

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПОЛОК БАЛКИ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Балки являются распространенными элементами конструкций большинства технических объектов. В настоящее время широко применяются балки, которые работают одновременно на изгиб и растяжение-сжатие (лонжерон с подкосом, балочный фюзеляж, балочная нервюра, балки в конструкциях зданий, мостов и т.п.). При решении прямой задачи, когда известна геометрия сечения балки, легко определить, растянута полка или сжата, а соответственно найти и пределы прочности. Но при решении обратной задачи, т.е. при проектировании, мы не можем оценить, как работает полка – на растяжение или сжатие, поэтому неизвестно, какой предел прочности принимать.

Для определения нормальных напряжений можно записать формулу

$$\sigma_x = \frac{ME_j y^*}{(EI)_{z^*}} + \frac{N_x E_j}{(EF)}, \quad (1)$$

где  $(EF) = \sum E_j f_j$  – осевая жесткость балки (без учета стенки);

$(EI)_{z^*}$  – изгибная жесткость относительно оси  $z^*$ , проходящей через механический центр тяжести (эту величину еще называют механическим моментом инерции);

$f_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го элемента поперечного сечения (полка, заплечиков, стенки).

Преобразовав формулу (1), получим выражения для определения нормальных напряжений в верхней и нижней полках:

$$\begin{aligned} \sigma_\delta &= \frac{N_\delta}{b_\delta \delta_\delta} = \frac{1}{H_{\text{эф}} b_\delta \delta_\delta} \left[ M_z + N_x \left( y_N - \frac{\delta_H}{2} \right) \right] \leq F_\delta; \\ \sigma_H &= \frac{N_H}{b_H \delta_H} = \frac{1}{H_{\text{эф}} b_H \delta_H} \left[ -M_z + N_x \left( H - y_N - \frac{\delta_\delta}{2} \right) \right] \leq F_H, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F_\delta = F_{\delta p} \vee F_{\delta c}$ ;  $F_H = F_{H p} \vee F_{H c}$ ;

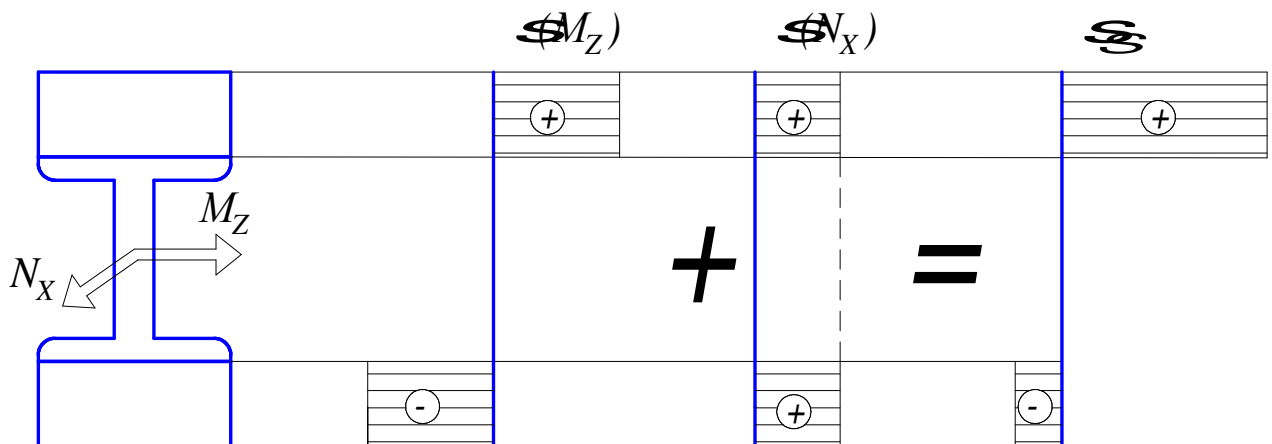
$F_{\delta p}$ ,  $F_{\delta c}$ ,  $F_{H p}$ ,  $F_{H c}$  – пределы прочности на растяжение и сжатие материала верхней и нижней полки соответственно.

