УДК 539.3: 624.04.2: 629.7.023.4

В.М. Рябченко, канд. техн. наук

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ТОНКОСТЕННОЙ НЕСУЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ, УВЯЗАННАЯ С ОПТИМИЗАЦИОННЫМ ПРОЦЕССОМ

Сдвигово-клеточно-стержневые крупноэлементные дискретные модели (КЭДМ) [1] состоят из стержневых элементов и клеток, нагруженных по контурам только касательными усилиями. Они обладают рядом преимуществ: простота расчётных соотношений (особенно при использовании метода сил [2]), универсальность, удовлетворительная аппроксимация тонкостенных несущих конструкций (ТСНК) натурного типа [3, 4] при умеренной степени статической неопределимости. В 60-х - 80-х годах прошлого столетия этим моделям уделялось значительное внимание в литературе (работы J.H. Argyris, S. Kelsey, А.Ф. Феофанова, З.И. Бурмана, Н.И. Гурьева, Г.С. Еленевского, З.М. Старокадомской и др.). С помощью именно этих моделей впервые были осуществлены расчёты натурных авиационных конструкций с помощью ЭВМ. Значительное число работ по оптимизации с использованием КЭДМ принадлежат автору данной статьи и его сотрудникам.

Затем в связи с быстрым развитием метода конечных элементов внимание к названным моделям ослабло. В настоящее время пакеты конечноэлементных программ NASTRAN, COSMOS, ANSYS и др. безраздельно господствуют в сфере расчётов тонкостенных конструкций.

Однако благодаря указанным выше преимуществам использование КЭДМ по-прежнему целесообразно при укрупнённом анализе и проектировочных расчётах этапа эскизного проектирования [5]. Но если теория расчёта КЭДМ разработана достаточно полно, то вопросы интерпретации, достоверности и идентификации этих моделей изучены недостаточно. На их решение и направлена данная работа, являющаяся обобщением и развитием статей [1, 6].

Как и [6], она содержит так называемые «утверждения». Фактически это теоремы, т. е. положения, которые строго доказываются. Однако в связи с ограниченным объёмом работы эти доказательства не приведены, чем и вызвано использование указанного термина.

Способ интерпретации КЭДМ увязан со структурой конечноэлементного метода сил. Отметим, что применение последнего в большей мере, чем метода перемещений, соответствует особенностям этапа эскизного проектирования [6]: 1) получаемые рекомендации для сечений силовых элементов обеспечивают запас прочности; 2) расчётная масса силовых элементов оказывается завышенной, что компенсирует неизбежный при эскизном проектировании неучёт некоторых второстепенных составляющих массы. При использовании метода перемещений эффект погрешностей противоположный.

Осуществляется декомпозиция ТСНК и её КЭДМ на одинаковое количество соответствующих друг другу довольно крупных элементов.

Расчленение ТСНК выполняется с помощью *разделительных* линий, система которых вводится на характерной поверхности F обшивки. Совокупность элементов обязательно содержит панели, могут быть также усиленные балочные элементы. Между линиями раздела на поверхности F назначаются линии, которые в работе [1] названы *основными*. На пересечении этих линий помещают узлы модели КЭДМ. При наличии усиленных балочных элементов вдоль каждого из них направляется одна основная линия (эти элементы неизменными переходят в КЭДМ).

Между узлами КЭДМ проводят эффективные рёбра. Обычно их межузловые участки принимают прямолинейными [3, 4, 7], чем определяется многогранность характерной поверхности модели F_M, содержащей все узлы. Но можно принять, что поверхности F и F_M совпадают (именно так поступим в данной статье). Однако в обоих случаях между точками поверхностей F и F_M существует взаимно однозначное соответствие, так что разделение ТСНК на элементы приводит к аналогичному разделению КЭДМ.

Построенную описанным способом дискретную модель будем называть *геометрически эквивалентной* исходной тонкостенной несущей конструкции. На рис. 1 показан участок крыльевой КЭДМ, построенной по описанной методике.

