

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ТКАНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Искусственные анизотропные материалы все чаще применяются в строительстве, в аэрокосмической, судостроительной, автомобильной и других отраслях промышленности. Такая тенденция объясняется тем, что применение современных технологий позволяет изготавливать из композитных материалов конструкции необходимой формы с заданными физико-механическими свойствами, одновременно снижая стоимость производства [1; 2]. Среди разных групп композитных материалов все больший интерес представляют тканые композитные материалы, которые, в добавлении к общим преимуществам перед другими композитами, дают возможность увеличить прочность в поперечном направлении. При этом одним из недостатков этих материалов является трудность прогнозирования их упругих свойств [3; 4].

Вопросами прогнозирования упругих свойств тканых композитов занимались Ю. М. Тарнопольский, Г. А. Ванин, В. В. Васильев и др. [5-7]. Для исследования микромеханического поведения тканых композитов в [3] представлена модель трехмерного представительного объемного элемента. Эффекты влияния зоны шероховатости и угла переплетения волокон на модуль упругости композита учитываются в элементарной ячейке. Была использована стандартная процедура осреднения для расчета эффективных упругих свойств тканого композита. В [8] внимание уделено нелокальному подходу к оценке прочности армированных волокнами пластиков с надрезами. Оценка прочности проводится на основе теории микрооднородных напряженных состояний. Для прогнозирования упругого поведения атласного тканого композита в [9] предложены упрощенные двумерные модели микро- и мезомеханики. В [10] рассмотрены геометрические характеристики и константы упругости плоскотканого композита и выполнен параметрический анализ влияния различных геометрических параметров на его упругие свойства. В [11] прогнозируется поведение композиционного материала с ортогональным пространственным армированием углеродным волокном. Предложенная модель основана на технике гомогенизации после того, как определена локальная жесткость элементарного объема. В данной статье рассматриваются два типа элементарных ячеек (на микро- и макроуровнях). Использование единичной ячейки позволяет сократить время расчёта, при использовании глобальной ячейки учитывается архитектура армирования. Указывается на важность выбора размеров представительного объёма для прогнозирования механических свойств.

В [12] прогнозируются механические свойства ортогональных пространственных композитных материалов с учетом их структурных параметров (механических свойств компонентов и геометрической архитектуры). Использование сканирующего электронного микроскопа сделало возможным визуализацию архитектурных особенностей внутренней структуры. Упругие свойства материала исследовались с помощью аналитической модели методом конечных элементов и определялись экспериментальным путём. Также рассматриваются преимущества и недостатки выбора ячейки – на макро- и микроуровнях. В [13] оптимизируется представительный объем пространственного ортогонального тканого композита, чтобы предсказать внутреннюю геометрию волокон, механические свойства и разрушение при осевой нагрузке. Механические свойства определяются путём представления матрицы жесткости представительного элемента, образованного однородными компонентами, прочность композита ищется по критерию разрушения Цая – Ву, учитывающему трехмерное напряженное состояние. Внутренняя геометрия тканого композита описывается с учетом объемной доли волокон по каждому из трёх направлений. В [14] изучается влияние анизотропии в трех направлениях на деформативные и прочностные свойства при одноосном сжатии. Экспериментальные результаты сравнивались с мезо- макро аналитической моделью. Для прогнозирования прочности композита используется обобщенный критерий Цая - Ву. В [15] анализируется элементарная ячейка с рядом подъячеек, учитывается шероховатость нити и влияние области чистого связующего на модуль упругости. Сопоставлено несколько моделей прогнозирования упругих свойств тканых композитных материалов. На основе теории слоистого композиционного материала в [16] предложена аналитическая модель MESOTEX для прогнозирования упругих и прочностных свойств тканых волокнистых композитных материалов в трех направлениях. Исследуется влияние криволинейности волокон на упругие свойства тканых композитов. Математическая модель, учитывающая искривления волокон в ткани, основанная на теории балок Тимошенко, представлена в [17]. В [18] разработана аналитическая модель для определения упругих свойств композитов с минимальными затратами на моделирование и вычисление.

Одним из наиболее эффективных методов решения задач механики деформированного твёрдого тела и расчёта конструкций из тканых композитов является метод конечных элементов (МКЭ). В процессе решения задач МКЭ в перемещениях были выявлены некоторые недостатки [19]: медленная сходимость, особенно при использовании криволинейных КЭ для расчёта конструкций, части которых претерпевают значительные жесткие смещения; при использовании прямолинейных удлинённых КЭ наблюдалось существенное ухудшение сходимости, если такие элементы

подвергались изгибу. Для устранения этих недостатков была предложена моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [19].

Рассмотрим методику построения матрицы жесткости конечного элемента на основе моментной схемы для тканого композиционного материала.

Процедуру вывода коэффициентов матрицы жесткости рассмотрим на примере произвольного криволинейного параллелепипеда. Будем полагать, что область, занимаемая элементом, отображена на куб с единичными ребрами (рис. 1). В центр «изопараметрического» КЭ поместим начало местной системы координат $O^1 x^1 x^2 x^3$, направляя оси вдоль ребер.

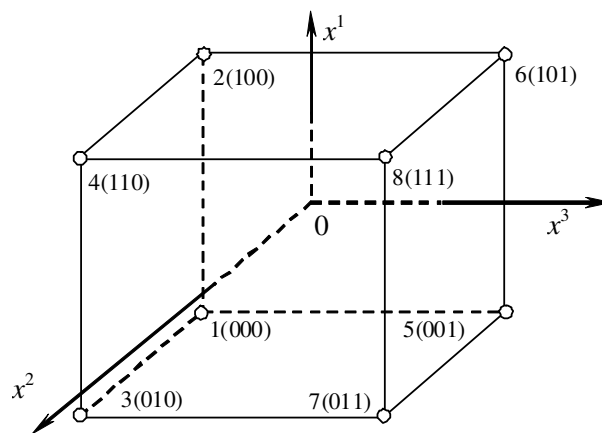


Рисунок 1 – КЭ в местной и базисной системах координат(в скобках указана индексация узлов)

В качестве неизвестных примем значения узловых перемещений. Для вывода основных соотношений МКЭ в перемещениях необходимо иметь выражения для вариации упругой энергии деформации.

Компоненты тензора напряжений для упругого тела определяются на основе обобщенного закона Гука, который имеет вид [21]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где C^{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; σ^{ij} – тензор напряжений; ε_{kl} – тензор деформаций.

Выражение вариации упругой энергии деформации имеет вид

$$\delta W = \iiint_V C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (2)$$

Аппроксимацию перемещений по объёму КЭ представим в виде линейного закона

$$U_{k'} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \\ + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}, \quad (3)$$

где $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коэффициенты разложения; $\psi^{(pqr)}$ – набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!}, \quad (4)$$

где $p = 0, 1, \dots, l$; $q = 0, 1, \dots, m$; $r = 0, 1, \dots, k$ – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим координатным направлениям.

Для координатных функций выполняется условие дифференцирования

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \psi^{(pqr)} = \psi^{(p-\alpha \quad q-\beta \quad r-\gamma)}. \quad (5)$$

Компоненты тензора деформации представляются разложением

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{pqr} e_{ij}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (6)$$

где

$$\sum_{stg}^{(ij)} = \sum_{s=0}^{L_{ij}} \sum_{t=0}^{M_{ij}} \sum_{g=0}^{N_{ij}}; \quad (7)$$

$$L_{ij} = \begin{cases} l & \text{при } i, j \neq 1; \\ l-1; & \end{cases} \quad (8)$$

$$M_{ij} = \begin{cases} m & \text{при } i, j \neq 2; \\ m-1; & \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{ij} = \begin{cases} n & \text{при } i, j \neq 3; \\ n-1; & \end{cases} \quad (10)$$

причем в разложении (6) остаются только те члены, которые не изменяются при увеличении порядка аппроксимации перемещений.

Коэффициенты разложения $e_{ij}^{(stg)}$ вычисляются по формулам

$$e_{11}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1 \nu \eta)} b_{(p+1-\mu \quad q-\nu \quad r-\eta)}^{k'};$$

$$e_{22}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu \nu+1 \eta)} b_{(p-\mu \quad q+1-\nu \quad r-\eta)}^{k'};$$

$$e_{33}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu \nu \eta+1)} b_{(p-\mu \quad q-\nu \quad r+1-\eta)}^{k'};$$

$$\begin{aligned}
e_{12}^{(pqr)} &= 1/2 \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p+1-\mu\ q-\nu\ r-\eta)}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\ \lambda)} b_{(p-\mu\ q+1-\nu\ r-\eta)}^{s'}; \\
e_{13}^{(pqr)} &= 1/2 \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\ \eta+1)} b_{(p+1-\mu\ q-\nu\ r-\eta)}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\ \lambda)} b_{(p-\mu\ q-\nu\ r-\eta+1)}^{s'}; \\
e_{23}^{(pqr)} &= 1/2 \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu\ q-\nu+1\ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\ \lambda)} b_{(p-\mu\ q-\nu\ r-\eta+1)}^{s'};
\end{aligned} \tag{11}$$

$$b_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\eta}. \tag{12}$$

На основе формул (5) и (3) выражения для производных имеют вид

$$\begin{aligned}
U_{k',1} &= \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)}; \\
U_{k',2} &= \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)}; \\
U_{k',3} &= \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Соотношения (6) и (11) представим в матричном виде

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}; \tag{14}$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \tag{15}$$

Здесь индексы i, j в векторе $\{\psi_{ij}\}$ указывают на зависимость размерности вектора от индексов i, j , поскольку он содержит только те функции $\psi^{(pqr)}$, которые входят в (6).

Расписав каждую из компонент $e_{ij}^{(pqr)}$, можно заметить, что не все коэффициенты $\omega_{S'}^{(pqr)}$ входят в разложение для аппроксимации перемещений (3) и их производных (13). Поэтому коэффициенты разложения $e_{ij}^{(pqr)}$, содержащие такие $\omega_{S'}^{(pqr)}$, должны быть опущены из разложения (6).

Приближенные выражения для компонент тензора деформаций запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)}; \\
\varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}; \\
\varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{11}^{(110)} \psi^{(110)}; \\
\varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}; \\
\varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}; \\
\varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Матрица $\left[F_{ij}^{k'} \right]$ строится на основе зависимостей (11).

Подставляя выражение (12) в (2), приходим к следующему вариационному уравнению:

$$\delta W = \iiint_V \{ \delta e_{ij} \}^T \{ \psi_{ij} \}^T [C^{ijkl}] \{ \psi_{kl} \} \{ e_{kl} \} dv = \{ \delta e_{ij} \}^T [H^{ijkl}] \{ e_{kl} \}. \quad (17)$$

Здесь

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \psi_{kl} \}^T [C^{ijkl}] \{ \psi_{ij} \} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (18)$$

где C^{ijkl} – матрица упругих постоянных, характеризующая физические свойства анизотропного материала с учётом метрики пространства, элементами которого являются компоненты метрического тензора g .

Компоненты тензора упругих постоянных C^{ijkl} для ортотропного тела (в системе армирования x'_m) будут иметь следующий вид:

$$[C^{ijkl}] = \begin{bmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & 0 & C^{1122} & 0 & 0 & 0 & C^{1133} \\ 0 & C^{1212} & 0 & C^{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{1313} & 0 & 0 & 0 & C^{1331} & 0 & 0 \\ 0 & C^{2112} & 0 & C^{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{2211} & 0 & 0 & 0 & C^{2222} & 0 & 0 & 0 & C^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & C^{2332} & 0 \\ 0 & 0 & C^{3113} & 0 & 0 & 0 & C^{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3223} & 0 & C^{3232} & 0 \\ C^{3311} & 0 & 0 & 0 & C^{3322} & 0 & 0 & 0 & C^{3333} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Компоненты тензора упругих постоянных C^{ijkl} (в системе армирования x'_m) вычисляются следующим образом [17]:

$$[C^{ijkl}] = \sum R_i [C_i], \quad (20)$$

где R_i – парциальный объём i -й системы нитей. Для каждой системы нитей матрица $[C_i]$ имеет вид

$$[C_i] = [T_{\varepsilon,i}] [C] [T_{\varepsilon,i}]^{-1}$$

где $[C_i]$ – матрица жесткостей i -й системы нитей; $[T_{\varepsilon,i}]$ – матрица геометрического преобразования деформации i -й системы нитей и $[C]$ – матрица жесткостей аналогичного однонаправленного композита. Матрица поворота $[T_{\varepsilon,i}]$ представляет собой матрицу преобразования в форме тензора Гамильтона, которую можно определить в следующей форме:

$$[T_{\varepsilon,i}] = \begin{pmatrix} l^2 & m^2 & n^2 & 2mn & 2l n & 2lm \\ l'^2 & m'^2 & n'^2 & 2m'n' & 2l'n' & 2l'm' \\ l''^2 & m''^2 & n''^2 & 2m''n'' & 2l''n'' & 2l''m'' \\ l'l'' & m'm'' & n'n'' & m'n'' + m''n' & l'n'' + l''n' & l'm'' + l''m' \\ ll'' & mm'' & nn'' & mn'' + m''n & l n'' + l''n & lm'' + l''m \\ l'l & m'm & n'n & mn' + m'n & l n' + l'n & lm' + l'm \end{pmatrix},$$

где

$$l = \cos \theta, m = 0, n = -\sin \theta, l' = \sin \theta \cos \beta, m' = \sin \beta, n' = \cos \theta \cos \beta, \\ l'' = \sin \theta \sin \beta, m'' = -\cos \beta, n'' = \cos \theta \sin \beta.$$

Здесь θ – угол ориентации волокна относительно продольной оси, β – азимутальный угол волокна. Пространственная плетеная структура может содержать продольные, поперечные и переплетаемые компоненты, ориентация которых, (θ, β) определяется значениями $(0^\circ, 0^\circ)$ для продольных, $(90^\circ, 0^\circ)$ для поперечных, (θ^*, β^*) для переплетаемых. Величины θ^* и β^* для переплетаемых компонентов можно получить из следующих соотношений:

$$\theta^* = \arctg \left[\operatorname{tg} \theta'_0 \left(\operatorname{tg} \theta'_0 (1 + k^2) \right)^{1/2} \right], \quad \beta^* = \arctg \left(\frac{1}{k} \right),$$

где k – отношение перемещения приемного механизма к перемещению колонны веретен; θ'_0 – поверхностный угол нити. Матрица жесткостей однонаправленного композита, полученная исходя из механических характеристик волокна и связующего, объёмной доли волокон и соотношений микромеханики, имеет вид

$$[C] = \begin{pmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C^{1313} & 0 \\ & & & & & C^{2323} \end{pmatrix}$$

где

$$C^{1111} = \frac{(1 - \nu_{23}^2) E_{11}}{K^*}, \quad C^{2222} = C^{3333} = \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) E_{22}}{K^*}, \quad C^{1122} = C^{1133} = \frac{(1 + \nu_{23}) \nu_{21} E_{11}}{K^*},$$

$$C^{2233} = \frac{(\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) E_{22}}{K^*}, \quad C^{1212} = G_{23}; \quad C^{1313} = G_{13}; \quad C^{2323} = G_{13};$$

$$K^* = 1 - 2\nu_{12} \nu_{21} (1 + \nu_{23}) - \nu_{23}^2.$$

Упругие характеристики однонаправленного композита в осях ортотропии можно оценить через свойства компонентов по уравнениям микромеханики армированных материалов [17]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= V_f E_f + (1 - V_f) E_m; \\ E_{22} &= E_{33} = E_m E_f / [V_f E_f + (1 - V_f) E_m]; \\ G_{12} &= G_{13} = G_m G_f / [G_m V_f + G_f (1 - V_f)]; \\ G_{23} &= G_m / [1 - V_f^{1/2} (1 - G_m / G_{23f})]. \end{aligned}$$

где E_m и E_f – модули упругости матрицы и волокна при растяжении; V_f – объёмная доля волокна; G_m – модуль сдвига матрицы; G_{12f} и G_{23f} – модуль сдвига волокна. Можно также определить коэффициенты Пуассона композита

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= \nu_{13} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m; \nu_{21} = \nu_{12} E_{22} / E_{11}; \\ \nu_{23} &= V_f \nu_{23f} + V_m (2\nu_m - \nu_{12}), \end{aligned}$$

где ν_f , ν_m – коэффициенты Пуассона волокна и матрицы, ν_{23f} – коэффициент Пуассона волокна в плоскости, перпендикулярной оси 1 [20].

С учетом принятых обозначений вариация энергии упругой деформации теперь запишется в виде

$$\delta W = \delta \{U_{S'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{S'}] [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{U_{t'}\} = \delta \{U_{S'}\}^T [K^{S'/t'}] \{U_{t'}\}, \quad (21)$$

где $[K^{S'/t'}]$ – матрица жесткости КЭ, вычисляемая выражением

$$[K^{S'/t'}] = [A]^T [F_{ij}^{S'}] [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A]. \quad (22).$$

Здесь $[H^{ijkl}]$ с учетом соотношений (17) имеет вид

$$\begin{aligned} [H^{1111}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{11}\}^T [C^{1111}] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\ [H^{1122}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{22}\}^T [C^{1122}] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\ [H^{1133}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{33}\}^T [C^{1133}] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\ [H^{2211}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{11}\}^T [C^{2211}] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\ [H^{2222}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{22}\}^T [C^{2222}] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\ [H^{2233}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \{\psi_{33}\}^T [C^{2233}] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
[H^{3311}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{11}\}^T [C^{3311}] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\
[H^{3322}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{22}\}^T [C^{3322}] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\
[H^{3333}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{33}\}^T [C^{3333}] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\
[H^{1212}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{12}\}^T \left[\frac{C^{1212}}{2} \right] \{\psi_{12}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\
[H^{1313}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{13}\}^T \left[\frac{C^{1313}}{2} \right] \{\psi_{13}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3; \\
[H^{2323}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{1_2} \{\psi_{23}\}^T \left[\frac{C^{2323}}{2} \right] \{\psi_{23}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Для построения матрицы жесткости $[K^{S't'}]$ необходимо определить матрицу $[A]$. Матрица $[A]$ вычисляется по соотношению $\{N\} = [A]^T \{\psi\}$, где $[A]$ – матрица преобразования, подлежащая определению для конкретного вида аппроксимирующих функций; $\{N\}$ – матрица функций формы, которые для КЭ с линейной аппроксимацией перемещений, показанного на рис. 1, имеют вид

$$N_L = \frac{1}{8} (1 + x^1 x^{1L}) (1 + x^2 x^{2L}) (1 + x^3 x^{3L}), \quad (24)$$

где L – номер узла.

Данная методика была реализована в программном комплексе „МИРЕЛА+” [21]. Для численной апробации предложенной методики рассмотрена задача определения предела прочности ортогонально-армированного углепластика Т300J/RTM6. Элементарная ячейка данного композита представляет собой куб со сторонами 8 мм. Упругие характеристики композита приведены в табл. 1 [13].

Таблица 1 - Упругие характеристики композита

$E_1,$ [ГПа]	$E_2,$ [ГПа]	$E_3,$ [ГПа]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$G_{12},$ [ГПа]	$G_{13},$ [ГПа]	$G_{23},$ [ГПа]	V_f
58.65	58.65	16	0.0628	0.3074	0.3077	3.323	3.154	3.154	0.6

Исследуем прочность данного образца при нагружении вдоль оси Z с помощью критериев Цая – Ву, Мизеса – Хилла и Хоффмана. Критерий Цая – Ву имеет вид [23]:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 = 1,$$

$$\text{где } F_1 = \frac{1}{\sigma_{1t}} + \frac{1}{\sigma_{1c}}; F_2 = \frac{1}{\sigma_{2t}} + \frac{1}{\sigma_{2c}}; F_{11} = \frac{-1}{\sigma_{1t}\sigma_{1c}};$$

$$F_{22} = \frac{-1}{\sigma_{2t}\sigma_{2c}}; F_{66} = \frac{1}{\tau_{12}^2}; F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_1 F_2}.$$

В данных формулах: σ_{1t}, σ_{1c} – предел прочности при растяжении и сжатии в направлении оси X; σ_{2t}, σ_{2c} – предел прочности при растяжении и сжатии в направлении оси Y; τ_{12} – предел прочности при сдвиге в плоскости X Y.

Критерий Мизеса–Хилла имеет вид [24]:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{ex}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{ex}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ey}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{exy}^2} = 1,$$

где σ_x, σ_y – нормальные напряжения в направлениях, совпадающих с координатными осями, указанными индексами; σ_{ex}, σ_{ey} – пределы прочности КМ при растяжении (сжатии) в направлении осей x, y; τ_{xy} – касательное напряжение; τ_{exy} – предел прочности анизотропного КМ при сдвиге в плоскостях x и y.

Критерий Хоффмана записывается в виде [21]:

$$\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y)}{\sigma_{ex}^p \sigma_{ex}^c} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ey}^p \sigma_{ey}^c} + \frac{(\sigma_{ex}^c - \sigma_{ex}^p) \sigma_x}{\sigma_{ex}^p \sigma_{ex}^c} + \frac{(\sigma_{ey}^c - \sigma_{ey}^p) \sigma_y}{\sigma_{ey}^p \sigma_{ey}^c} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{exy}^2} = 1.$$

Пределы прочности для данного композита при растяжении, сжатии и сдвиге приведены в табл. 2 [25].

Таблица 2 – Пределы прочности композита при растяжении, сжатии и сдвиге

σ_{1t} [ГПа]	σ_{2t} [ГПа]	σ_{1c} [ГПа]	σ_{2c} [ГПа]	τ_{12} [ГПа]	V_f
2.05	0.08	1.57	0.33	0.098	0.6

Результаты расчёта приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Результат расчета

Сетка	Критерий	Нагрузка
7x7x7	Хоффмана	285 МПа
	Мизеса – Хилла	305 МПа
	Цзя – Ву	237 МПа
8x8x8	Хоффмана	235 МПа
	Мизеса – Хилла	248 МПа
	Цзя – Ву	198 МПа
9x9x9	Хоффмана	200 МПа
	Мизеса – Хилла	210 МПа
	Цзя – Ву	171 МПа

Сравним данные (табл. 3.), полученные с использованием различных критериев (Хоффмана, Мизеса – Хилла, Цая – Ву), с результатами, приведенными в работе [12], где для опытного образца процесс разрушения наступает при 180 МПа.

Среди рассмотренных критериев наиболее точный результат даёт критерий Цая – Ву. Результат, вычисленный с помощью данного критерия, наиболее близок к результату, полученному экспериментальным путём. Таким образом, использование данной матрицы жесткости для тканого композиционного материала достаточно точно описывает его напряженно-деформированное состояние.

Список использованных источников

1. Кубенко В. Д. Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикладная механика. – 2009. – Вып. 45, № 5. – С. 53 – 78.
2. Кабиш Ю.М. Дослідження задач пружності двокомпонентних стохастичних композитів на основі статичної моделі неоднорідного деформування : автореф. дис. ... канд. техн. наук: спец. 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла»/ Ю. М. Кабиш; НАН України. Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка. – К., 2004. – 20 с.
3. Джанг И. П. Исследование трёхмерного микромеханического поведения тканых композитов / И. П. Джанг, В. Л. Гуо, З. Ф. Юэ // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 209–220
4. Савченко Е. В. Методика оптимизации структуры композитных пластин при динамических нагрузках / Е. В. Савченко // Проблемы прочности. – 2008. – № 6. – С.91–99.
5. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов / Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
6. Композиционные материалы: справ. / под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
7. Тарнопольский Ю. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. М. Скудра. – Рига: Зинатне, 1966. – 266 с.
8. Сапожников С. Б. Нелокальный подход к оценке конструкционной прочности тканевых композитов / С. Б. Сапожников // Вестн. ЮУрГУ. – 2001. – № 2. – С. 67–70
9. Searles K. Micro – and meso – mechanics of 8 – harness satin woven fabric composites. 1. Evaluation of elastic behavior / Searles K., Odegard G., and Kumosa M. // Composites. Part A. – 2001. – Vol.32. – P.1627–1655.
10. Lee S. – K. Effect of fiber geometry on the elastic constants of plain – woven fabric reinforced aluminum matrix composite / S. – K. Lee, J. – H. Buyn, S. H. Hong //Materials Sci.& End.,. Part A. – 2003. – Vol. 347 – . P. 346–1655.
11. Aboura Z. Prediction du comportement elastique endommageable de materiaux composites a renfort carbone orthogonal 3D / Z. Aboura, Ch. EL Hage, R. Younès, M. L Benzeggagh., M. Zoater // 17^{ete} Congres Francais de mecanique CFM 17 Troues – France, Septembre 2005.

12. EL Hage Ch. Modelisation analytique et numerique des caracteristiques mecaniques d'un composite a renfort carbone 3D orthogonal / Ch. EL Hage, R. Younès, Z. Aboura, M.L. Benzeggagh, Zoater M. // 14^{eme} journees Nationales sur les composites, vol. 2, JNC 14 Compiègne, France, 2005, pp.699 – 708.
13. Younes R. Optimisation du tissage de composites orthogonaux 3D/ R. Younes, Z Aboura, M. Benzeggag // Comptes Rendus Mécanique, vol. 336, issue 9, September 2008, p. 704–713
14. EL Hage Ch. Comportement sous compression d'un composite 3D orthogonal en carbone/epoxy: etudes experimentales, modelisation et optimization./ Ch. EL Hage, Z. Aboura, K. Khellil, M. Benzeggag, R. Younes– Режим доступа: <http://amac-composites.org/JNC15/articles/el%20hage.pdf>
15. Honglei Y. A model for predicting the elastic properties of 3D woven composites / Y. Honglei, D. Xin // Acta Mechanica Sinica. – 2003. – Vol. 35. – P. 569–577.
16. Scida D. A micro – mechanics model for 3D elasticity and failure of woven – fiber composite materials / D. Scida, Z. Aboura, M. L. Benzeggag // Composites Sci. and Technology. – 1999. – Vol. 59. – P. 505–517
17. Edgren F. Approximate analytical constitutive model for non – crimp fabric composites / F. Edgren, L E. Asp // Composites. Part A. – 2004. – Vol. XX. – P. 1–9
18. Aitharaju V. R. Three – dimensional properties of woven – fabric composites / V. R. Aitharaju, R. C. Averill // Composites Sci. and Technology. – 1999. – Vol. 59 – P. 1901–1911.
19. Метод конечных элементов в механике твердых тел / под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
20. Тканые конструкционные композиты: пер. с англ./ под. ред. Т. – В. Чу и Ф. Ко. – М.: Мир, 1991. – 432 с.
21. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. – К.: Наук. думка, 2005. – 392 с.
22. Younes R. Optimisation du tissage de composites orthogonaux 3D / R. Younes, Z. Aboura, M. L. Benzeggagh //Comptes Rendus Mécanique Volume 336, Issue 9, September 2008, Pages 704–713
23. Sun C. T. Quinn B. J., Oplinger D. W., Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates, FAA Texnical Report DOT/FAA/AR (1996) 95 – 109
24. Композиционные материалы: справ. / под общ. ред. Д. М. Карпиноса. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
25. El Hage Ch. Analytical approach and experimental studies of 3D behavior textile composite with carbon reinforcement of the interlock 2.5d type/ Ch. El Hage, R. Younes, Z. Aboura, M. L. Benzeggagh – Режим доступа: www.ryounes.net/publications/CIFMA.pdf

Поступила в редакцию 6.12.2010.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.И. Гоменюк,
Запорожский национальный университет, г. Запорожье*