Записав выражения (2) в виде равенств и учтя выражения для  $H_{\text{эф}}$ , после ряда преобразований получим систему уравнений:

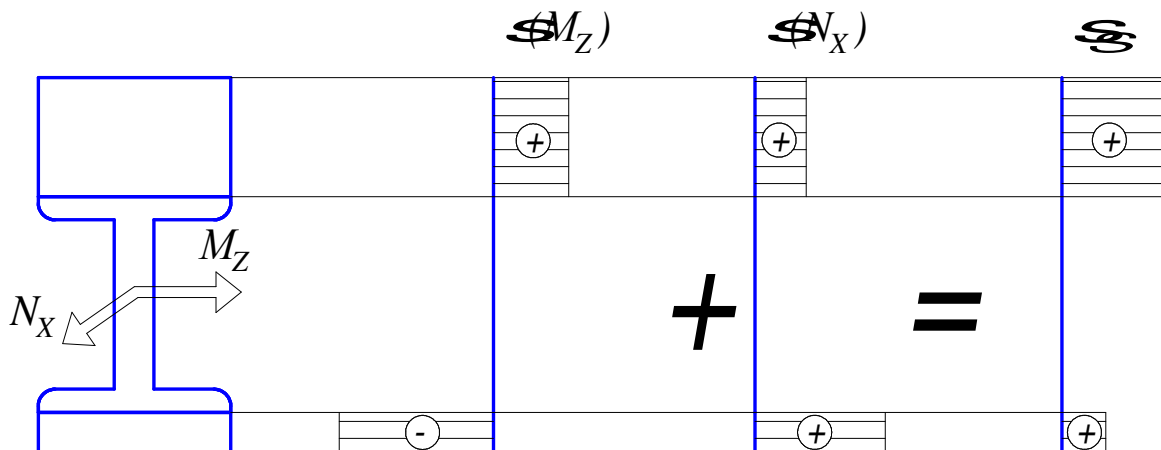
$$\frac{2M_z + N_x (2y_N - \delta_H)}{(2H - \delta_\delta - \delta_H) b_\delta \delta_\delta} = F_\delta;$$

$$\frac{2M_z + N_x(2H - 2y_N - \delta_6)}{(2H - \delta_6 - \delta_H)b_H\delta_H} = F_H. \quad (3)$$

Анализ этой системы уравнений показывает, что ее можно решить при наличии ответа на вопрос о численных значениях  $F_6$  и  $F_H$ . Из курса механики материалов известно, что на основе принципа суперпозиции напряжения от изгибающего момента и от осевой силы алгебраически суммируются. При заданных значениях толщин могут иметь место схемы напряженного состояния, показанные на рисунке (работа стенки на изгиб не учитывается и напряжения от изгиба осреднены по толщине полки), когда нельзя утверждать, что  $F_6 = F_P$ , а  $F_H = F_C$ .



а



б

### Варианты эпюр напряжений в полках балки

Пусть спроектированы полки только по изгибающему моменту и к этой балке прикладывается растягивающая сила. Тогда верхняя полка оказывается перегруженной и для снижения напряжений необходимо увеличить ее площадь. При этом в нижней полке напряжения явно будут

ниже пределов прочности и, изменяя площадь полки (ее уменьшаем), очевидно, можно добиться равенства действующих напряжений и какого-либо из пределов прочности – на растяжение или сжатие. Но какого?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим решение уравнений (3) относительно двух переменных: эффективной высоты балки  $H_{\text{эф}}$  и толщины нижней полки  $\delta_H$ . Преобразовав уравнения (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{2M_z + N_x(2y_N - \delta_H)}{2H_{\text{эф}}(2H - 2H_{\text{эф}} - \delta_H)b_\delta} &= F_\delta; \\ \frac{-2M_z + N_x(2H_{\text{эф}} + \delta_H - 2y_N)}{2H_{\text{эф}}b_H\delta_H} &= F_H. \end{aligned} \quad (4)$$

После сложения левых частей найдем

$$N_x = F_\delta b_\delta (2H - 2H_{\text{эф}} - \delta_H) + F_H b_H \delta_H. \quad (5)$$

Выразим отсюда  $\delta_H$  и подставим в первое уравнение системы (4), откуда находим  $2H_{\text{эф}}$ , и также, выразив из (5)  $2H_{\text{эф}}$  и подставив во второе уравнение системы (4), находим  $\delta_H$ :

$$\begin{aligned} 2H_{\text{эф}} &= H + i_H F_\delta b_\delta \sqrt{D}; \\ \delta_H &= \frac{N_x - HF_\delta b_\delta + i_\delta \sqrt{D}}{F_H b_H - F_\delta b_\delta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $i_H = \pm 1$ ,  $i_\delta = \pm 1$ ;

$$D = (HF_\delta b_\delta - N_x)^2 + \frac{F_\delta b_\delta - F_H b_H}{F_H b_H} \left[ (2M_z + (2y_N - 2H)N_x)F_\delta b_\delta + N_x^2 \right].$$

Исходя из безусловной положительности эффективной высоты балки  $H_{\text{эф}}$  и толщины нижней полки  $\delta_H$ , в табл. 1 сведены условия, при которых принимаются те или иные пределы прочности для  $F_\delta$  и  $F_H$ , а также значения  $i$ .