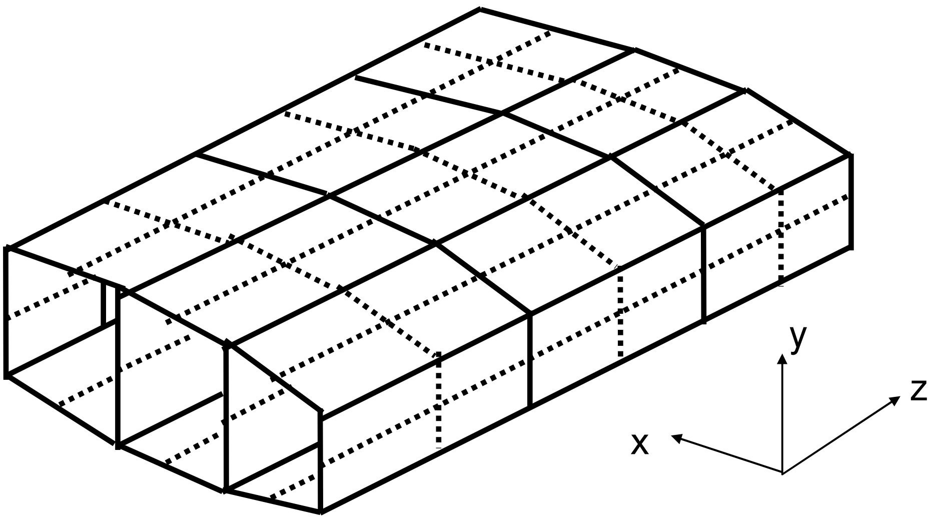

Рисунок 1 - Участок геометрически эквивалентной крыльевой КЭДМ

Следовательно, декомпозиция осуществляется так, что у каждого элемента КЭДМ узел находится во внутренней точке. Поэтому изложенный способ геометрического построения дискретной модели (ДМ) можно охарактеризовать как «декомпозицию на подструктуры и проведение эффективных рёбер через внутренние части панелей». Отметим, что в литературе построение ДМ обычно не связывают с расчленением на элементы, а эффективные рёбра проводят по границам панелей и «присоединяют» к ним обшивку и рядовые подкрепления прилегающих полупанелей. Если вдоль границы каких-то панелей расположен усиленный балочный элемент, то он непосредственно входит в состав эффективного ребра. Традиционный способ весьма технологичен и широко используется в расчётной практике [3, 4, 7], но не позволяет осуществить механически обоснованный анализ КЭДМ.

Предлагаемый способ построения ДМ позволяет выполнить такой анализ на основе сопоставления усилий, действующих вдоль соответствующих друг другу *граничных отрезков подструктур* (ГОП) исходной несущей конструкции и её дискретной модели. Иными словами, сравниваются усилия вдоль отрезков разделительных линий, примыкающих к отдельным подструктурам. Эти отрезки подразделяются на *внутренние* ГОП, лежащие на стыках подструктур, и *наружные* ГОП, находящиеся на границе ТСНК.

Для панелей приняты *густореберные* ДМ. В работе [8] показано, что такая модель позволяет с приемлемой точностью рассчитать ТСНК, не содержащую существенно скошенных элементов обшивки. Что же касается уравнений равновесия, то они являются у густореберной ДМ достоверными при любом виде тонкостенной системы. Естественно, что использование этих моделей имеет чисто теоретический характер - позволяет использовать для описания усилий ТСНК дискретные множества, не рассматривать отдельно оребрённые и гладкие панели.

Усилия вдоль g-го ГОП i-й подструктуры ТСНК обозначены через $\mathbf{O}_i^g$, усилия вдоль всех её ГОП – через $\mathbf{O}_i$. Введём обозначение

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_1 \cup \mathbf{O}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{O}_m\,, \tag{1}$$

где m - количество подструктур; $\cup$ - знак множественного сложения. Любое подмножество компонентов вектора $\mathbf{O}$ будем называть *совокупностью граничных усилий подструктур* (СГУП).

В качестве основных неизвестных вместо усилий $\mathbf{O}$ примем их обобщённые координаты. Векторы $\mathbf{O}_i^g$ представим в виде

$$\mathbf{O}_i^g = \sum_{(l)} \Gamma_{i,l}^g \bar{\mathbf{H}}_{i,l}^g + \sum_{(t)} \xi_{i,t}^g \bar{\mathbf{h}}_{i,t}^g\,, \tag{2}$$

$$l = 1,\ldots,n_{g,i}^1\,,\ t = 1,\ldots,n_{g,i} - n_{g,i}^1\,,$$

где $n_{g,i}$ - количество компонент вектора $\mathbf{O}_i^g$; $\bar{\mathbf{H}}_{i,l}^g$, $\bar{\mathbf{h}}_{i,t}^g$ - линейно независимые координатные СГУП, количество которых также равно $n_{g,i}$; $\Gamma_{i,l}^g$, $\xi_{i,t}^g$ - искомые обобщенные координаты (интенсивности координатных СГУП).

Усечённые ряды (2) используются как для внутренних, так и внешних ГОП. Показано, что эти разложения возможны для любой СГУП $\mathbf{O}_i^g$. Введём обозначения

$$\mathbf{Г}_i^g = (Г_{i,l}^g)\,;\ \mathbf{o}_i^g = (\xi_{i,t}^g)\,;\ \mathbf{Г}_\mathrm{i} = \bigcup_{(g)} \mathbf{Г}_i^g\,;\ \mathbf{o}_\mathrm{i} = \bigcup_{(g)} \mathbf{o}_i^g. \tag{3}$$

Структуры векторов $\mathbf{Г}_\mathrm{i}$, $\mathbf{o}_\mathrm{i}$ учитывают парность касательных напряжений [2] в угловых точках подструктур ТСНК.

Для внутренних усилий на (g,i)-м ГОП модели КЭДМ введены обозначения $\mathbf{Г}_{\text{м}i}^g$. Структура этих векторов также учитывает парность касательных напряжений в угловых точках подструктур КЭДМ.

Разложения типа (2) широко используются в строительной механике. Их особенности в данном случае заключаются в том, что они применяются для граничных усилий подструктур и что СГУП $\overline{\mathbf{H}}_{i,l}^g$ назначаются исходя из способа интерпретации КЭДМ.

Координатные функции $\overline{\mathbf{H}}_{i,l}^g$, $\overline{\mathbf{h}}_{i,t}^g$ следует назначить так, чтобы совокупность разрешающих уравнений расчёта ТСНК при использовании метода подструктур в форме метода сил была как можно ближе к разрешающим уравнениям расчёта КЭДМ, причём уравнения равновесия по возможности совпадали. Коэффициенты $\mathbf{Г}_i^g$ и СГУП $\overline{\mathbf{H}}_{i,l}^g$ отвечают укрупнённому описанию усилий $\mathbf{O}_i^g$. Выбор их количества и типажа, а также непосредственное назначение этих величин осуществляются с помощью модели КЭДМ. Координатные СГУП выбирают так, чтобы выполнялись условия:

1) размерности векторов $\mathbf{Г}_i^g$ и $\mathbf{Г}_{\text{м}i}^g$ одинаковы;

2) между компонентами этих векторов существует взаимно однозначное соответствие;

3) при $\mathbf{o}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ уравнения равновесия любой i-й подструктуры ТСНК совпадают с таковыми для i-й подструктуры КЭДМ.

Следовательно, каждому усилию $Г_{\text{м}j}$, действующему на границе какой-то подструктуры КЭДМ, ставится в соответствие один коэффициент $Г_{i,l}^g$ одного усечённого функционального ряда (2), причём соответствие является взаимно однозначным. Третье условие означает, что если уравнения равновесия i-й подструктуры КЭДМ имеют вид

$$\mathbf{B}_{Гi}\mathbf{Г}_{\text{м}\mathrm{i}} + \mathbf{R}_i^0 = \mathbf{0}, \tag{4}$$

то для i-й подструктуры ТСНК их необходимо привести к виду

$$\mathbf{B}_{\Gamma i}\mathbf{\Gamma}_{\rm i} + \mathbf{B}_{\xi i}\mathbf{o}_{\rm i} + \mathbf{R}_i^0 = \mathbf{0}. \qquad (5)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что узловые нагрузки $\mathbf{R}_i^0$, приложенные к i-й подструктуре КЭДМ, – это главный вектор и главный момент внешних (для системы в целом) нагрузок, приложенных к i-й подструктуре ТСНК. При этом для внешних подструктур не следует учитывать нагрузки-реакции, действующие вдоль наружных ГОП конструкции.

Можно ли на основе значений $\mathbf{\Gamma}_{Mi}^g$, найденных при расчёте модели КЭДМ, получить достоверные оценки для коэффициентов $\mathbf{\Gamma}_i^g$ усечённых рядов (2)? Это было бы весьма полезно, т. к. расчёт КЭДМ намного проще, чем расчёт ТСНК.

Анализ даёт утвердительный ответ в случае, когда ТСНК образована плоскими прямоугольными панелями, стыкующимися непосредственно или через сосредоточенные подкрепления, и когда для неё и КЭДМ используют расчётные схемы наивысшего уровня. Панели ТСНК при этом имеют полностью моментные густореберные ДРС [8], а сосредоточенные подкрепления воспринимают все виды деформаций. Часто расположенные рёбра панелей воспринимают растяжение-сжатие, изгиб в перпендикулярном к обшивке направлении и кручение. У КЭДМ с наивысшим уровнем расчётной схемы рёбра воспринимают все виды деформаций.

Результаты анализа даны в виде семи утверждений.

Утверждение 1. *Если для подструктуры КЭДМ все 6 уравнений равновесия не являются тождествами, то для подструктур ТСНК можно построить множество наборов координатных функций, удовлетворяющих трём приведенным выше условиям.*

В этом множестве следует отобрать наиболее простые, плавные, «логичные» координатные СГУП.

Утверждение 2**.** *Плоская прямоугольная панель с изгибно-крутильно-моментной густореберной ДРС может воспринять любую комбинацию внешних уравновешенных нагрузок.*

Утверждение 3. *Разность* $N-6m$, *где* N *- количество неизвестных коэффициентов* $\Gamma_{i,l}^g$; m *- количество подструктур, совпадает со степенью статической неопределимости геометрически эквивалентной модели КЭДМ, если расчётная схема ТСНК обеспечивает нетождественность всех шести уравнений равновесия каждой подструктуры.*

Утверждение 4. *Если модель КЭДМ является полностью моментной, то все координатные СГУП* $\bar{\mathbf{h}}_{i,t}^g$ *могут быть построены самоуравновешенными.*

Если координатные функции $\bar{\mathbf{h}}_t$ обладают свойством самоуравновешенности, то в уравнениях (5) матрицы $\mathbf{B}_{\xi i} = \mathbf{0}$, вследствие чего уравнения равновесия подструктур ТСНК и КЭДМ совпадают.

Утверждение 5. *Если все СГУП $\bar{\mathbf{h}}_t$ являются самоуравновешенными, а все СГУП $\bar{\mathbf{H}}_l$ построены в соответствии со сформулированными выше условиями, то уравнения равновесия всех подструктур ТСНК совпадают с таковыми для подструктур геометрически эквивалентной модели КЭДМ.*

Совокупности коэффициентов $\Gamma^{g}_{i,l}$, $\xi^{g}_{i,t}$ подразделяются на множества $\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}$, $\mathbf{o}_{\text{в}}$, соответствующие внутренним ГОП, и множества $\mathbf{\Gamma}_{\text{н}}$, $\mathbf{o}_{\text{н}}$, соответствующие наружным ГОП. Компоненты множеств $\mathbf{\Gamma}_{\text{н}}$, $\mathbf{o}_{\text{н}}$ описывают граничные усилия ТСНК и должны быть заданы. Сформулирована вариационная задача расчёта ТСНК, в которой неизвестными являются $\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}$, $\mathbf{o}_{\text{в}}$ и которая имеет некоторое сходство с задачей расчёта КЭДМ:

$$2U = \sum_{l}\sum_{k}\alpha_{l,k}\Gamma_l\Gamma_k + \sum_{l}\sum_{r}\beta_{l,r}\Gamma_l\xi_r + \sum_{r}\sum_{t}\gamma_{r,t}\,\xi_r\,\xi_t \to min;$$

$$B_{\Gamma i}\mathbf{\Gamma}_{\text{i}} + B_{\xi i}\mathbf{o}_{\text{i}} + \mathbf{R}^{0}_{i} = \mathbf{0}, \quad i = 1,...,m; \tag{6}$$

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}, \mathbf{\Gamma}_{\text{н}}), \quad \mathbf{o} = (\mathbf{o}_{\text{в}}, \mathbf{o}_{\text{н}}), \quad (\mathbf{\Gamma}_{\text{н}}, \mathbf{o}_{\text{н}}) \subset ИД.$$

Если СГУП $\bar{\mathbf{h}}_t$ построены самоуравновешенными, то $\mathbf{B}_{\xi i} = \mathbf{0}$ и связи в задаче (6) совпадают с уравнениями равновесия подструктур модели КЭДМ.

Утверждение 6. *Для несущей конструкции с расчётной схемой, обеспечивающей восприятие подструктурами любой уравновешенной нагрузки, переменные $\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}$, $\mathbf{o}_{\text{в}}$ в задаче (6) являются независимыми*.

Утверждение 7. *Если для ТСНК и КЭДМ используются расчётные схемы наивысшего уровня (*см. ранее*), то при надлежащей жесткостной идентификации элементов модели КЭДМ её внутренние усилия $\mathbf{\Gamma}_{\text{м}i}$ являются оценками обобщённых координат $\mathbf{\Gamma}_i$ в разложениях (2) для граничных усилий подструктур ТСНК.*

А как быть, если применяются более низкие уровни расчётных схем для ТСНК и КЭДМ? Были изучены три подобные расчётные схемы для густореберных панелей:

- плоская прямоугольная панель, имеющая упрощённо моментную ДРС. Эта расчётная схема отличается от модели наивысшего уровня тем, что рёбра панели воспринимают изгиб в направлении, перпендикулярном обшивке, но абсолютно податливы на кручение;

- плоская прямоугольная панель с полубезмоментной ДРС. У панели продольные рёбра безмоментны, а поперечные рёбра не воспринимают кручение и изгиб в направлении, параллельном обшивке;

- плоская прямоугольная панель с безмоментной ДРС. Здесь продольные и поперечные рёбра воспринимают только растяжение-сжатие.

Для всех трёх названных типов расчётных схем густоребеберных панелей оказалось, что они не могут воспринять любую уравновешенную нагрузку - компоненты этой нагрузки должны удовлетворять некоторым наложенным на них связям, зависящим от типа ДРС. Конкретизация связей осуществляется с помощью статического анализа [9].

В известной автору литературе расчёты полностью моментной КЭДМ не описаны. Используют более простые расчётные схемы, безмоментные или полубезмоментные. Проанализировано два типа упрощённых моделей КЭДМ: а) упрощённо моментные, рёбра которых не работают на кручение и на изгиб в направлениях, параллельных сдвиговым клеткам; б) полубезмоментные КЭДМ фюзеляжного типа, продольные рёбра которых безмоментны, а поперечные рёбра воспринимают изгиб лишь в своих плоскостях.

При упрощённой расчётной схеме первого типа из векторов $\mathbf{\Gamma}_i$ «выводятся» 12 обобщённых координат, а векторы $\mathbf{o}_\mathrm{i}$ пополняются 12 компонентами. Для полубезмоментной КЭДМ количество таких обобщённых координат равно 16. Соответствующие дополнительные СГУП $\bar{\mathbf{h}}^g_{i,t}$ не являются самоуравновешенными (остальные СГУП $\bar{\mathbf{h}}^g_{i,t}$ можно брать прежними). Уравнения равновесия прямоугольной плоской панели приводятся к виду, содержащему как $\mathbf{\Gamma}_i$, так и $\mathbf{o}_\mathrm{i}$ (см. (5)).

Однако СГУП $\bar{\mathbf{H}}^g_{i,l}$, интенсивности которых продолжают входить в состав $\mathbf{\Gamma}_i$, сохраняют свой вид, а сами интенсивности имеют прежний механический смысл.

Непосредственно распространить утверждение 7 на более низкие уровни расчётных схем ТСНК и КЭДМ затруднительно. Однако нужно иметь в виду, что важнейшие принципы механики твёрдого деформируемого тела строго доказаны в теории упругости [2] для общего случая сплошного упругого тела. А применяются эти принципы для всех расчётных схем, включая самые упрощённые.

Сформулирована *гипотеза «инвариантности (к типу расчётных схем ТСНК и КЭДМ) алгоритма перехода от результатов расчёта КЭДМ к граничным усилиям подструктур ТСНК».* Пусть для полностью моментных ТСНК и КЭДМ показано, что при принятом способе идентификации и выбранных координатных функциях $\overline{\mathbf{H}}^{g}_{i,l}$ расчёт КЭДМ приводит к приемлемому уровню погрешностей в значениях компонент векторов $\mathbf{\Gamma}_i$. Пусть понижение уровней расчётных схем у КЭДМ и ТСНК связано со свойствами конструкции: расчёты по моделям разных уровней дают близкие результаты. *Тогда выводы о приемлемой точности значений* $\mathbf{\Gamma}_i$ *справедливы и при упрощённости названных расчётных схем. Функции* $\overline{\mathbf{H}}^{g}_{i,l}$*, выбранные при наивысших уровнях этих моделей, сохраняют свою рациональность.*

В пользу гипотезы говорят сравнения с экспериментами результатов расчётов по упрощённым расчётным схемам, приведенные в [3, 4].

Изложенная интерпретация моделей КЭДМ органически сочетается со следующими действиями: а) ТСНК и её КЭДМ расчленяются на соответствующие друг другу крупные элементы (подструктуры); б) через внутренние части панелей проводятся эффективные рёбра КЭДМ, «собирающие» материал панелей ТСНК, который воспринимает виды деформаций, обусловленные расчётной схемой; в) сопоставляются граничные усилия на соответствующих друг другу ГОП.

Создаются предпосылки для последовательных приближений по схеме, представленной на рис. 2.

Рисунок 2 - Принципиальная схема итераций

Выводы

Предложенная интерпретация сдвигово-клеточно-стержневой дискретной модели органически сочетается с итерационным процессом оптимизации тонкостенных несущих конструкций.

Список использованных источников

1. Рябченко В. М. Некоторые вопросы обоснования и использования крупноэлементных дискретных расчётных схем сложных безмоментных оболочек / В.М. Рябченко // Самолётостроение. Техника воздушного флота: респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. - Вып. 28. – Х.: ХГУ, 1972. - С. 66 - 73.

2. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости: пер. с англ. / Ван Цзи-де. - М.: Физматгиз, 1959. - 400 с.

3. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчёта конструкций с применением матриц / Дж. Аргирис // Пер. с англ. под ред. А.Ф. Смирнова. - М.: Изд-во лит. по строит., 1968. - 241 с.

4. Гурьев Н. И. Матричные методы расчёта на прочность крыльев малого удлинения / Н.И. Гурьев, В. Л. Поздышев, З.М. Старокадомская. – М.: Машиностроение, 1972 . - 260 с.

5. Рябченко В.М. Обоснование потребности в крупноэлементных сдвигово-клеточно-стержневых дискретных моделях тонкостенных конструкций / В.М. Рябченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Гос. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». - Вып. 4. – Х.: ГАКУ, 1999. - С. 143 - 149.

6. Рябченко В.М. Вариант интерпретации сдвигово-клеточно-стержневых дискретных моделей тонкостенных конструкций / В.М. Рябченко // Прочность конструкций летательных аппаратов. - Х.: ХАИ, 1990. - С. 121 - 127.

7. Аргирис Дж. Расчёт фюзеляжей произвольного поперечного сечения и произвольного закона изменения сечений вдоль оси / Дж. Аргирис, С. Келси // Современные методы расчёта сложных статически неопределимых систем: сб. статей; пер. с англ. под ред. А.П. Филина. - Л.: Судпромгиз, 1961. - С. 421 - 653.

8. Рябченко В. М. О достоверности густореберных дискретных моделей тонкостенных несущих конструкций / В. М. Рябченко // Вопросы упругого и пластического деформирования твёрдого тела. – Х.: ХАИ, 1988. - С. 60 - 68.

9. Строительная механика летательных аппаратов: учеб. для вузов / И.Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В.В. Васильев и др.; Мин-во высш. и средн. спец. образования СССР; под ред. И.Ф. Образцова. - М.: Машиностроение, 1985. - 536 с.

Поступила в редакцию 04.11.10.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Г. Гребеников,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков