УДК 658.012.34(075.8)

С.С. Куреннов, канд. техн. наук,
Д.Е. Завадская

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ВЕРОЯТНОСТНЫМ СПРОСОМ

Управление запасами является неотъемлемой частью управления производством и распределением ресурсов. Одним из методов повышения эффективности работы является уменьшение расходов и синхронизация работы подразделений, что достигается путем глобальной оптимизации работы всей организации с учетом взаимного влияния различных подразделений. В условиях рыночной экономики и при отсутствии плана производства актуальны модели, учитывающие вероятностную природу спроса, производства и сроков доставки.

Постановка задачи. Рассматривается распределительная сеть, для каждого узла которой известны закон распределения спроса, штраф за недостачу и запасы, оставшиеся после предыдущего перераспределения. Некоторые из узлов являются производителями ресурса, т.е. в начале каждого периода имеют значительный запас. Кроме того, известны расстояния между узлами и задана функция транспортных затрат. В системе действует периодическая стратегия пополнения запасов, т.е. в начале каждого периода принимается решение о том, какие из узлов запас отдают, а какие получают, и определяются объемы поставок. Стоимость хранения предполагается одинаковой для всех узлов и поэтому в целевую функцию не входит.

Децентрализация системы заключается в том, что отсутствует привязка потребителя к поставщику, и задача выбора решается на основании информации об имеющихся запасах во всех узлах сети, штрафах и остальных параметрах в начале очередного периода.

Впервые подобную задачу рассмотрел S.G. Allen в 60-х годах прошлого века. Предложенный им метод решения опубликован в классических работах Ю.И. Рыжикова по управлению запасами [1, 2]. Задача формулируется следующим образом: ожидаемые затраты за период T до очередного пополнения состоят из суммы математических ожиданий штрафов у поставщиков (первая сумма), штрафов у получателей (вторая сумма) и транспортных расходов:

$$L = \sum_{j\in M^-} p_j \int\limits_{z_j + \sum\limits_{i\in M^+} q_{ij}}^{\infty} \left(x - z_j - \sum_{i\in M^+} q_{ij} \right) f_j(x)dx +$$

$$+ \sum_{i\in M^+} p_i \int\limits_{z_i - \sum\limits_{j\in M^-} q_{ij}}^{\infty} \left(x - z_j - \sum_{j\in M^-} q_{ij} \right) f_i(x)dx + \sum_{j\in M^-} \sum_{i\in M^+} c_{ij} q_{ij} \,,$$

где c_{ij} – цена единичной перевозки между узлами $i-j$, $j, i = 1, 2, ..., n$;

q_{ij} – объем перевозок между этими складами;

z_j – наличный запас на складе j;

p_j – цена штрафа на складе j;

$f_i(x)$ - плотность распределения спроса на складе j;

M^- – множество складов, которые получают запас при перераспределении;

M^+ – множество складов, которые отдают запас при перераспределении.

На переменные наложены ограничения в виде неравенств на неотрицательность запаса после перераспределения

$$z_i - \sum_{j \in M^-} q_{ij} \geq 0,\ i \in M^+,$$

и очевидные ограничения $q_{ij} \geq 0$.

Алгоритм, который предложил S.G. Allen, заключается в предварительном определении состава множеств поставщиков и получателей и последующем решении системы уравнений $\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = 0$ для всех пар целесообразных перевозок. Однако возможна ситуация, в которой стоимость перевозки в некоторый пункт равняется сумме стоимостей перевозки до промежуточного пункта и из него в конечный пункт, т.е. выполняется условие

$$c_{ij} = c_{ik} + c_{kj}.$$

Это условие соответствует вполне реальной ситуации отсутствия прямых дорог между всеми узлами сети, т.е. наличию транзитных перевозок. Следствием этого является возможность реализовать перераспределение запасов различными способами с одинаковой стоимостью, где один и тот же элемент системы является и потребителем и получателем товара. Наличие множества альтернативных оптимальных решений обуславливает расходимость численных методов решения разрешающей системы уравнений.

Чтобы исключить наличие бесконечного числа альтернативных оптимальных планов, предложено ввести нелинейную функцию транспортных затрат. Замена функции транспортных затрат в целевой функции, вызвана, с одной стороны, стремлением обусловить единственность решения, а с другой - более точно отразить реальную структуру транспортных расходов. Последние включают в себя фиксированную надбавку за выход машины на маршрут (она зависит от типа машины и протяженности маршрута) и переменную составляющую, зависящую от объема груза и связанную со временем и стоимостью погрузочно-разгрузочных работ, страховкой и т.д. Однако в нуле такая функция равна нулю, т.е. имеется изолированная точка

$$C_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}q_{ij} + d_{ij}, & q_{ij} > 0, \\ 0, & q_{ij} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Это обстоятельство исключает применение градиентных методов минимизации. Поэтому было предложено заменить эту функцию близкой, но всюду дифференцируемой:

$$C_{ij}(q_{ij}) = c_{ij}q_{ij} + d_{ij} - d_{ij} \Bigg/ \left[\left(\frac{q_{ij}}{a} \right)^n + 1 \right], \quad (2)$$

где a и n - параметры приближения. В дальнейших расчетах для определенности полагаем $a = 1$ и $n = 2$.

