

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ПРИЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛОИДА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Обзор литературы. Аналитико-численные методы анализа НДС в многосвязных телах с усложненными физико-механическими свойствами играют важную роль при моделировании локальных концентраторов напряжений в пористых и композиционных материалах, в расчетах на прочность при проектировании конструкций и агрегатов в общем машиностроении, авиа- и ракетостроении, строительной механике и механике горных пород. Исследования последних лет в основном касались изучения односвязных тел [1 - 6]. В работах [7 - 10] обобщенный метод Фурье (ОМФ) был развит для целого ряда многосвязных трансверсально-изотропных канонических тел, и была обоснована его эффективность. В настоящей статье дальнейшее развитие ОМФ продолжено на области с новой геометрией. Для этого получены новые теоремы сложения базисных решений уравнений равновесия в перемещениях трансверсально-изотропной среды для параболоида и сфероида. Заметим, что впервые точные решения основных краевых задач теории упругости для трансверсально-изотропного параболоида получил Ю.Н. Подильчук [11]. В настоящей работе использованы принципиально другие решения, построенные в [10]. Для них и для сфероидальных решений [7] авторами доказаны условия базисности. Проверка эффективности метода проведена при численном анализе НДС в задаче для параболоида со сфероидальной полостью.

Постановка задачи. Рассмотрим параболоид вращения из трансверсально-изотропного материала с упругими постоянными C_{ij} , ось которого совпадает с осью анизотропии материала. На оси параболоида соосно с ним расположена сфероидальная полость с полуосями g_1 и g_2 , центр которой находится на расстоянии c_2 от его вершины. В цилиндрической системе координат (ρ, z, φ) уравнения поверхностей параболоида и сфероида имеют соответственно вид $\Gamma_1 : z = c_1 \rho^2 - c_2$ и $\Gamma_2 : z^2 / g_1^2 + \rho^2 / g_2^2 = 1$. Будем предполагать, что поверхность гиперболоида неподвижна, а на границе сфероида действует постоянная нормальная нагрузка.

Введем две пары цилиндрических координат (ρ, z_j, φ) и $(\rho, z_j^{(1)}, \varphi)$, связанных с исходной цилиндрической системой (ρ, z, φ)

формулами

$$z = v_j z_j = v_j (z_j^{(1)} + \gamma_j), \quad \rho = \rho_j \quad (\gamma_j = v_j / (4c_1) - c_2 / v_j),$$

а также сжатые сфероидальные $(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi)$ и параболоидальные $(\alpha_j, \beta_j, \varphi)$ ($j = 1, 2$) координаты,:

$$\begin{cases} z = v_j \tilde{c}_j \operatorname{sh} \tilde{\xi}_j \cos \tilde{\eta}_j \equiv v_j \tilde{c}_j \tilde{q}_j \tilde{p}_j, & \begin{cases} z_j^{(1)} = a_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2), \\ \rho_j = a_j \alpha_j \beta_j, \end{cases} \\ \rho = \tilde{c}_j \operatorname{ch} \tilde{\xi}_j \sin \tilde{\eta}_j \equiv \tilde{c}_j \tilde{q}_j \tilde{p}_j; \end{cases}$$

где $\tilde{c}_j, a_j > 0$ – параметры сфероидальной и параболоидальной систем координат; v_j^2 – разные положительные корни уравнения

$$C_{44} C_{11} v^2 + (C_{13}^2 + 2C_{13} C_{44} - C_{11} C_{33}) v + C_{33} C_{44} = 0.$$

Граничные поверхности в этих координатах задаются уравнениями $\Gamma_1 : \beta_j = \beta_{j0}, \Gamma_2 : \tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_{j0}$. При этом $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}$.

Метод решения. Задача решается ОМФ. Запишем базисные решения уравнений равновесия в перемещениях для трансверсально-изотропного параболоида вращения [10]

$$\mathbf{U}_{j,n,0}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = a_j \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \mathbf{D}_j u_{j,\lambda,0}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi), \quad (1)$$

и для сжатого сфероида

$$\mathbf{U}_{j,n,0}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) = -\frac{i\tilde{c}_j}{2n+1} \mathbf{D}_j [u_{n-1,0}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) - u_{n+1,0}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi)], \quad (2)$$

где
$$\mathbf{D}_j = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{k_j}{v_j} \frac{\partial}{\partial z_j},$$

$$u_{j,\lambda,m}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \begin{cases} K_m(\lambda \beta_j) \\ I_m(\lambda \beta_j) \end{cases} J_m(\lambda \alpha_j) e^{im\varphi},$$

$$u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) = \begin{cases} Q_n^{(-m)}(i\tilde{q}_j) \\ P_n^{(-m)}(i\tilde{q}_j) \end{cases} P_n^{(m)}(\tilde{p}) e^{im\varphi},$$

$K_m(x)$ – функция Макдональда; $I_m(x)$ – модифицированная функция Бесселя I рода; $P_n^{(m)}(x)$ и $Q_n^{(m)}(x)$ – функции Лежандра I и II рода соответственно; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты декартовой системы координат.

Решение будем искать в виде линейной комбинации (1) и (2):

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{+(6)}(\xi_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) + \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) d\lambda \right\}. \quad (3)$$

В координатной форме базисные решения для сфероидов и параболоидов соответственно можно записать в виде

$$\mathbf{U}_{j,\lambda,0}^{\pm(s)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \pm u_{j,\lambda,1}^{\pm(s)} \mathbf{e}_\rho - k_j/v_j u_{j,\lambda,0}^{\pm(s)} \mathbf{e}_z \quad (s = 5, 6, 9). \quad (4)$$

Переходя в (4) к напряжениям, при $s = 6$ получим

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{j,n,m}^{\pm(6)} = -\frac{1}{c\tilde{H}_j} \left[\left(\mu_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{j,n,1}^{\pm(6)} + \omega_j \frac{\tilde{q}_j}{\tilde{q}_j} u_{j,n,1}^{\pm(6)} \right) \mathbf{e}_\rho + \mu_j v_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{j,n,0}^{\pm(6)} \mathbf{e}_z \right]. \quad (5)$$

Авторами получены теоремы сложения для трансверсально-изотропных параболоидов вращения и сжатого сфероидов.

Теорема 1. Справедливы такие теоремы сложения, выражающие базисные перемещения для параболоида через базисные перемещения для сфероидов:

$$\mathbf{U}_{j,\lambda,m}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{m,\lambda}^{(96)k,j} \mathbf{U}_{j,k,m}^{-(6)}(\xi_j, \tilde{\eta}_j, \varphi), \quad (6)$$

где $g_{m,\lambda}^{(96)k,j} = (-1)^k (k + 0.5) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2a_j)^n n!} C_{n,k}^{(j)}$,

$$C_{n,k}^{(j)} = \sqrt{\pi} (-i\tilde{c}_j / 2) C_{n-k}^{-n-0.5} (-i\gamma_j / \tilde{c}_j) / \Gamma(n + 1.5),$$

$C_n^v(x)$ – многочлены Гегенбауэра.

Теорема 2. Справедливы такие теоремы сложения, выражающие базисные перемещения для сфероидов через базисные перемещения для параболоидов:

$$\mathbf{U}_{j,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) = \int_0^{\infty} g_{n,m}^{(69)j,\lambda} \mathbf{U}_{j,\lambda,m}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) d\lambda, \quad (7)$$

где $g_{n,m}^{(69)j,\lambda} = (-1)^{n+m+1} 2i\tilde{c}_j \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2a_j)^{k+1} k!} C_{k,n}^{(j)}$.

С помощью (7) перейдем в (3) к параболоидальным координатам

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \int_0^{\infty} g_{n,m}^{(69)j,\lambda} \mathbf{U}_{j,\lambda,m}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) d\lambda \right\}.$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{F}|_{\Gamma_2} = \sigma_0 \mathbf{n}. \quad (8)$$

С учетом (8) на границе параболоида имеем

$$\sum_{j=1}^2 \chi_{mj} \left\{ -A_j(\lambda) I_{2-m}(\lambda \beta_{j0}) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} g_{n,0}^{(69)j,\lambda} K_{2-m}(\lambda \beta_{j0}) \right\} = 0 \quad (m=1,2).$$

Выражая $A_j(\lambda)$ через $b_n^{(j)}$, получаем

$$A_m(\lambda) = \Delta_m(\lambda) / \Delta_0(\lambda), \quad (9)$$

где $\Delta_0(\lambda) = \varphi_{11}(\lambda)\varphi_{22}(\lambda) - \varphi_{12}(\lambda)\varphi_{21}(\lambda)$, $\varphi_{mj}(\lambda) = \chi_{mj} I_0(\lambda \beta_{j0})$,

$$\Delta_m(\lambda) = (-1)^{m+1} [\theta_1(\lambda)\varphi_{2,3-m}(\lambda) - \theta_2(\lambda)\varphi_{1,3-m}(\lambda)],$$

$$\chi_{sm} = \begin{cases} 1, & s=1, \\ k_m/v_m, & s=2; \end{cases} \quad \theta_m(\lambda) = (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} g_{n,m}^{(69)j,\lambda} K_0(\lambda \beta_{j0}).$$

С помощью (4), (6) получим перемещения (3) в сфероидальных координатах

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} g_{0,\lambda}^{(96)n,j} A_j(\lambda) d\lambda \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) + b_n^{(j)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi) \right] \right\}.$$

Используя (5), переходим к напряжениям. С учетом (8) на сфероиде имеем

$$\sum_{j=1}^2 \left[b_n^{(j)} s q_{nj}^{(m)} + \alpha_{nj} s p_{nj}^{(m)} \right] = d_{nm}, \quad (10)$$

где $\alpha_{nj} = \int_0^{\infty} A_j(\lambda) g_{0,\lambda}^{(96)n,j} d\lambda$, $d_{nm} = (-1)^{m+1} g_m \sigma_0 \delta_{n1}$,

$$s q_{nj}^{(1)} = \mu_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_j} Q_n^{(-1)}(i\tilde{q}_j) + \omega_j \frac{\tilde{q}_j}{\tilde{q}_j} Q_n^{(-1)}(i\tilde{q}_j), \quad s q_{nj}^{(2)} = \mu_j v_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_j} Q_n(i\tilde{q}_j),$$

$$s p_{nj}^{(1)} = \mu_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_j} P_n^{(-1)}(i\tilde{q}_j) + \omega_j \frac{\tilde{q}_j}{\tilde{q}_j} P_n^{(-1)}(i\tilde{q}_j), \quad s p_{nj}^{(2)} = \mu_j v_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_j} P_n(i\tilde{q}_j).$$

При непересечении граничных поверхностей оператор системы (9), (10) является фредгольмовым. Несобственные интегралы вычислены с помощью квадратурных формул Лягерра с количеством узлов, равным 10. Систему уравнений (9),(10) решаем методом редукции. Напряжения в плоскости $z=0$ между граничными поверхностями можно вычислить по формуле

$$\sigma_z = -\frac{1}{\tilde{c}_j \tilde{q}_j} \sum_{j=1}^2 \mu_j v_j \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n^{(j)} Q_n^{(1)}(i\tilde{q}_j) + \alpha_{nj} P_n^{(1)}(i\tilde{q}_j) \right] P_n(0).$$

Результаты численных исследований. Проведен численный анализ напряжений при различных соотношениях геометрических параметров. На рисунках 1, 2 показаны графики напряжений σ_z в экватори-

альной плоскости полости между граничными поверхностями при приближении границы внутренней полости к границе параболоида, когда форма сфероидальной полости и параболоида не меняется.

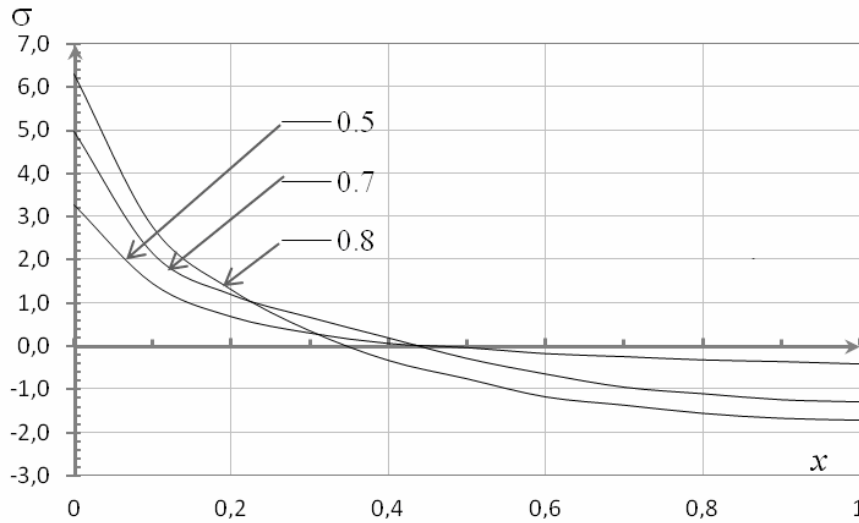


Рисунок 1 – Напряжения σ_z для случая $g_2/g_1 = 0.2$, $c_p/c_2 = 0.2$

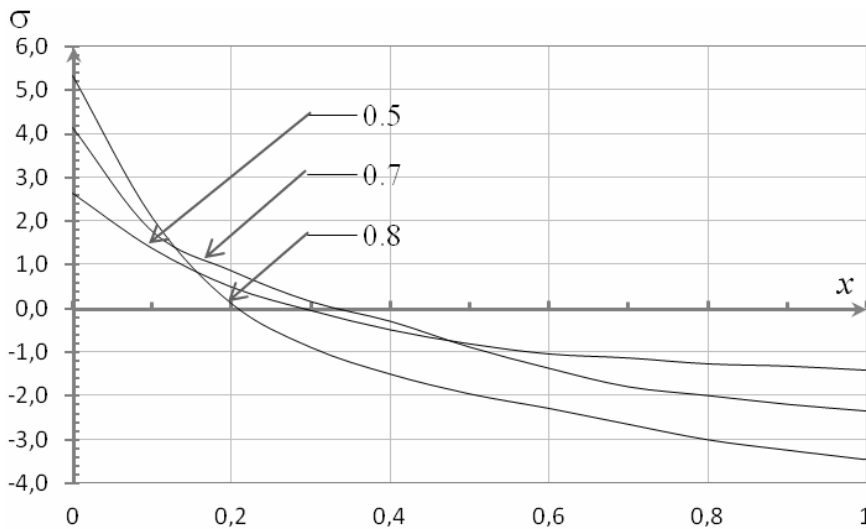


Рисунок 2 – Напряжения σ_z для случая $g_2/g_1 = 0.2$, $c_p/c_2 = 0.8$

Значения напряжений $\sigma = \sigma_z / C_{44} \sigma_0$ приведены в зависимости от координаты $x = (\rho - g_2) / (c_p - g_2)$ при различных значениях параметра $\lambda = c_p / g_2$. Анализируя приведенные графики нужно отметить, что сближение граничных поверхностей приводит к росту абсолютной величины напряжений на обеих граничных поверхностях. Растягивающие напряжения концентрируются в окрестности нагруженной полости. В окрестности внешней границы наблюдаются сжимающие напряжения, причем для параболоида с большей кривизной их абсолютная величина меньше.

Список использованных источников

1. Magnier V. Asymptotic approach to analyze singular stress state in anisotropic multi-material: Application to the rivets / V. Magnier, G. de Saxcé, S. Degallaix // Int. Journal of Solids and Structures. – 2010. – V. 47, Issue 16. – P. 2070-2080
2. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium / H. Toshiaki // Journal Of Thermal Stresses. - 2002. – V. 25. – №7. – P. 691 - 702.
3. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong // Int. Journal of Solids and Structures. – 2002. - V. 39, Issue 23, P. 5753 - 5765.
4. Wang X. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere / X. Wang , C. Wang , G. Lu , B. M. Zhou, // Journal Of Thermal Stresses. – 2002. – V. 25. – №1. – P. 31 – 44.
5. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Ю.Н Подильчук // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33. – №10. – С.3 - 30.
6. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения трехмерных статических задач термоупругости трансверсально изотропного тела в криволинейной системе координат / Ю. Н. Подильчук // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37. – № 6.
7. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел / А.Г. Николаев; – ХАИ. – Х., 1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, №1568 – Ук 96.
8. Николаєв О.Г. Аналіз напружено-деформівного стану трансферсально ізотопного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О.Г. Ніколаєв, Ю.А. Щербакова // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2007. Вип. 12. – С. 141 - 147.
9. Николаев А.Г. Напряженное состояние трансверсального изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб.науч. тр. Нац. аерокосмич. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 4(51). Х.: НАКУ, 2007. – С.49 - 54.
10. Николаев А.Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – . № 4. – С. 160 - 169.
11. Подильчук Ю.Н. Упругая деформация трансверсально изотропного параболоида вращения / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1989. – Т.25, №2. – С. 12 - 19.

Поступила в редакцию 15.12.2010.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Проценко В.С.
 Национальный аэрокосмический университет
 им. Н.Е. Жуковского, г. Харьков*