Для упрощения таблицы используем тот факт, что в случае, когда две полки находятся в растянутом состоянии ( $F_\delta = F_p$  и  $F_H = F_p$ ) при  $(b_\delta - b_H) > 0$ , всегда соблюдается неравенство  $(N_x - HF_p b_\delta) < 0$ . Докажем это.

Преобразуем уравнение (5) и подставим значения пределов прочности полок:

$$\begin{aligned} N_x &= F_p (b_\delta \delta_\delta + b_H \delta_H); \\ N_x - F_p (b_\delta \delta_\delta + b_H \delta_H) &= 0; \end{aligned}$$

Если доказать, что  $F_p(b_\delta \delta_\delta + b_H \delta_H) < F_p b_\delta H$ , то соответственно будет соблюдаться неравенство  $N_x - F_p b_\delta H < 0$ .

Зная, что  $b_\delta > b_H$ , сделаем замену  $b_H$  на  $b_\delta$ :

$$F_p(b_\delta \delta_\delta + b_H \delta_H) < F_p b_\delta (\delta_\delta + \delta_H) < F_p b_\delta H; \rightarrow N_x - F_p b_\delta H < 0.$$

Неравенство доказано.

Аналогично, при двух сжатых полках ( $F_\delta = -F_c$  и  $F_H = -F_c$ ) при  $(b_\delta - b_H) > 0$  соблюдается неравенство  $(N_x + HF_c b_\delta) > 0$ , а также:

при ( $F_\delta = -F_c$  и  $F_H = F_p$ ) – всегда  $(N_x + HF_c b_\delta) > 0$ ;

при ( $F_\delta = F_p$  и  $F_H = -F_c$ ) – всегда  $(N_x - HF_p b_\delta) > 0$ .

Рассмотрев первое уравнение системы (6), пришли к выводу, что  $i_H = 1$  всегда, так как невозможны неравенства:  $2H_{\delta\phi} < H$ ,  $2H_{\delta\phi} > 2H$ .

Таблица 1 – Значения пределов прочности  $F_B$  и  $F_H$

Условия			Значение $i_\delta$	Значения $F_B$ и $F_H$
Основное	Дополнительное	Вспомогательное		
$N_x^2 - 2Hb_\delta F_p N_x + 2F_p (M_z + y_N N_x)(b_\delta - b_H) < 0$	$2F_p b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 > 0$	$b_\delta - b_H > 0$	-1	$F_B = F_{BP}$ $F_H = F_{HP}$
	$2F_p b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 > 0$ ; $N_x - HF_p b_\delta > 0$	$b_\delta - b_H < 0$	-1	
	$2F_p b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 < 0$		1	
$N_x^2 + 2Hb_\delta F_c N_x - 2F_c (M_z + y_N N_x)(b_\delta - b_H) < 0$	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0$	$b_\delta - b_H > 0$	1	$F_B = F_{BC}$ $F_H = F_{HC}$
	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		-1	
	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0$ ; $N_x + HF_c b_\delta < 0$	$b_\delta - b_H < 0$	1	
	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		-1	
$N_x^2 + 2Hb_\delta F_c N_x - 2(M_z + y_N N_x)(F_c b_\delta + F_p b_H) > 0$	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0$		-1	$F_B = -F_{BC}$ $F_H = F_{HP}$
	$N_x^2 - 2F_c b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		1	
$N_x^2 - 2Hb_\delta F_p N_x - 2(M_z + y_N N_x)(F_p b_\delta - F_c b_H) > 0$	$N_x^2 + 2F_p b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0$		1	$F_B = F_{BP}$ $F_H = -F_{HC}$
	$N_x^2 + 2F_p b_\delta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		-1	

Можно также дополнить табл. 1, рассмотрев условие положительности значений дискриминанта  $D$  (табл. 2).

Таблица 2 – Значения пределов прочности  $F_B$  и  $F_H$  с дополнением условия положительности дискриминантов  $D$ .

Условия		Зна- чение $i_\delta$	Значения $F_B$ и $F_H$
Основное	Дополнительное		
$N_x^2 - 2Hb_\theta F_p N_x +$ $+2F_p(M_z + y_N N_x)(b_\theta - b_H) < 0$	$2F_p b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 > 0$	$b_\theta - b_H > 0$	-1
	$2F_p b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 > 0;$ $N_x - HF_p b_\theta > 0$		-1
	$2F_p b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 < 0;$ $H^2 b_\theta b_H F_p^2 - 2Hb_\theta N_x F_p +$ $+2F_p(M_z + y_N N_x)(b_\theta - b_H) + N_x^2 > 0$	$b_\theta - b_H < 0$	1
$N_x^2 + 2Hb_\theta F_c N_x -$ $-2F_c(M_z + y_N N_x)(b_\theta - b_H) < 0$	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0$		1
	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0;$ $H^2 b_\theta b_H F_c^2 + 2Hb_\theta N_x F_c -$ $-2F_c(M_z + y_N N_x)(b_\theta - b_H) + N_x^2 > 0$	$b_\theta - b_H > 0$	-1
	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0;$ $N_x + HF_c b_\theta < 0;$ $H^2 b_\theta b_H F_c^2 + 2Hb_\theta N_x F_c -$ $-2F_c(M_z + y_N N_x)(b_\theta - b_H) + N_x^2 > 0$	$b_\theta - b_H < 0$	1
	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		-1
$N_x^2 + 2Hb_\theta F_c N_x -$ $-2(M_z + y_N N_x)(F_c b_\theta + F_p b_H) > 0$	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0;$ $H^2 F_p^2 b_\theta b_H + 2HN_x F_p b_\theta +$ $+2(M_z + y_N N_x)\left(\frac{1}{F_p b_H} + \frac{1}{F_c b_\theta}\right) - N_x^2 > 0$		-1
	$N_x^2 - 2F_c b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		1
$N_x^2 - 2Hb_\theta F_p N_x -$ $-2(M_z + y_N N_x)(F_p b_\theta - F_c b_H) > 0$	$N_x^2 + 2F_p b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) > 0;$ $H^2 F_p^2 b_\theta b_H - 2HN_x F_p b_\theta -$ $-2(M_z + y_N N_x)\left(\frac{1}{F_p b_H} + \frac{1}{F_c b_\theta}\right) - N_x^2 > 0$		1
	$N_x^2 + 2F_p b_\theta (M_z + (y_N - H)N_x) < 0$		-1

Рассмотрим применение предложенной методики (табл. 3) на примерах для материала со следующими свойствами:

$$E_1 = 120 \text{ ГПа}; E_2 = 10 \text{ ГПа}; G_{12} = 6 \text{ ГПа}; \mu_{12} = 0,3;$$

$F_{1p} = 1000$  МПа;  $F_{1c} = 700$  МПа;  $F_{2p} = 50$  МПа;  $F_{2c} = 100$  МПа;  
 $F_{12} = 75$  МПа;  $\delta_0 = 0,08$  мм.

Таблица 3 – Пример определения пределов прочности

Исходные данные	Выполнение условий	Результат			
		$F_c$	$F_p$	$H_{эф},$ мм	$\delta_H,$ мм
$N_x = -0,1$ кН $M_z = -1$ кНм $b_c = 20$ мм $b_H = 10$ мм $H = 200$ мм	$N_x^2 + 2Hb_cF_cN_x +$ $-2F_c(M_z + y_NN_x)(b_c - b_H) > 0$	-	-	-	-
	$N_x^2 + 2Hb_cF_cN_x -$ $-2(M_z + y_NN_x)(F_cb_c + F_pb_H) > 0;$ $N_x^2 + 2F_pb_c(M_z + (y_N - H)N_x) > 0$	$-F_c$	$F_p$	195,6	4,76
$N_x = 10$ кН $M_z = -1$ кНм $b_c = 20$ мм $b_H = 10$ мм $H = 200$ мм	$N_x^2 - 2Hb_cF_pN_x +$ $+2F_p(M_z + y_NN_x)(b_c - b_H) < 0;$ $2F_pb_c(M_z + (y_N - H)N_x) + N_x^2 < 0;$ $b_c - b_H > 0$	-	-	-	-
	$N_x^2 + 2Hb_cF_cN_x -$ $-2(M_z + y_NN_x)(F_cb_c + F_pb_H) > 0;$ $N_x^2 + 2F_pb_c(M_z + (y_N - H)N_x) > 0$	$-F_c$	$F_p$	195,7	5,45

Таким образом, используя табл. 1 можно определить, какой предел прочности использовать при проектировании полков балки из КМ, а также какой знак использовать (плюс или минус) при вычислениях отношения площадей (9), что упрощает задачу проектирования полков балки.

#### Список использованных источников

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
2. Карпов Я.С. Проектирование и конструктивно-технологические решения лонжеронного крыла из композиционных материалов: учеб. пособие / Я.С. Карпов, Ф.М. Гагауз, П.М. Гагауз. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2004. – 143 с.

*Поступила в редакцию 29.11.2009.*  
*Рецензент: д-р техн. наук, проф. П.А. Фомичев,*  
*Национальный аэрокосмический университет*  
*им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*