Кроме того, для удобства предложено также рассматривать склады отдельно от торговых центров, т.е. остаток запаса z_i в узле i после перераспределения $z_i - \sum\limits_{j \in M^-} q_{ij}$ соответствует транспортировке q_{ii} с нулевой стоимостью затрат.

Целевая функция состоит из суммы математического ожидания штрафов за дефицит по всем узлам сети и транспортных расходов:

$$L_T = \sum_{j=1}^{n} \left\{ p_j \int\limits_{z_j - \sum\limits_{i=1}^{N} q_{ij}}^{\infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \right) f_j(x) dx \right\} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} C_{ij}(q_{ij}), \quad (3)$$

где $C_{ij}(q_{ij})$ - стоимость доставки из узла i в узел j груза q_{ij}, при этом

$$C_{ij}(0) \equiv 0 \text{ и } C_{ii}(q_{ii}) \equiv 0;$$

N - число узлов в сети.

Необходимо найти минимум функции (3) при выполнении условий полного вывоза запаса из склада

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = z_i, \; i = 1,2,\ldots,n. \quad (4)$$

При условии неотрицательности перевозимого груза $q_{ij} \geq 0$.

Таким образом, задача содержит комбинаторные неизвестные $i - j$ и соответствующие непрерывные неизвестные q_{ij}. Для минимизации целевой функции (3) можно использовать градиентные методы. Однако поскольку функция затрат (2) (как собственно и (1)) выпуклая, то целевая функция может иметь локальные оптимумы [3], и глобальный минимум среди них может быть не найден.

Чтобы найти приближенное решение задачи предлагается использовать метод случайного поиска и локальной минимизации [3]. При этом начальный опорный план выбирается случайно, а затем с помощью градиентного метода оптимизации достигаться локальный минимум. Выполнив множество прогонок, выбираем наилучшее из найденных оптимальных решений.

Необходимо отметить, что наличие фиксированных доплат в транспортных расходах обуславливает невыгодность использования для перераспределения большого числа машин. Выгоднее из узлов с малыми запасами товар не перемещать, а пополнять запас товаром из узлов с избыточным запасом. Кроме того, при больших значениях d_{ij} очевидна невыгодность поставки в один узел товара из нескольких узлов. Это условие используем в изложенном ниже алгоритме.

Алгоритм решения:

1. Формируем списки получателей и поставщиков, для чего минимизируем штрафы без учета транспортных расходов, и определяем количество элементов в списках – числа U (получатели) и V (поставщики).

Возникающую при этом систему уравнений

$$\begin{cases} p_i \int\limits_{\tilde{S}_i}^{\infty} f_i(x)dx = p_1 \int\limits_{\tilde{S}_1}^{\infty} f_1(x)dx, \quad i = 2,...,n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{S}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i. \end{cases} \tag{5}$$

решаем, например, с помощью метода Ньютона.

Сравнивая полученные результаты с имеющимися в наличии запасами, разделяем элементы системы на соответствующие множества

$$i \in M^+, \text{ если } \tilde{S}_i < z_i,$$

$$i \in M^-, \text{ если } \tilde{S}_i > z_i.$$

2. Задаем P - число прогонов.
3. Если $P = 0$ то останавливаем счет.
4. Формируем случайным образом начальный опорный план, который представляет собой матрицу $N \times N$, в которой диагональные элементы, принадлежащие M^+, равны z_j, а элементы строк, соответствующих M^- (число таких строк V), равны случайным величинам, ограниченным, например, математическим ожиданием спроса в этом узле.

5. Начальный опорный план улучшаем, для чего используем метод градиентного спуска:

a) для ненулевых недиагональных элементов матрицы опорного плана вычисляем производные

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = -p_i \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{N} q_{k,j}}^{\infty} f_j(x)dx + c_{ij} + d_{ij} \left(\frac{q_{ij}}{a}\right)^{n-1} \Bigg/ a\left(\left(\frac{q_{ij}}{a}\right)^{n} + 1\right)^2 ;$$

b) эти элементы плана перевозок изменяем $q_{ij} := q_{ij} - \delta \dfrac{\partial L}{\partial q_{ij}}$, где δ - шаг, подбираемый экспериментально;

c) вычисляем остаток у поставщика $q_{ii} = z_i - \sum q_{ij}$;

d) округляем значения до транзитной нормы, проверяем условие неотрицательности; если получили отрицательный запас, то назначаем его нулевым, корректируя соответствующим образом поставки из этого пункта;

e) если значение целевой функции уменьшилось, то возвращаемся в пункт (a), если иначе, то $\delta := \delta / 2$;

f) если несколько раз подряд значение L оставалось неизменным, то локальный минимум достигнут. Переходим в пункт (6).

g) возвращаемся в пункт (a).

