем характеризовать вектором  $\bar{r}_i$ , соединяющим точки  $m_{i-1}$  и  $m_i$ . Совокупность параметров векторов  $\bar{r}_i$  примем в качестве координат, определяющих положение цепи.

Уравнения динамики  $i$ -го звена определяются очевидным соотношением [ 1 ]:

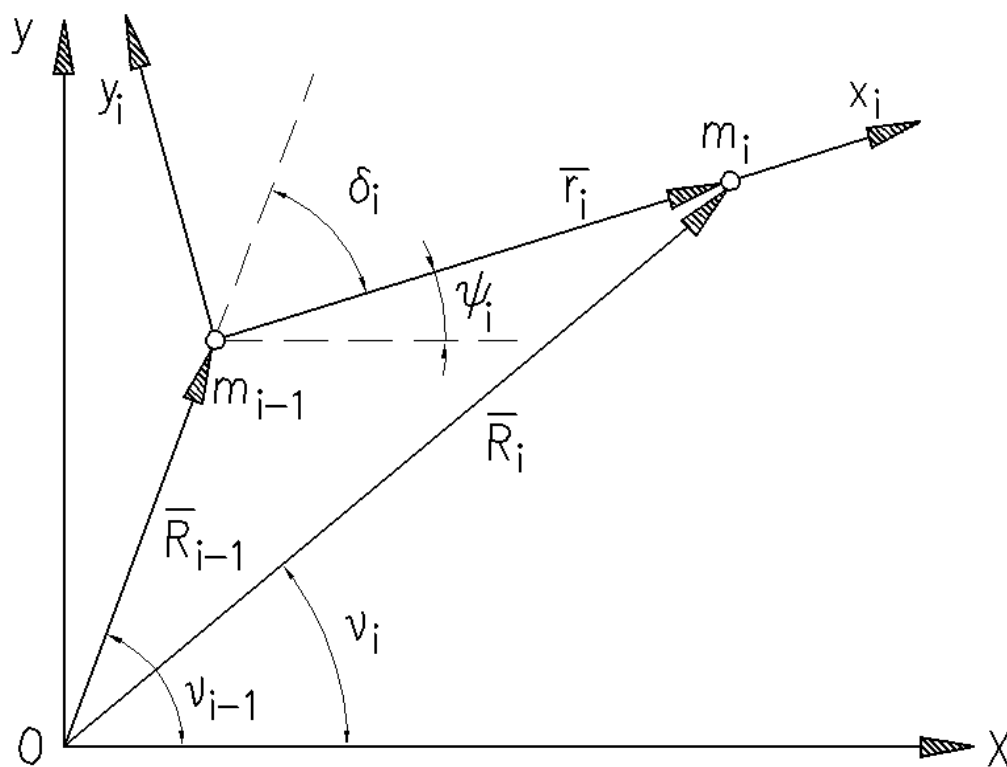
$$\ddot{\bar{r}}_i = \ddot{\bar{R}}_i - \ddot{\bar{R}}_{i-1} = \frac{1}{m_i} (\bar{P}_i + \bar{T}_i - \bar{T}_{i+1}) - \frac{1}{m_{i-1}} (\bar{P}_{i-1} + \bar{T}_{i-1} - \bar{T}_1), \quad (1)$$

или в более удобной форме:

$$\ddot{\bar{r}}_i = \frac{\bar{T}_i}{m_i^{np}} - \frac{\bar{T}_{i+1}}{m_i} - \frac{\bar{T}_{i-1}}{m_{i-1}} + \bar{Q}_i, \quad (2)$$



a



б

Рисунок 1

где

$$\bar{Q}_i = \frac{\bar{P}_i}{m_i} - \frac{\bar{P}_{i-1}}{m_{i-1}}; \quad m_i^{\text{np}} = \frac{m_i \cdot m_{i-1}}{m_i + m_{i-1}}. \quad (3)$$

Пусть  $l_i$  и  $\psi_i$  – модуль и угол вектора  $\bar{r}_i$  в системе координат OXY. Из равенств, выражающих проекции  $\bar{r}_i$  на оси  $X_i$  и  $Y_i$  через  $l_i$  и  $\psi_i$  можно получить проекции вектора  $\bar{r}_i$  на эти же оси:

$$(\ddot{\bar{r}}_i)_{x_i} = \ddot{l}_i - l_i \dot{\psi}^2; \quad (4)$$

$$(\ddot{\bar{r}}_i)_{y_i} = l_i \ddot{\psi} + 2\dot{l}_i \dot{\psi}.$$

Разобьем вектор  $\bar{Q}_i$  на три составляющие:  $\bar{Q}_{i\text{ц}}$ , обусловленную силой тяготения;  $\bar{Q}_{iA}$ , обусловленную аэродинамическими силами и  $\bar{Q}_{iB}$ , вызванную произвольными внешними силами  $\bar{P}_{iB}$ . Получим выражения для первых двух составляющих. Обратимся к рис. 2.

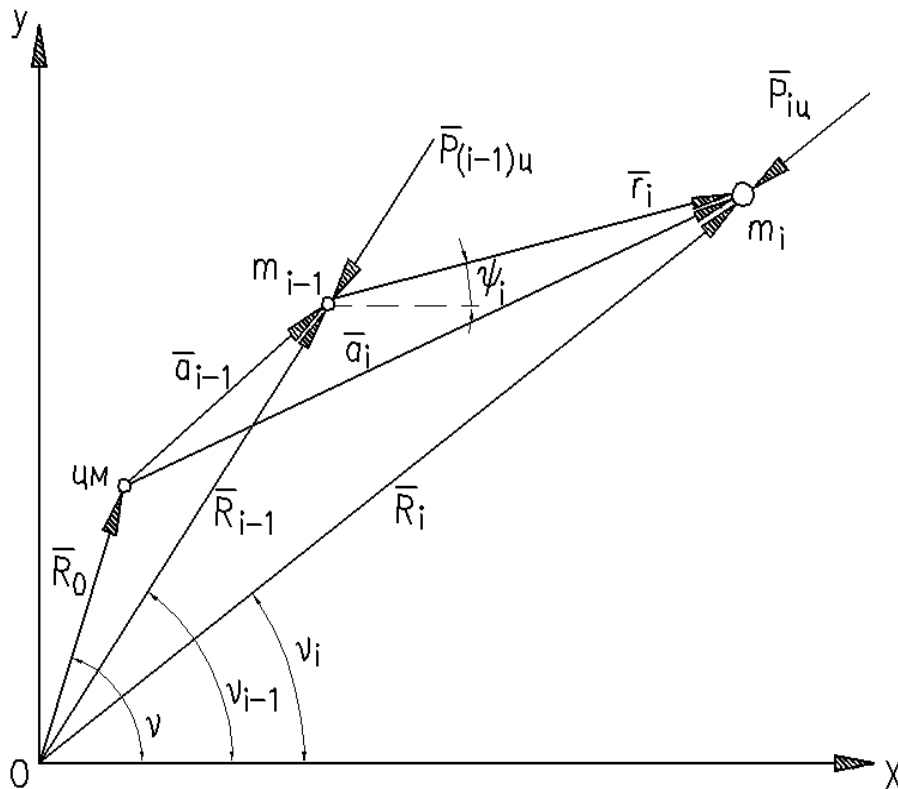


Рисунок 2

Используя закон всемирного тяготения, после некоторых преобразований получаем

$$\bar{P}_{(i-1)ц} \approx -\frac{\mu}{R_o^3} \left[ m_{i-1} - 3 \frac{(\bar{R}_o \cdot \bar{a}_{i-1})}{R_o^2} m_{i-1} \right] \bar{R}_o - \frac{\mu m_{i-1}}{R_o^3} \bar{a}_{i-1}; \quad (5)$$

$$\bar{P}_{iу} \approx -\frac{\mu}{R_o^3} \left[ m_i - 3 \frac{(\bar{R}_o \cdot \bar{a}_i)}{R_o^2} m_i \right] \bar{R}_o - \frac{\mu m_i}{R_o^3} \bar{a}_i,$$

где  $\bar{R}_{i\text{ц}}$  – сила тяготения, действующая на  $i$ -ю массу;

$\bar{a}_i$  – единичный вектор, направленный вдоль линии связи;

$\bar{R}_0$  – вектор, соединяющий притягивающий центр  $O$  и центр масс рассматриваемой цепи материальных точек. Используя эти равенства (5), на основе (3) можно записать

$$\bar{Q}_{iu} = 3 \frac{\mu}{R_0^3} \ell_i \cos(v - \psi_i) \frac{\bar{R}_0}{R_0} - \frac{\mu}{R_0^3} \bar{r}_i. \quad (6)$$

Проектируя (6) на оси  $X_i, Y_i$ , приходим к равенствам:

$$\begin{cases} (\bar{Q}_{iu})_{xi} = \frac{\mu}{R_0^3} \ell_i [3 \cos^2(v - \psi_i) - 1]; \\ (\bar{Q}_{iu})_{yi} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{R_0^3} \ell_i \sin 2(v - \psi_i). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь и в предыдущем равенстве  $v$  есть угол между вектором  $\bar{R}_0$  и осью  $X$ .

Прежде чем найти выражение для аэродинамической составляющей вектора  $\bar{Q}_i$ , отметим, что в силу реальных соотношений между величинами векторов  $\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i-1}$  с одной стороны и  $\bar{R}_0, \bar{R}_i, \bar{R}_{i-1}$  с другой (рис. 2), можно с большой степенью точности записать.

$$v_i \approx v, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обратимся теперь к рис. 3. Здесь  $\bar{P}_{iA}$  и  $\bar{P}_{(i-1)A}$  – векторы аэродинамических сил, действующих на точечные массы  $m_i$  и  $m_{i-1}$ . Штрихпунктирная линия определяет направление на притягивающий центр. Будем полагать орбиту круговой, в связи с чем векторы  $\bar{P}_{iA}$  и  $\bar{P}_{(i-1)A}$  располагаются перпендикулярно к радиусу-вектору орбиты. Величина аэродинамической силы определяется известным соотношением:

$$P = C_x \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot S, \quad (8)$$

где  $C_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;

$\rho$  – плотность атмосферы;

$v$  – скорость тела;

$\frac{\rho v^2}{2}$  – скоростной напор;

$S$  – площадь поперечного сечения тела.

Используя (8), на основе (3) получаем выражения для проекций вектора  $\bar{Q}_{iA}$  на оси связанной системы координат

$$\begin{cases} (\bar{Q}_{iA})_{xi} = -\gamma_{Ai}^v \sin(v - \psi_i); \\ (\bar{Q}_{iA})_{yi} = -\gamma_{Ai}^v \cos(v - \psi_i), \end{cases} \quad (9)$$

где  $\gamma_{Ai}^v = \left( \frac{C_{xi} S_i}{m_i} - \frac{C_{xi-1} S_{i-1}}{m_{i-1}} \right) \frac{\rho v^2}{2}$  ;

$v = \Omega t$ ;

$\Omega = \text{const}$  – орбитальная угловая скорость. (10)

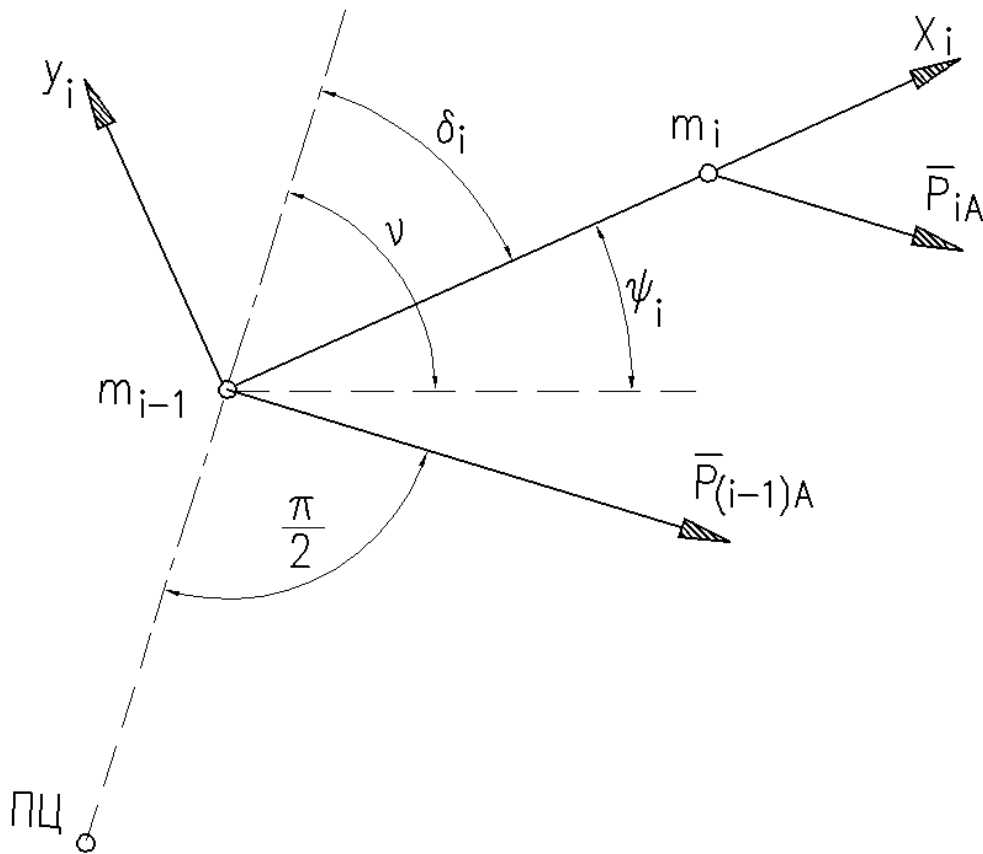


Рисунок 3

Введем угол  $\delta_i$  между  $i$ -м звеном цепи и направлением из притягивающего центра на центр масс цепи:

$$\delta_i = \nu - \psi_i. \quad (11)$$

С учетом этого обозначения записываем уравнения движения цепи, проецируя равенства (2) на оси связанной системы координат. Используя (4), (7) и (11), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\ell}_i - \ell_i (\dot{\nu} + \dot{\delta}_i)^2 &= \frac{T_i}{m_i^{np}} - \frac{T_{i+1}}{m_i} \cos(\delta_{i+1} - \delta_i) - \frac{T_{i-1}}{m_{i-1}} \cos(\delta_{i-1} - \delta_i) + \\ &+ \frac{\mu}{R_0^3} \ell_i (3 \cos^2 \delta_i - 1) + (\bar{Q}_{iA})_{x_i} + (\bar{Q}_{iB})_{x_i}, \\ \ell_i (\ddot{\nu} + \ddot{\delta}_i) + 2\dot{\ell}_i (\dot{\nu} + \dot{\delta}_i) &= -\frac{T_{i+1}}{m_i} \sin(\delta_{i+1} - \delta_i) - \frac{T_{i-1}}{m_{i-1}} \sin(\delta_{i-1} - \delta_i) - \\ &- \frac{3}{2} \frac{\mu}{R_0^3} \ell_i \sin 2\delta_i + (\bar{Q}_{iA})_{y_i} + (\bar{Q}_{iB})_{y_i} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Эти уравнения целесообразно преобразовать, используя равенства (9) и перейдя к дифференцированию по  $\nu$ . Обозначим

$$z' = \frac{dz}{d\nu}, \quad \mathbf{a} \dot{z} = \frac{dz}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{dt}.$$

Тогда с учетом (10) очевидно равенство

$$z' = \frac{\dot{z}}{\Omega}. \quad (13)$$

Теперь уравнения (12) с учетом того, что круговая скорость  $V = \Omega \cdot R_0$ , можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \ell_i'' - \ell_i(1 + \delta_i')^2 &= \frac{T_i}{m_i^{np} \Omega^2} - \frac{T_{i+1} \cos(\delta_{i+1} - \delta_i)}{m_i \Omega^2} - \\ &- \frac{T_{i-1} \cos(\delta_{i-1} - \delta_i)}{m_{i-1} \Omega^2} + \ell_i(3 \cos^2 \delta_i - 1) + \gamma_{Ai} \sin \delta_i + \frac{(Q_{ie})_{xi}}{\Omega^2}; \\ \delta_i'' + \frac{2\ell_i'(1 + \delta_i')}{\ell_i} &= \frac{T_{i+1} \sin(\delta_{i+1} - \delta_i)}{\ell_i m_i \Omega^2} - \frac{T_{i-1} \sin(\delta_{i-1} - \delta_i)}{\ell_i m_{i-1} \Omega^2} - \\ &- \frac{3}{2} \sin 2\delta_i + \frac{\gamma_{Ai}}{\ell_i} \cos \delta_i + \frac{(\overline{Q}_{ie})_{yi}}{\ell_i \Omega^2}, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

где

$$\gamma_{Ai} = \frac{\rho R_0^2}{2} \left( \frac{C_{xi-1} S_{i-1}}{m_{i-1}} - \frac{C_{xi} S_i}{m_i} \right). \quad (15)$$

Уравнения (12) и (14) являются вариантами записи искомой математической модели динамика цепи материальных точек. Вид связей определяется соотношением для  $T_i$ . Так, для случая  $n$  свободных тел достаточно положить

$$T_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дифференцирование в уравнениях (12) выполняется по  $v$ . Учитывая, что  $\ell_i < R_i$ , можно считать  $v_{i-1} = v_i = v$ .

Рассмотрим двухмассовую систему. Полагая в (14)  $Q_{ie} = 0$ ,  $\ell' = \ell'' = 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{T}{m_{np} \cdot \Omega^2 \ell} &= \delta^2 + 3 \cos \delta + 2\delta' + \gamma_A \cdot \sin \delta; \\ \delta'' + \frac{3}{2} \sin 2\delta - \gamma_A \cos \delta &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для связанного движения необходимо выполнение условия  $T > 0$ , т.е.

$$-\frac{T}{m_{np} \Omega^2 \ell} = \delta^2 + 2\delta' + 3 \cos^2 \delta + \gamma_A \sin \delta > 0. \quad (17)$$

Поэтому из уравнения (17) можно найти усилие в связи при ориентации связки по радиусу-вектору ( $\delta = \delta' = 0$ ):

$$T_{rp} = 3m_{np} \Omega^2 \cdot \ell. \quad (18)$$

Второе уравнение системы (16) характеризует колебание связки вокруг центра масс.

Первый интеграл этого уравнения равен

$$(\delta')^2 + 3 \sin^2 \delta - 2\gamma_A \cdot \sin \delta = h, \quad (19)$$

где  $h$  – постоянная интегрирования;

$\gamma_A$  – разница аэродинамических сил.

В соответствии с формулой (19) фазовый портрет системы определяется величиной аэродинамических сил (15) при заданных значениях  $h$ , так как

$$\delta = \pm \sqrt{h + 2\gamma_A \sin \delta - 3 \sin^2 \delta}, \quad (20)$$

Члены подкоренного выражения в (20), содержащие  $\delta$ , можно преобразовать к виду

$$2\gamma_A \sin \delta - 3 \sin^2 \delta = 3 \left( \frac{\gamma_A}{3} \right)^2 - 3 \left( \sin \delta - \frac{\gamma_A}{3} \right)^2. \quad (21)$$

Из выражения (21) следует, что вид стационарного режима зависит от соотношения значений  $\sin \delta$  и  $\frac{\gamma_A}{3}$ . При значениях  $\gamma_A$  в диапазоне  $0 \leq \gamma_A \leq 3$  реализуются наклонные положения связки с углами наклона от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Угол наклона определяется соотношением аэродинамических и гравитационных сил.

Однако наклонные стационарные режимы движения связки использовать нецелесообразно в связи с большой нестабильностью угла наклона, обусловленной изменением плотности атмосферы.

Используя выражение для аэродинамических сил и помня, что баллистический коэффициент  $\mathfrak{B}_i = \frac{C_{xi} \cdot S_i}{2 \cdot m_i}$ , запишем выражение для  $\gamma_A$  в виде

$$\gamma_A = \frac{R_0^2}{2} \cdot (\mathfrak{B}_{i-1} \cdot \rho_{i-1} - \mathfrak{B}_i \cdot \rho_i).$$

Вертикальное стационарное движение связки возможно только при значении  $\gamma_A = 0$ , т.е. при равенстве аэродинамических сил, действующих на тела  $i$  и  $i-1$ . Это условие может быть выполнено в двух случаях: при отсутствии сопротивления атмосферы или при равенстве произведения баллистических коэффициентов тел  $\mathfrak{B}_i$  на плотность атмосферы

$$\mathfrak{B}_{i-1} \cdot \rho_{i-1} = \mathfrak{B}_i \cdot \rho_i.$$

Указанные условия вследствие значительных колебаний плотности на разной высоте практически невыполнимы.

Ряд ограничений по возможности применения вертикальной связки определяется материалом гибкой связки. Реально такая связь может быть создана на основе сверхвысокомодульных полиамидных материалов, например СВМ, обладающих высоким отношением значений прочности к весу, превосходя в несколько раз лучшие сорта высокопрочных сталей (плотность –  $1,45 \text{ г/см}^3$ , предел прочности  $\sigma = 200 \dots 300 \text{ кг/мм}^2$ ). Хотя модуль упругости СВМ большой ( $E = 13000 \text{ кг/мм}^2$ ), необходимо учитывать силы упругости нити. Величина этой силы определяется силой трения между соприкасающимися участками нити и трением между

волокнами нити, а также величиной остаточных напряжений, стремящихся вернуть нить в свернутое состояние.

Экспериментальные оценки упругих и диссипативных свойств жгута из 5 нитей СВМ позволили оценить порядок значений жесткости  $C = 120-250 \text{ н.м}^{-1}$  для жгута длиной 100 м и коэффициента диссипации  $\gamma^* = 0,2-0,4$ . Диссипация энергии в гибкой связи рассматривалась как результат гистерезисных потерь в материале волокон и трения между волокнами [2]. В связи с малостью (и соизмеримостью) гравитационных сил и сил упругости связи требуемое условие удержания тел на заданном удалении друг от друга может нарушаться. Под действием этих сил может происходить неуправляемое чередование периодов с натянутой и ослабленной связями. Связь может сворачиваться в спираль, а учитывая влияние массы связи – образовывать петли; по-видимому, могут также возникать и внутренние напряжения под действием факторов космической среды.

При переводе связки в либрационное движение эти эффекты будут усиливаться в связи с уменьшением согласно формуле (7), силы натяжения нити по мере отхода связки от местной вертикали.

Возможным способом увеличения силы натяжения гибкой нити является закрутка связки с угловой скоростью, обеспечивающей значение натяжения в нити, превышающее силы упругости и силы трения в гибкой нити.

## Выводы

Разработана математическая модель движения космических аппаратов, связанных между собой тросовой системой и размещенных по радиусу-вектору орбиты с заданным расстоянием между ними. На основе этой модели показано, что для реализации такой структуры действие гравитационных сил недостаточно и необходимо применение двигательных установок, датчиков положения и демпферов.

## Список использованных источников

1. Ермилов Ю.А. Управление сближением космических аппаратов / Ю.А. Ермилов, Е.Е. Иванов, С.В. Пантюшин – М.: Наука, 1977. – 448 с.
2. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях / Г.С. Писаренко – К.: Наук. думка, 1985. – 240 с.

*Поступила в редакцию 20.04.2009 г.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Гайдачук,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", г. Харьков*