6. Сравниваем полученное значение целевой функции с текущим минимальным значением L_{min} (начальное значение $L_{min} = \infty$). Если $L < L_{min}$, то:

- $L_{min} := L$;
- запоминаем текущий план перевозок.

7. $P := P - 1$;
8. Возвращаемся в пункт 3.

Модельная задача. Ставится задача об оптимальном распределении запаса на сети, включающей в себя 6 элементов. Матрицы параметров d_{ij} и c_{ij} функции транспортных затрат (2) имеют вид

$$D=\{d_{ij}\}_{i,j=1}^{6}=\begin{pmatrix}0 & 1400 & 1100 & 1300 & 800 & 400\\ & 0 & 500 & 1500 & 1300 & 1800\\ & & 0 & 700 & 600 & 1500\\ & & & 0 & 300 & 800\\ & & & & 0 & 500\\ & & & & & 0\end{pmatrix};$$

$$C=\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{6}=\begin{pmatrix}0 & 21 & 16 & 20 & 13 & 6\\ & 0 & 6 & 23 & 19 & 27\\ & & 0 & 10 & 9 & 22\\ & & & 0 & 4 & 12\\ & & & & 0 & 8\\ & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

Матрицы симметричны, поэтому показываем половину, подразумевая в дальнейшем, что $d_{ij}=d_{ji}$ и $c_{ij}=c_{ji}$. Впрочем, в более общем случае эти условия могут и не выполняться. Параметр d_{ij} соответствует стоимости рейса машины по маршруту $i-j$, а c_{ij} - стоимости погрузочно-разгрузочных работ единицы груза на этом маршруте.

Закон распределения спроса принимаем нормальным $f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$, поскольку для большинства товаров спрос обеспечивается большим числом независимых покупателей. Математические ожидания и дисперсии спроса назначаем следующими:

$$m=\{m_i\}_{i=1}^{6}=(89\quad 80\quad 150\quad 60\quad 112\quad 51)^T;$$

$$\sigma=\{\sigma_i\}_{i=1}^{6}=\frac{\{m_i\}_{i=1}^{6}}{10}=(8{,}9\quad 8\quad 15\quad 6\quad 11{,}2\quad 5{,}1)^T.$$

Штрафы за единичную недостачу

$$P=\{p_i\}_{i=1}^{6}=(100\quad 400\quad 500\quad 200\quad 200\quad 150)^T.$$

Необходимо отметить, что назначение штрафов – достаточно сложная задача. Штрафы назначаются с учетом множества факторов – известности товара и фирмы на рынке, активности конкурентов и т.д.

Остатки на складах после предыдущего периода:

$$Z=\{z_i\}_{i=1}^{6}=(450\quad 32\quad 21\quad 215\quad 52\quad 28)^T.$$

По сути, они являются случайными числами и зависят от поставок в предыдущие периоды и спроса в течение периодов, однако на момент принятия решения о перевозках запасы являются известными.

Решение системы (5) имеет следующий вид

$$\tilde{S} = \left\{\tilde{S}_i\right\}_{i=1}^{6} = \left(129{,}5 \quad 118{,}8 \quad 222{,}8 \quad 88{,}2 \quad 164{,}9 \quad 73{,}8\right)^T.$$

Сравнивая этот результат с наличными запасами z_i, формируем списки M^+ и M^-:

$$M^+ = \{2 \quad 3 \quad 5 \quad 6\}, \qquad M^- = \{1 \quad 4\},$$

т.е. $U = 4$ и $V = 2$. После этого согласно изложенному выше алгоритму на каждом прогоне выбирают опорный план в виде матрицы 6×6, в которой диагональные элементы, принадлежащие M^+, равны соответствующим остаткам z_i, а в строчках M^- случайным образом выбирают направления поставок в узлы M^+ (в каждый узел – один маршрут) и задаются начальные значения объемов поставок.

Затем эти значения оптимизируют по методу градиентного спуска. Выполнив несколько сотен прогонов, получим наилучший план перевозок и запасы после пополнения

$$T = \begin{pmatrix} 206 & 60 & 154 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 137 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 206 \\ 92 \\ 175 \\ 137 \\ 130 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Сравнив запасы Q с математическими ожиданиями спроса m, убеждаемся в том, что для данного уровня штрафов и дисперсии распределения спроса оптимальные запасы несколько превышают математические ожидания. Можно убедиться также в том, что при уменьшении штрафов объем перевозок уменьшается, а некоторые перевозки вообще становятся нецелесообразными.

Список использованных источников

1. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами / И.Ю. Рыжиков. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
2. Рыжиков Ю.И. Управление запасами / И.Ю. Рыжиков. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
3. Корбут А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1996. – 368 с.

Поступила в редакцию 16.12.2009.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков