

Безмоментное состояние сжатой панели при наличии в обшивке диагональных волн растяжения Часть 1

Рассматривается сжатая панель крыла. Предполагается известным ее напряженное состояние, полученное при расчете крыла с помощью теории тонкостенного стержня, и критические напряжения потери устойчивости обшивки при совместном действии сжатия и сдвига. Считается, что ребра с присоединенной обшивкой работают на сжатие, обшивка работает только на сдвиг. Исследуется работа панели после потери устойчивости обшивки и появления диагональных волн растяжения.

В монографии [1] в подобной постановке рассмотрена более простая задача о расчете балки с тонкой стенкой. Там же выполнен обзор литературы, посвященный расчету таких балок. В настоящей работе при решении существенно более сложной задачи для сжатой ребристой панели использована основная идея Куна [1], суть которой – напряженное состояние в клетке обшивки ищется в виде суммы: чистый сдвиг плюс диагональное поле растяжения. Кроме того, учитывается дополнительное сжатие обшивки и исследуется случай, когда жесткости ребер, ограничивающих клетку обшивки, существенно различаются.

1. Общие понятия и обозначения

При работе сжатой ребристой панели после потери обшивкой устойчивости от совместного действия сжатия и сдвига в обшивке действует касательное напряжение, но появляются и диагональные волны растяжения. Волны, воздействуя на ребра, приводят к дополнительному сжатию ребер и обшивки. Напряженно-деформированное состояние клетки, состоящей из обшивки и ограничивающих ее ребер, представим в виде суммы из пяти задач, для которых введем обозначения: $тс$, $чс$, $др$, $дс$, $кор$. Обозначениям соответствуют такие напряженные состояния:

$тс$ – напряженное состояние продольных ребер с присоединенной обшивкой, найденное по теории тонкостенного стержня, а также поперечных ребер, полученное по балочной теории, считая рядовые нервюры балками, работающими на изгиб;

$чс$ – чистый сдвиг обшивки;

$др$ – диагональное растяжение обшивки;

$дс$ – дополнительное сжатие ребер, вызванное волнами растяжения;

$кор$ – корректирующее решение, учитывающее дополнительное сжатие обшивки и то, что жесткости ребер на сжатие в пределах одной клетки могут быть разными.

Величины, относящиеся к указанным задачам, содержат обозначения задач в качестве индексов. Параметры, связанные с элементами клеток панели, имеют индексы: $пр$ – для продольных, $пп$ – для поперечных ребер; $о, х, z, хz$ – для обшивки, $опр$ и $опп$ – для участков обшивки,

присоединенной с одной стороны к продольному или к поперечному ребру. Системы координат (xz), локальные для каждой клетки, лежат в плоскости обшивки, оси Z действуют вдоль оси тонкостенного стержня. Для цифровой нумерации элементов панели вдоль осей x, z используем индексы j, i (рис. 1). Номера ребер и клеток обшивки соответствуют индексам двумерного массива (матрицы): j – строка, i – столбец. Номера участков присоединенной обшивки соответствуют индексам четырехмерного массива. Первые два индекса равны номеру ребра, к которому присоединены участки обшивки, третий и четвертый индексы равны номеру клетки, в которой расположены эти участки.

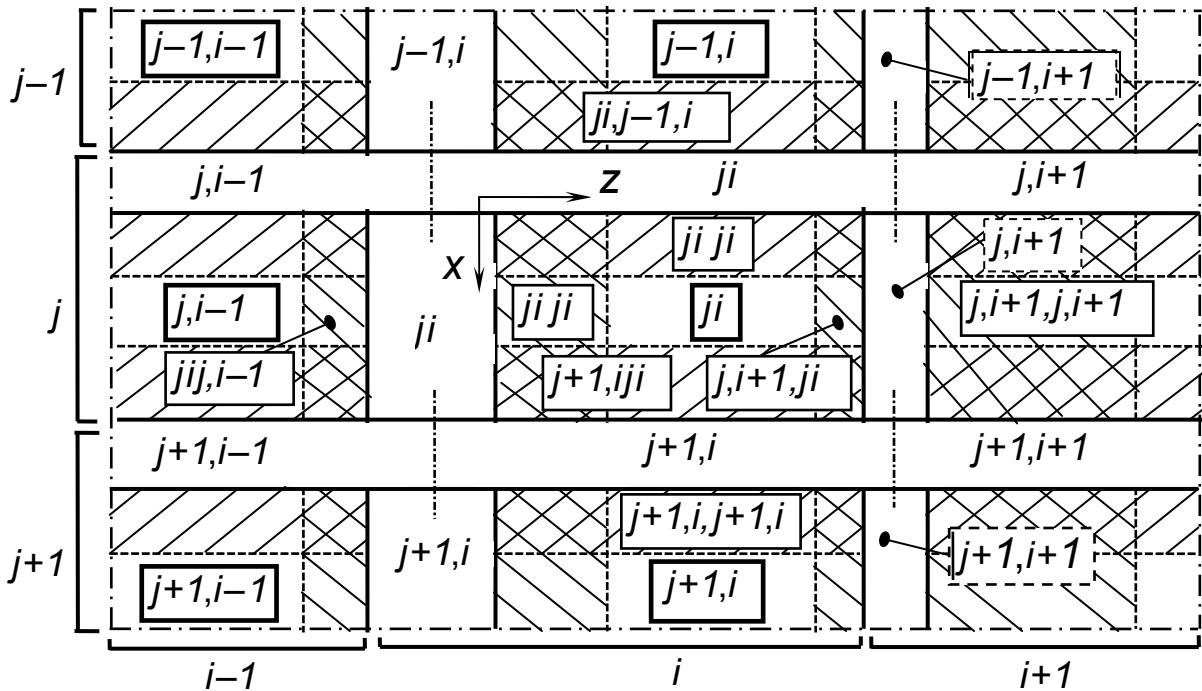


Рисунок 1 – Номера (индексы) элементов панели: номера ребер – без рамок, номера участков присоединенной обшивки (заштрихованы) – в рамках с тонкими линиями, номера клеток обшивки – в рамках с полужирными линиями

Для величин (напряжения, деформации, усилия в ребрах), которые соответствуют элементам клеток, указанные номера используем в качестве индексов. Например, ширину участков обшивки, присоединяемых к ji -му продольному ребру и расположенных в клетках $j-1, i$ и ji , обозначаем как $S_{ji, j-1, i}$ и $S_{ji, ji}$. Для напряжений в обшивке и для усилий в ребрах используем обозначения: $\sigma_{z', \partial p, ji}$ – напряжение, действующее в обшивке ji -й клетки вдоль диагональных волн; $N_{пр\ ji, j-1, i}$ – усилие в ji -м продольном ребре от воздействия напряжений в обшивке клетки $j-1, i$.

Далее наряду с полной используем сокращенную запись индексов. При величинах, относящихся к j -й и i -й полосам клеток (рис.1), опускаем индексы j и i . Тогда приведенные выше обозначения для ширины присоединенной обшивки и для усилия в продольном ребре принимают вид

$c_{j,j-1}$, c_{jj} и $N_{пр j,j-1}$. Более того, обычно опускаем цифровые индексы при величинах, относящихся к обшивке ji -й клетки, например: $\sigma_z \partial p$, X , Z , T . При величинах, которые относятся к ребрам и зависят от действующих в обшивке ji -й клетки напряжений и деформаций, оставляем только один цифровой индекс: i – для поперечных и j – для продольных ребер.

Используем теорию редуцирования. Согласно общепринятой теории [2], применяемой в одномерных задачах, коэффициенты редукиции для ребер и для присоединенной обшивки определяем по формулам

$$\varphi_{p,k} = E_{p,k}/E_r; \quad \varphi_{op,km} = E_{op,km}/E_r \quad (p=пп, k=i, i+1; p=пр, k=j, j+1), \quad (1)$$

где в числителях правых частей формул расположены секущие модули упругости ребер и присоединенной обшивки;

E_r – модуль упругости некоторого изотропного материала, относительно которого производится редуцирование.

Рассмотрим вопрос о применении теории редуцирования к плоской задаче для обшивки. Уравнения физического закона имеют вид

$$\varepsilon_{\partial} = \mathbf{A}_{\partial} \sigma_{\partial}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \mathbf{A}_r \sigma_r, \quad (3)$$

где σ и ε – векторы напряжений и деформаций

$$\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_z \quad \tau_{xz}\}^T, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xz}\}^T; \quad (4)$$

\mathbf{A}_{∂} – матрица упругих постоянных материала обшивки;

\mathbf{A}_r – матрица упругих постоянных некоторого фиктивного материала, относительно которого производим редуцирование;

r и ∂ – индексы, которыми помечаем редуцированные и действительные напряжения и площади поперечных сечений клетки обшивки.

Используя основные положения теории редуцирования, запишем:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\partial} \rightarrow \mathbf{A}_r \sigma_r = \mathbf{A}_{\partial} \sigma_{\partial} \rightarrow \mathbf{A}_{\partial}^{-1} \mathbf{A}_r \sigma_r = \sigma_{\partial} \rightarrow \varphi = \mathbf{A}_{\partial}^{-1} \mathbf{A}_r \rightarrow \sigma_{\partial} = \varphi \sigma_r; \quad (5)$$

$$N_{xr} = N_{x\partial} \rightarrow f_{xr} \sigma_{xr} = a \delta \sigma_{x\partial} \rightarrow f_{xr} \sigma_{xr} = a \delta (\varphi_{11} \sigma_{xr} + \varphi_{12} \sigma_{zr}),$$

$$N_{zr} = N_{z\partial} \rightarrow f_{zr} \sigma_{zr} = b \delta \sigma_{z\partial} \rightarrow f_{zr} \sigma_{zr} = b \delta (\varphi_{21} \sigma_{xr} + \varphi_{22} \sigma_{zr}),$$

$$N_{x_zr} = N_{x_z\partial} \rightarrow f_{x_zr} \tau_{x_zr} = a \delta \tau_{x_z\partial} \rightarrow f_{x_zr} \tau_{x_zr} = a \delta \varphi_{33} \tau_{x_zr}, \quad (6)$$

где N_x , N_z , N_{xz} – погонные усилия; f_{xr} , f_{zr} , f_{x_zr} , f_{z_xr} – редуцированные площади поперечных сечений обшивки в ji -й клетке; a и b – размеры обшивки вдоль осей Z и X ; δ – ее толщина.

В формулах (5) введены такие обозначения:

$$\mathbf{A}_{\partial} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{\partial}^{-1} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & 0 & 0 \\ 0 & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/E_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/E_r & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_r^{-1} = \mathbf{L}_r \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где ν и μ – коэффициенты Пуассона в матрицах \mathbf{A}_∂ и \mathbf{A}_r ; \mathbf{L}_r – матрица \mathbf{L} в редуцированном состоянии, в которой следует произвести замены: $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_r$, $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}_r$, $\nu \rightarrow \mu$.

Для коэффициентов редукции в обшивке получим выражение

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}_\partial^{-1} \mathbf{A}_r = \mathbf{L} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1-\nu\mu & \nu-\mu & 0 \\ \nu-\mu & 1-\nu\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Расчеты будем производить в редуцированном состоянии. Введем понятия: \mathbf{V} – диагональная матрица объемов с компонентами $ab\delta$, \mathbf{V}_r – диагональная матрица редуцированных объемов. При вычислении функционалов вариационного принципа используем зависимости

$$\mathbf{V}_r = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{V}, \quad d\mathbf{V}_r \boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}_r, \quad (10)$$

которые получены из формул (5) и (6) с помощью уравнений

$$\int_{V_r} [N_{xr} dx \ N_{zr} dy \ N_{x zr} dx]^T = \int_{V_r} d\mathbf{V}_r \boldsymbol{\sigma}_r = \int_V \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}_r,$$

а также зависимости

$$\mathbf{E}_r \mathbf{A}_r \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{E}_r \mathbf{D} \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}. \quad (11)$$

Не равные нулю элементы в матрицах \mathbf{D} , $\boldsymbol{\psi}$ и δ_r (последняя – матрица редуцированных толщин обшивки) имеют значения:

$$\psi_{11} = \psi_{22} = (1 - \mu(2\nu - \mu)) / (1 - \nu^2), \quad \psi_{12} = \psi_{21} = (\nu(1 + \mu^2) - 2\mu) / (1 - \nu^2), \quad \psi_{33} = 1; \\ D_{11} = D_{22} = E/E_r^2, \quad D_{33} = G/G_r^2; \quad \delta_{r nk} = \varphi_{nk} \delta \quad (n, k = 11, 12, 21, 22, 33). \quad (12)$$

При $\mu = 0,3$; $\nu = 0,4$ имеем $\psi_{11} = 1,01$; $\psi_{12} = 0,233$, при $\mu = 0,3$; $\nu = 0,3$ имеем $\psi_{11} = 1,0$; $\psi_{12} = -0,3$.

2. Напряжения и деформации

Запишем сначала формулы для напряжений в ji -й клетке обшивки в задачах ЧС и ∂p , следуя работе [1]. Индексы j , i и r при напряжениях и деформациях опускаем. Касательное напряжение, действующее в обшивке, представим в виде суммы

$$\tau = \tau_{чс} + \tau_{\partial p}, \quad (13)$$

где $\tau_{чс}$ – часть напряжения τ , соответствующая чистому сдвигу;

$\tau_{\partial p}$ – часть τ , которая соответствует диагональному растяжению.

В работе [1] введен коэффициент диагонального поля растяжения

$$k_{\partial p} = \tau_{\partial p} / \tau = (\tau - \tau_{чс}) / \tau. \quad (14)$$

Для балки с тонкой стенкой значение этого коэффициента можно найти по эмпирической формуле [1]

$$k_{\partial p} = th(0,5lg(\tau/\tau_{кр})), \quad (15)$$

выраженной через критическое касательное напряжение в стенке. Тогда

$$\tau_{чс} = (1 - k_{\partial p})\tau, \quad \tau_{\partial p} = \tau - \tau_{чс} = k_{\partial p}\tau. \quad (16)$$

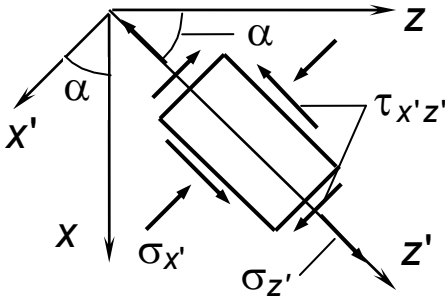


Рисунок 2 – Напряжения в системе координат \$(x'z')\$

В настоящей работе произведем существенную коррекцию алгоритма Куна. В качестве одной из основных величин введем параметр T формулами

$$\tau_{\partial p} = T, \quad \tau_{чс} = \tau - T. \quad (17)$$

Введем для задачи \$\partial p\$ координатную систему \$(x'z')\$ (рис. 2), ось \$z'\$ которой направлена вдоль максимальной из главных деформаций. Угол \$\alpha\$ называют углом наклона диагональных волн. Напряжения

в обшивке в системе координат \$(x'z')\$ для задач чс и \$\partial p\$ ищем в виде

$$\sigma_{x'чс} = -\tau_{чс} \sin 2\alpha; \quad \sigma_{z'чс} = \tau_{чс} \sin 2\alpha; \quad \tau_{x'z'чс} = \tau_{чс} \cos 2\alpha, \quad (18)$$

$$\sigma_{x'\partial p} = -\tau_{кр}; \quad \sigma_{z'\partial p} = 2\tau_{\partial p} / \sin 2\alpha; \quad \tau_{x'z'\partial p} = 0. \quad (19)$$

Выполняя поворот осей \$x', z'\$ на угол \$\alpha\$ [3], в системе \$(xz)\$ имеем

$$\sigma_{xчс} = 0; \quad \sigma_{zчс} = 0; \quad \tau_{xzчс} = \tau - T, \quad (20)$$

$$\sigma_{x\partial p} = T \operatorname{tg} \alpha - \tau_{кр} \cos^2 \alpha; \quad \sigma_{z\partial p} = T \operatorname{ctg} \alpha - \tau_{кр} \sin^2 \alpha; \quad (21)$$

$$\tau_{xz\partial p} = T + \tau_{кр} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Рассмотрим деформации в обшивке в задаче \$\partial p\$. В системе координат \$(x'z')\$ введем обозначения

$$\varepsilon_{1\partial p} = \varepsilon_{z'\partial p}; \quad \varepsilon_{2\partial p} = \varepsilon_{x'\partial p}; \quad \gamma_{x'z'\partial p} = 0. \quad (22)$$

Используя формулы преобразования при повороте осей [3], вычислим деформации в обшивке в системе координат \$(xz)\$. Получим систему алгебраических уравнений

$$\varepsilon_{x\partial p} = \varepsilon_{2\partial p} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{1\partial p} \sin^2 \alpha; \quad \varepsilon_{z\partial p} = \varepsilon_{2\partial p} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{1\partial p} \cos^2 \alpha; \quad (23)$$

$$\gamma_{xz\partial p} = (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{2\partial p}) \sin 2\alpha.$$

Исключая деформацию \$\varepsilon_{2\partial p}\$ в уравнениях (23), получим варианты формул для деформаций сдвига:

$$\gamma_{xz\partial p} = 2(\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{z\partial p}) \operatorname{ctg} \alpha; \quad \gamma_{xz\partial p} = 2(\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{x\partial p}) \operatorname{tg} \alpha. \quad (24)$$

Суммируя равенства (24), а также вычитая одно из другого, имеем

$$\gamma_{xz\partial p} = (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{x\partial p}) \operatorname{tg} \alpha + (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{z\partial p}) \operatorname{ctg} \alpha; \quad (25)$$

$$(\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{x\partial p}) \operatorname{tg} \alpha = (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{z\partial p}) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (26)$$

Приравняв произведение правых частей уравнений (24) произведению левых частей этих уравнений и учитывая равенства (25), получим еще один вариант формул для деформаций сдвига:

$$\gamma_{xz\partial p}^2 = 4(\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{x\partial p})(\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{z\partial p}). \quad (27)$$

Решением уравнения (26) является равенство

$$tg^2\alpha = (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{z\partial p}) / (\varepsilon_{1\partial p} - \varepsilon_{x\partial p}), \quad (28)$$

из которого можно найти угол α наклона диагональных волн. Вместо (28) можно использовать уравнение

$$(\varepsilon_{z\partial p} - \varepsilon_{x\partial p})tg2\alpha = \gamma_{xz\partial p}. \quad (29)$$

Запишем формулы для напряжений в задаче *кор*, действующих в обшивке *ji*-й клетки размером $b \times a$ и выраженных через напряжения X , Z добавочного сжатия обшивки от воздействия диагональных волн и через параметры R, S . Запишем также значения коэффициентов g_k и g_{k+1} , задающих в задаче *кор* распределение между ребрами k и $k+1$ сил, которые передаются от обшивки на ребра и являются равнодействующими компонентов напряжений задачи *кор*, изменяющихся по треугольному закону. Эти напряжения и коэффициенты полагаем равными:

$$\sigma_{x\text{ кор}} = X + zR/a, \quad \sigma_{z\text{ кор}} = 0; \quad g_i = 1/6, \quad g_{i+1} = 1/3 \quad (Ж_{пп\ i} \ll Ж_{пп\ i+1}), \quad (30)$$

$$\sigma_{x\text{ кор}} = 0, \quad \sigma_{z\text{ кор}} = Z + xS/b; \quad g_j = 1/6, \quad g_{j+1} = 1/3 \quad (Ж_{пр\ j} \ll Ж_{пр\ j+1}), \quad (31)$$

$$\sigma_{x\text{ кор}} = X + (a-z)R/a, \quad \sigma_{z\text{ кор}} = 0; \quad g_i = 1/3, \quad g_{i+1} = 1/6 \quad (Ж_{пп\ i} \gg Ж_{пп\ i+1}), \quad (32)$$

$$\sigma_{x\text{ кор}} = 0, \quad \sigma_{z\text{ кор}} = Z + (b-x)S/b; \quad g_j = 1/3, \quad g_{j+1} = 1/6 \quad (Ж_{пр\ j} \gg Ж_{пр\ j+1}). \quad (33)$$

Символами $Ж_{пп}$ и $Ж_{пр}$ обозначены жесткости ребер на сжатие. Под понятием "ребро" понимается: "ребро с присоединенной обшивкой". Ребра большей жесткости называем сильными, меньшей жесткости – слабыми. В формулах (30), (31) для *ji*-й клетки обшивки, окантованной поперечными ребрами с номерами i и $i+1$ и продольными ребрами с номерами j и $j+1$, сильные ребра имеют номера $i+1, j+1$. В формулах (32) и (33) сильные ребра имеют номера j, i .

Считаем, что в задаче $\partial p + \text{кор} + \partial c$ в местах стыка *ji*-го участка обшивки с ребрами выполняются условия

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(X, 0) &= \varepsilon_{пп\ i}, & \varepsilon_z(0, Z) &= \varepsilon_{пр\ j}, \\ \varepsilon_x(X, a) &= \varepsilon_{пп\ i+1}, & \varepsilon_z(b, Z) &= \varepsilon_{пр\ j+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем такие параметры и обозначения

$$\begin{aligned} \theta &= 1, & \eta_z(\theta, z) &= \eta_z(1, z) = z/a \quad (i\text{- слабое ребро, } i+1\text{- сильное ребро}); \\ \lambda &= 1, & \eta_x(\lambda, x) &= \eta_x(1, x) = x/b \quad (j\text{- слабое ребро, } j+1\text{- сильное ребро}); \\ \theta &= -1, & \eta_z(\theta, z) &= \eta_z(-1, z) = (a-z)/a \quad (i\text{- сильное, } i+1\text{- слабое ребро}); \\ \lambda &= -1, & \eta_x(\lambda, x) &= \eta_x(-1, x) = (b-x)/b \quad (j\text{- сильное, } j+1\text{- слабое ребро}); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\theta' = (\theta - 1)/2, \quad \theta'' = (\theta + 1)/2, \quad \lambda' = (\lambda - 1)/2, \quad \lambda'' = (\lambda + 1)/2; \quad (36)$$

$$\Delta_{пп} = \theta(\varepsilon_{пп\ i+1} - \varepsilon_{пп\ i}), \quad \Delta_{пр} = \lambda(\varepsilon_{пр\ j+1} - \varepsilon_{пр\ j}). \quad (37)$$

Если жесткости продольных ребер в ji -й клетке одинаковы и в этих ребрах равны деформации в задаче mc , то в формулах (37) – (35) и далее принимаем: $\lambda=1$, $g_j = g_{j+1}=1/4$. При аналогичных условиях для поперечных ребер принимаем: $\theta=1$, $g_j = g_{j+1}=1/4$. При работе с величинами формул (35) и (36) удобно использовать таблицу

θ	λ	$x=0$ $\eta_x(\lambda,0)$	$z=0$ $\eta_z(\theta,0)$	$x=b$ $\eta_x(\lambda,b)$	$z=a$ $\eta_z(\theta,a)$	θ''	θ'	λ''	λ'
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
-1	1	0	1	1	0	0	-1	1	0
1	-1	1	0	0	1	1	0	0	-1
-1	-1	1	1	0	0	0	-1	0	-1

Строки таблицы соответствуют клеткам обшивки, расположенным в углах панели крыла (см. рис. 1). Вторая строка соответствует правой нижней угловой клетке, третья – левой нижней, четвертая – правой верхней и пятая – левой верхней угловой клетке.

Полагая малые величины μ - ν в матрицах (9) равными нулю, параметры R и S , вводимые в задаче $кор$ и соответствующие растягивающим напряжениям, принимаем равными

$$R = E_r \Delta_{пп}, \quad S = E_r \Delta_{пр}. \quad (38)$$

Учитывая равенства (30) – (33) и обозначения в формулах (35) и (38), для нормальных напряжений в обшивке в задаче $кор$ запишем:

$$\begin{aligned} \sigma_{x\text{ кор}} &= X + E_r \Delta_{пп} \eta_z(\theta, z) + B_x \nu_x L_{z1}(z), \\ \sigma_{z\text{ кор}} &= Z + E_r \Delta_{пр} \eta_x(\lambda, x) + B_z \nu_z L_{x1}(x), \end{aligned} \quad (39)$$

где B_x, B_z – неизвестные величины; ν_x, ν_z – параметры, в общем случае равные единице; $L_{x1}(x), L_{z1}(z)$ – полиномы Лежандра

$$L_{x1}(x) = 2(\eta_x(\lambda, x) - 1/2), \quad L_{z1}(z) = 2(\eta_z(\theta, z) - 1/2), \quad (40)$$

ортогональные на отрезках $[b, 0]$ и $[a, 0]$.

Учитывая формулы (21) и (39), найдем для задачи $\partial p + кор + \partial c$ силы, которые являются равнодействующими действующих в обшивке ji -й клетки нормальных напряжений и воздействуют на ребра. Распределяя эти силы между ребрами, получим формулу для усилий в ребрах:

$$\{N_{пп\ i+k} = -a \delta \varphi_{11} (\tilde{X}/2 + g_{i+k} \Delta_{пп} E_r + (-1)^k B_x \theta \nu_x / 6) \quad (k=0,1)\}, \dots, \quad (41)$$

$$\tilde{X} = T \operatorname{tg} \alpha - \tau_{кр} \cos^2 \alpha + X, \quad \tilde{Z} = T \operatorname{ctg} \alpha - \tau_{кр} \sin^2 \alpha + Z. \quad (42)$$

Выражения в фигурных скобках формулы (41) и в приводимых далее формулах, содержащих фигурные скобки с многоточием, справедливы только для поперечных ребер, для напряжений X и для величин с ин-

дексом x , относящихся к обшивке. Для получения выражений для продольных ребер и для величин с символами Z и Z , относящихся к обшивке, в наборе, заключенном в фигурные скобки, следует поменять местами индексы и величины:

$$pp \leftrightarrow pr, i \leftrightarrow j, \theta \leftrightarrow \lambda, x \leftrightarrow z, X \leftrightarrow Z, \varphi_{11} \leftrightarrow \varphi_{22}, \operatorname{tg} \alpha \leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha, \cos \alpha \leftrightarrow \sin \alpha, \\ a \leftrightarrow b, b/a = \rho \leftrightarrow a/b = 1/\rho, u \leftrightarrow v \quad (43)$$

и поместить полученные выражения на место многоточия.

Формулы для редуцированных напряжений в редуцированных сечениях ребер ji -й клетки от воздействия усилий (41) имеют вид

$$\sigma_{ppk} = N_{ppk} / f_{ppk} \quad (k = i, i+1), \quad \sigma_{prn} = N_{prn} / f_{prn} \quad (n = j, j+1). \quad (44)$$

В этих формулах и далее индекс r при величинах опущен,

f_{ppk} , f_{prn} – эффективные площади редуцированных поперечных сечений ребер с присоединенной обшивкой, которые необходимо вводить вместо фактических площадей при внецентренном приложении сжимающей нагрузки от обшивки к ребрам [1];

Для неэффективных редуцированных площадей сечений ребер с присоединенной обшивкой справедливы формулы

$$F_{xk} = F_{pp,k} \varphi_{pp,k} + d_{kk} \delta_k \varphi_{opp,kk} + d_{k,k-1} \delta_{k-1} \varphi_{opp,k,k-1} \quad (k = i, i+1); \\ F_{zn} = F_{pr,n} \varphi_{pr,n} + c_{nn} \delta_n \varphi_{opr,nn} + c_{n,n-1} \delta_{n-1} \varphi_{opr,n,n-1} \quad (n = j, j+1), \quad (45)$$

где $F_{pp,k}$, $F_{pr,n}$ – площади поперечных сечений ребер без обшивки;

c_{nm} , d_{kl} – значения ширины участков обшивки m -й и l -й клеток, присоединяемой к продольным n и поперечным k ребрам.

Для эффективных площадей используем зависимости [1]

$$f_{ppk} = F_{xk} / (1 + (e'_{ppk} / \rho_{ppk})^2); \quad f_{prn} = F_{zn} / (1 + (e'_{prn} / \rho_{prn})^2), \quad (46)$$

где e'_{ppk} , e'_{prn} , ρ_{ppk} , ρ_{prn} – эксцентриситеты приложения нагрузки от обшивки к ребрам и радиусы инерции сечений ребер с присоединенной обшивкой относительно осей z , x . Если нагрузка действует вдоль осей ребер, то можно принять $e'_{ppk} = 0$, $e'_{prn} = 0$.

Деформации в ребрах выражаем через редуцированные напряжения (44) с помощью уравнений закона Гука. При этом учитываем деформации в ребрах, вычисляемые в задаче mc . Имеем формулы

$$\{\varepsilon_{ppi+k} = (\sigma_{ppi+k} + \tilde{\rho}_{ppi+k}) / E_r, \quad \tilde{\rho}_{ppi+k} = E_r \varepsilon_{mcppi+k} \quad (k = 0, 1)\}; \dots \quad (47)$$

Подставляя в уравнение (37) деформации (47), записанные с учетом формул (41) – (44), получим две системы уравнений относительно величин Δ_{pp} и Δ_{pr} . Решая эти системы и введя обозначения

$$\{Q_{pp} = 1 - \theta a \delta \varphi_{11} (g_i / f_{ppi} - g_{i+1} / f_{ppi+1}), \quad \rho_{pp} = \theta (\varepsilon_{mcppi+1} - \varepsilon_{mcppi}) / (Q_{pp}), \\ r_{pp} = \theta a \delta \varphi_{11} (1 / f_{ppi} - 1 / f_{ppi+1}) / (2Q_{pp}),$$

$$s_{pp} = a \delta \varphi_{11} v_x (1/f_{ppi} + 1/f_{ppi+1}) / (6Q_{pp}); \dots, \quad (48)$$

получим

$$\Delta_{pp} = (\tilde{x} r_{pp} + B_x s_{pp}) / E_r + p_{pp}, \quad \Delta_{pp} = (\tilde{z} r_{pp} + B_z s_{pp}) / E_r + p_{pp}. \quad (49)$$

Формулы (41) с учетом равенств (49) принимают вид

$$\{N_{ppi+k} = -(\tilde{x} H_{ppi+k} + B_x G_{ppi+k} + D_{ppi+k}), \quad D_{ppi+k} = a \delta \varphi_{11} g_{i+k} p_{pp} E_r, \\ H_{ppi+k} = a \delta \varphi_{11} (1/2 + g_{i+k} r_{pp}), \quad G_{ppi+k} = a \delta \varphi_{11} (g_{i+k} s_{pp} + (-1)^k \theta v_x / 6), \\ (k=0,1)\}; \dots. \quad (50)$$

Зависимости (47) с учетом формул (44) и (50) заменяем на

$$\{\varepsilon_{ppk} = -(\tilde{x} h_{ppk} + B_x g_{ppk} + d_{ppk}) / E_r, \quad h_{ppk} = H_{ppk} / f_{ppk}, \\ g_{ppk} = G_{ppk} / f_{ppk}, \quad d_{ppk} = D_{ppk} / f_{ppk} - \tilde{p}_{ppk} \quad (k=i, i+1)\}; \dots. \quad (51)$$

Напряжения X и Z дополнительного сжатия обшивки при наличии диагональных волн растяжения принимаем равными:

$$X = E_r \varepsilon_{ppi-\theta'}, \quad Z = E_r \varepsilon_{ppj-\lambda'}. \quad (52)$$

Из системы уравнений (51), (52), (42) найдем выражения для приведенных в формулах (52) деформаций в ребрах. Имеем

$$\{\varepsilon_{ppi-\theta'} = -(T \tilde{h}_{pp} + B_x \tilde{b}_{pp} - \tilde{d}_{pp}) / E_r, \quad \tilde{t}_{pp} = tg \alpha / w_{pp}, \quad \tilde{h}_{pp} = \tilde{t}_{pp} h_{ppk}, \\ \tilde{b}_{pp} = g_{ppk} / w_{pp}, \quad \tilde{d}_{pp} = (\tau_{кр} \cos^2 \alpha h_{ppk} - d_{ppk}) / w_{pp}, \\ w_{pp} = 1 + h_{ppk} \quad (k=i-\theta')\}; \dots. \quad (53)$$

Уравнения (49) с учетом формул (42), (52) и (53) принимают вид

$$\{\Delta_{pp} = (T t_{pp} + B_x b_{pp} - e_{pp}) / E_r, \quad t_{pp} = \tilde{t}_{pp} r_{pp}, \quad b_{pp} = s_{pp} - \tilde{b}_{pp} r_{pp}, \\ \tilde{e}_{pp} = (\tau_{кр} \cos^2 \alpha + d_{ppi-\theta'}) / w_{pp}, \quad e_{pp} = \tilde{e}_{pp} r_{pp} - p_{pp} E_r\}; \dots. \quad (54)$$

Учитывая формулы (34) – (37), выразим деформации в обшивке ji -й клетки через деформации ребер. Для линейных деформаций получим

$$\varepsilon_x = \Delta_{pp} \eta_z(\theta, Z) + \varepsilon_{ppi-\theta'}, \quad \varepsilon_z = \Delta_{pp} \eta_x(\lambda, X) + \varepsilon_{ppj-\lambda'}. \quad (55)$$

Для деформаций сдвига в задаче $dp+cs+cor$ с учетом равенства (29) можно записать формулу

$$\gamma_{xz} = (\varepsilon_z - \varepsilon_x) t_0 + \tau_{cs} / G_r, \quad (56)$$

где $t_0 = tg 2\alpha$; G_r – модуль сдвига материала, относительно которого производится редуцирование.

3. Определение перемещений, введение дополнительных слагаемых в корректирующем решении

Переходим к задаче определения перемещений в обшивке ji -й клетки. Используем алгоритм, в котором рассматривается i -я полоса клеток, то есть клетки примыкают к поперечному сечению крыла. Линейные де-

формации определяются формулами (55), для деформаций сдвига из формул (56), (55) и (17) следуют выражения

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= (\tau - T)/G_r + (\Delta_{pp} \eta_x(\lambda, x) - \Delta_{pp} \eta_z(\theta, z)) t_0 + E_x - E_z; \\ E_x &= -\varepsilon_{ppi-\theta} t_0, \quad E_z = -\varepsilon_{prj-\lambda} t_0. \end{aligned} \quad (57)$$

Проинтегрируем уравнения Коши плоской задачи для обшивки ji -й клетки с учетом формул (55), (57), (34) – (35), выражая при этом перемещения через параметры u_{j-1} , u'_{j-1} и v_{j-1} , равные значениям перемещений в точках $(b, 0)$ и (b, a) клетки $j-1, i$. Получим формулы

$$\begin{aligned} \{u &= u_0 + \tilde{u}(z) + \lambda(\varepsilon_{ppi-\theta} + \Delta_{pp} \eta_z(\theta, z)) b \eta_x(\lambda, x)\}, \dots; \\ \{\tilde{u}(z) &= [\theta(\mathbf{e}_x - \beta_x \mathbf{E}_x) + (\beta_x \theta \Delta_{pp} t_0 - \lambda \Delta_{pp} / \rho) \eta_z(\theta, z) / 2] a \eta_z(\theta, z)\}, \dots; \quad (58) \\ u_0 &= \theta'' u_{j-1} - \theta' u'_{j-1} - \lambda' b \varepsilon_{ppi-\theta}, \quad v_0 = v_{j-1} - \tilde{v}(0) - \theta' a \varepsilon_{prj}, \\ \mathbf{e}_x &= (u'_{j-1} - u_{j-1}) / a - \lambda' \theta \Delta_{pp} \rho + \lambda \theta \Delta_{pp} / 2 \rho + \varepsilon_{xx} t_0, \quad \mathbf{e}_z = (\tau - T) / G_r - \mathbf{e}_x, \\ \rho &= b/a, \quad \beta_x = -1, \quad \beta_z = 1, \quad \{\varepsilon_{xx} = (\varepsilon_{ppi+1} + \varepsilon_{ppi}) / 2\}, \dots. \quad (59) \end{aligned}$$

Значения перемещений в угловых точках обшивки ji -й клетки равны:

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= u_{j-1}, \quad u(0, a) = u'_{j-1}, \quad u(b, 0) = u_{j-1} + b \varepsilon_{ppi}, \quad u(b, a) = u'_{j-1} + b \varepsilon_{ppi+1}; \\ v(0, 0) &= v_{j-1}, \quad v(0, a) = v_{j-1} + a \varepsilon_{prj}, \quad v(b, 0) = v_{j-1} + w, \quad w = (\mathbf{e}_z + \varepsilon_{zz} t_0 - \\ & - \lambda \theta \Delta_{pp} \rho / 2) b + \lambda \theta' a \Delta_{pp}, \quad v(b, a) = v(b, 0) + a \varepsilon_{prj+1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Перемещения на линиях контура этой клетки таковы:

$$\begin{aligned} u(0, z) &= \theta'' u_{j-1} - \theta' u'_{j-1} + \tilde{u}(z) + \lambda' \Delta_{pp} b \eta_z(\theta, z), \\ u(b, z) &= u(0, z) + b \varepsilon_{ppi-\theta} + \Delta_{pp} b \eta_z(\theta, z); \\ v(x, 0) &= v_0 + \tilde{v}(x) + \theta' a (\varepsilon_{prj-\lambda} + \Delta_{pp} \eta_x(\lambda, x)), \\ v(x, a) &= v(x, 0) + a (\varepsilon_{prj-\lambda} + \Delta_{pp} \eta_x(\lambda, x)); \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 + \tilde{u}(0) + \lambda \varepsilon_{ppi} b \eta_x(\lambda, x), \quad u(x, a) = u(x, 0) + \tilde{u}(a) - \tilde{u}(0) + \\ & + \lambda \theta \Delta_{pp} b \eta_x(\lambda, x); \quad \varphi_z(z) = \theta \eta_z(\theta, z) - \theta'; \\ v(0, z) &= v_{j-1} + a \varepsilon_{prj} \varphi_z(z), \quad v(b, z) = v(b, 0) + a \varepsilon_{prj+1} \varphi_z(z). \end{aligned} \quad (62)$$

В формулах (59) – (62) использованы зависимости

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}(0) &= \theta' a (t_x + f_x), \quad \tilde{u}(a) = \theta'' a (t_x - f_x), \quad t_x = \mathbf{e}_x + \beta_x t_0 \varepsilon_{xx}, \quad f_x = \lambda \Delta_{pp} / 2 \rho; \\ \frac{d}{dx} \eta_x(\lambda, x) &= \frac{\lambda}{b}; \quad \int dx = \lambda b \eta_x(\lambda, x), \quad \int \eta_x(\lambda, x) dx = \lambda \eta_x^2(\lambda, x) b / 2\}; \dots. \end{aligned} \quad (63)$$

Перемещения (62) равны перемещениям ребер. Перемещения (61) равны перемещениям ребер только в узловых точках. Предположим, что ребра перемещаются как абсолютно твердые тела, но при этом деформируются вдоль своих осей. Тогда перемещения $u(0, z)$, $u(b, z)$, $v(x, 0)$ и

$V(x, a)$ ребер являются линейными функциями координат. Эти функции проходят через узловые точки и имеют уравнения

$$\begin{aligned} v_{пп}(x, 0) &= v_{j-1} + (\lambda \eta_x(\lambda, x) - \lambda') w, & v_{пп}(x, a) &= v_{пп}(x, 0) + a \varepsilon_{пр j-\lambda'} + \\ &+ a \Delta_{пр} \eta_x(\lambda, x), & u_{пр}(0, z) &= \theta'' u_{j-1} - \theta' u'_{j-1} + \theta (u'_{j-1} - u_{j-1}) \eta_z(\theta, z), \\ u_{пр}(b, z) &= u_{пр}(0, z) + b \varepsilon_{пп i} + \theta' b \Delta_{пп} + b \Delta_{пп} \eta_z(\theta, z). \end{aligned} \quad (64)$$

Введем функции, равные разностям перемещений (64) и (61):

$$\begin{aligned} u_*(c, z) &= u_{пр}(c, z) - u_{(61)}(c, z) & c &= (0, b), \\ v_*(x, c) &= v_{пп}(x, c) - v_{(61)}(x, c) & c &= (0, a), \end{aligned} \quad (65)$$

которые равны перемещениям ребер ji -й клетки.

Введем дополнительные слагаемые в корректирующем решении. В принципе нужно решить плоскую задачу для пластины при заданных на ее контуре перемещениях (65). Однако это решение довольно громоздко. Здесь используем приближенный прием. Дополнительные слагаемые для перемещений в клетке обшивки задаем в виде

$$\begin{aligned} u_*(x, z) &= u_*(0, z)(b-x)/b + u_*(b, z)x/b, \\ v_*(x, z) &= v_*(x, 0)(a-z)/a + v_*(x, a)z/a. \end{aligned} \quad (66)$$

Используя уравнения Коши, из уравнений (66) имеем деформации

$$\begin{aligned} \gamma_{*xz} &= (\psi_x L_{x1}(x) + \psi_z L_{z1}(z))/2 + E_x - E_z, & \varepsilon_{*x} &= 0, & \varepsilon_{*z} &= 0, \\ \psi_x &= \theta \lambda \Delta_{пп} \rho - \beta_z \Delta_{пр} t_0, & \psi_z &= \theta \lambda \Delta_{пр} / \rho - \beta_x \Delta_{пп} t_0. \end{aligned} \quad (67)$$

Из уравнений физического закона (3) получим напряжения

$$\tau_{*xz} = G_r \partial_p \gamma_{*xz}, \quad \sigma_{*x} = 0, \quad \sigma_{*z} = 0, \quad (68)$$

которые выражены через модуль сдвига при диагональном растяжении и не удовлетворяют уравнениям равновесия. В качестве дополнительных слагаемых для напряжений принимаем первую формулу из (68) и

$$\sigma_{*x} = -\theta \lambda \psi_z G_r \partial_p \eta_x(\lambda, x) \rho, \quad \sigma_{*z} = -\theta \lambda \psi_x G_r \partial_p \eta_z(\theta, z) / \rho. \quad (69)$$

Указанные слагаемые удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия, но при этом не выполняются уравнения физического закона для дополнительных слагаемых корректирующего решения.

Суммарные деформации в обшивке ji -й клетки можно найти по формулам (53) – (57) и (67). Для напряжений используем также формулы (13), (20), (21), (39), (52), (68), (69). В результате имеем выражения

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_x &= [(T t_{пп} - e_{пп} + B_x b_{пп}) \eta_z(\theta, z) - (T \tilde{h}_{пп} - \tilde{d}_{пп} + B_x \tilde{b}_{пп})] / E_r\}, \dots; \\ \gamma_{xz} &= (\tau - T) / G_r + \{(\theta \lambda \rho \Delta_{пп} - \beta_z t_0 \Delta_{пр}) L_{x1}(x) / 2 + \beta_z t_0 \Delta_{пр} \eta_x(\lambda, x) - \\ &- 2\beta_x E_x\} + \dots, \quad \tau_{xz} = \tau + \tau_{кр} \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{*xz}, \quad \tau_{*xz} = G_r \partial_p \gamma_{*xz}; \\ \{\sigma_x &= T \tilde{t}_{пп} - \tilde{e}_{пп} - B_x \tilde{b}_{пп} + B_x v_x L_{z1}(z) - \zeta (T t_{пр} - e_{пр} + B_x b_{пр}) \eta_x(\lambda, x) + \\ &+ (T t_{пп} - e_{пп} + B_x b_{пп}) (\eta_z(\theta, z) + \alpha_x \zeta \eta_x(\lambda, x))\}, \dots; \end{aligned}$$

$$\{\alpha_x = \beta_x \theta \lambda t_{0\rho}\}, \dots; \quad \zeta = G_{r\partial\rho} / E_r. \quad (70)$$

Из формул (51) – (53) следуют выражения

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{ппк} = -(Th_{xk} + B_x b_{xk} - d_{xk}) / E_r; \quad v_{ппк} = h_{ппк} / (1 + h_{ппi-\theta'}), \\ h_{xk} = tg\alpha v_{ппк}, \quad d_{xk} = (\tau_{кр} \cos^2\alpha + \partial_{ппi-\theta'}) v_{ппк} - \partial_{ппк}, \\ b_{xk} = g_{ппк} - g_{ппi-\theta'} v_{ппк} \quad (k=i, i+1)\}; \dots \end{aligned} \quad (71)$$

для деформаций в ребрах. Но тогда, учитывая формулы (44) и уравнения физического закона, для усилий в ребрах получим формулы

$$\{N_{xk} = -(Th_{xk} + B_x b_{xk} - d_{xk}) f_{ппк} \quad (k=i, i+1)\}, \dots. \quad (72)$$

Ребра нагружаются со стороны обшивки ji -й клетки также касательными напряжениями τ_{*xz} , которые приводятся к погонным усилиям

$$\{q_{*ппi+k} = (-1)^k G_{r\partial\rho} \delta [\psi_x L_{x1}(x) - \theta \psi_z - 2(E_x - E_z)] / 2 \quad (k=0,1)\}, \dots \quad (73)$$

с положительными направлениями вдоль осей координат.

Запишем уравнения осевых сил в ребрах от воздействия усилий (73), считая ребра консольными стержнями с защемлениями в точках, в которых функции $\eta_x(\lambda, x)$ и $\eta_z(\theta, z)$ равны единице. Получим

$$\begin{aligned} \{N_{*ппi+k} = (-1)^k \lambda \zeta [\psi_x (\eta_x(\lambda, x) - 1) - \theta \psi_z (\eta_x(\lambda, x) + \lambda') - \\ - 2(E_x - E_z) \eta_x(\lambda, x)] b \delta E_r / 2 \quad (k=0,1)\}, \dots \end{aligned} \quad (74)$$

4. Использование вариационного метода для определения неизвестных параметров

Напряжения и деформации в приведенных формулах выражены через неизвестные параметры T , B_x и B_z . При этом выполняются уравнения равновесия, сплошности, уравнения физического закона для ребер и условия стыковки обшивки с ребрами. Для обшивки матричное уравнение физического закона (3) не выполняется. В частности, не учитывается влияние стеснения деформаций на контуре пластины. Для определения неизвестных параметров используем принцип стационарности функционала физических соотношений [4].

Функционал рассматриваем для случая, когда напряжения (компоненты вектора σ_r), площади поперечных сечений ребер $f_{ппк}$ и $f_{прп}$, а также площади поперечных сечений клеток обшивки являются редуцированными (помечены далее индексом r). Деформации и равнодействующие напряжений (элементы вектора ε и вектора погонных усилий \mathbf{N}) в редуцированных сечениях совпадают с деформациями и усилиями в исходных сечениях. В плоской задаче для системы, состоящей из ji -й клетки обшивки и ограничивающих ее ребер и нагруженной касательным напряжением τ и воздействиями, приходящими на ji -ю клетку от сосед-

них клеток, используем видоизмененный функционал физических соотношений [4]. Этот функционал имеет вид

$$\tilde{\Pi}_6(\sigma_r, \varepsilon, \mathbf{u}) = -0,5 \int_{V_r} (\sigma_r^T \mathbf{A}_r d\mathbf{V}_r \sigma_r) + \int_{V_r} (\varepsilon^T d\mathbf{V}_r \sigma_r) - \int_{S_{1r}} \mathbf{u} \mathbf{g}_s dS. \quad (75)$$

Здесь \mathbf{V}_r и S_{1r} – редуцированные величины: объем системы и часть граничной поверхности, на которой задан вектор поверхностных сил \mathbf{g}_s ; $\mathbf{u} = \{u \ v\}$ – вектор-строка перемещений на контуре клетки обшивки; компоненты векторов \mathbf{g}_s и \mathbf{u} направлены вдоль осей координат.

Запишем отдельно слагаемые правой части функционала (75) с учетом зависимостей и обозначений, введенных в формулах (3) – (12). Первое и второе слагаемые имеют вид интегралов по площади S обшивки:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -(\delta/(2E_r)) \int_S [\sigma_{xr}^2 \theta_{11} + 2\sigma_{xr} \sigma_{zr} \theta_{12} + \sigma_{zr}^2 \theta_{22} + \tau_{xz}^2 \theta_{33}] dx dz, \\ \Pi_2 &= \delta \int_S [(\sigma_{xr} \phi_{11} + \sigma_{zr} \phi_{12}) \varepsilon_x + (\sigma_{xr} \phi_{12} + \sigma_{zr} \phi_{22}) \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} \phi_{33}] dx dz. \end{aligned} \quad (76)$$

Следует помнить, что в уравнениях (13), (17) – (21), (30) – (33), (39), (42), (44), (49) – (54), (68) – (72) индекс r при напряжениях опущен.

Для ребер первые два слагаемых функционала (75) принимают вид

$$\Pi_{12} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{i+1} \int_0^b ((N_{xk} + N_{*ппk})^2 / f_{ппk}) dx / E_r \right\} + \dots \quad (77)$$

Считаем, что каждое ребро является балкой, опертой концами на другие ребра. Согласно формулам (61) – (65) ось балки при деформировании панели остается прямолинейной. Поперечная нагрузка на каждое ребро (нормальные напряжения, приходящие на ребра ji -й клетки от соседней клетки), а также продольная нагрузка от напряжений (68), вместе с реакциями от этих нагрузок образуют самоуравновешенные системы сил, которые не совершают работу на перемещениях (64). Поэтому при работе с третьим слагаемым функционала (75) исключаем величины, содержащие компоненты указанных систем нагрузок. Для упрощения расчетов полагаем также, что в формулах (59) – (64) для перемещений и в формулах (53), (54), (70), (71) для деформаций равны нулю величины u_{j-1} , u'_{j-1} , v_{j-1} и $\{e_{пп}, \tilde{d}_{пп}, d_{xk}\}, \dots$, частные производные по T , B_x и B_z от которых равны нулю. С учетом сказанного третье слагаемое правой части функционала (75) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= -p_{x3} u(b, 0) - p_{x4} u(b, a) + p_{z2} v(b, 0) - p_{z4} v(0, a) - p_{z3} v(b, a) + \\ &+ \left\{ \int_0^b (\tau_{i-1} \phi_{33, i-1} u(x, 0) - \tau_{i+1} u(x, a) \phi_{33, i+1}) \delta dx \right\} + \dots; \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \{p_{xk} = N_{x, j, i+k-3, j, i+2k-7} + N_{мспп j+1, i+k-3}(0) \quad (k=3, 4)\}, \dots, \\ p_{z2} = N_{z, j+1, i, j+1, i} + N_{мс пр j+1, i-1}(a_{j+1, i-1}). \end{aligned} \quad (79)$$

Силы, приведенные в формулах (79), действуют в точках, которые расположены на концах ребер. Эти точки лежат на контуре клетки ji . Слагаемые формул (78) и (79), полученные в результате замены (43), можно записать в привычном виде, если поменять местами компоненты пар индексов, например $N_{пп ji, j, i-1} \rightarrow N_{пр ij, i, j-1} \rightarrow N_{пр ji, j-1, i}$.

Пусть на наружном контуре панели крыла обшивка отсутствует, но в торец ребра ji -й клетки, например поперечного ребра $j+1, i$, приложена сила P (нагрузка от узла навески элерона). В этом случае поступаем таким образом. Вводим добавочную фиктивную клетку с номером $j+2, i$. Силу $N_{мс пп, j+2, i}$ в формулах (79) принимаем равной P , а остальные воздействия полагаем равными нулю.

Вычисляя частные производные по T , B_x и B_z от слагаемых (76) – (78) функционала (75), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ B_x \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}. \quad (80)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} & \{\alpha_x = \beta_x \theta \lambda t_0 b/a; r_{x0} = 1, r_{x3} = 1/2, r_{x4} = 1/2; t_{x0} = 0; t_{x3} = v_x/6, t_{x4} = 0; \\ & s_{x0} = 1/2, s_{x3} = 1/3, s_{x4} = 1/4; a_{xk} = \tilde{t}_{пп} r_{xk} + t_{пп} (s_{xk} + \zeta \alpha_x s_{zk}) - \zeta t_{пр} s_{zk}, \\ & \tilde{g}_{xk} = \zeta b_{пп} s_{xk}, g_{xk} = b_{пп} s_{xk} - \tilde{b}_{пп} r_{xk}, b_{1k} = g_{xk} + b_{пп} \zeta \alpha_x s_{zk} + t_{xk}, \\ & c_{1k} = \varphi_{11} (t_{пп} s_{xk} - \tilde{h}_{пп} r_{xk}) + \varphi_{12} (t_{пр} s_{zk} - \tilde{h}_{пр} r_{zk}), A_{xk} = \theta_{11} a_{xk} + \theta_{12} a_{zk}, \\ & d_{1k} = \varphi_{11} (e_{пп} s_{xk} - \tilde{d}_{пп} r_{xk}) + \varphi_{12} (e_{пр} s_{zk} - \tilde{d}_{пр} r_{zk}), \tilde{A}_{xk} = \varphi_{11} a_{xk} + \varphi_{12} a_{zk}, \\ & \theta_{xk} = \theta_{11} b_{1k} - \theta_{12} \tilde{g}_{xk}, \rho_{xk} = \theta_{12} b_{1k} - \theta_{22} \tilde{g}_{xk} \quad (k=0, 3, 4); \\ & ж_{пп} = (1/f_{ппi+1} + 1/f_{ппi}) \zeta \rho b \delta / 24, я_1 = (h_{x,i+1} - h_{xi}) / 4, я_3 = (b_{x,i+1} - b_{xi}) / 4, \\ & я_5 = (d_{x,i+1} - d_{xi}) / 4, h_1 = \tilde{h}_{пр} - \tilde{h}_{пп}, d_1 = \tilde{d}_{пр} - \tilde{d}_{пп}, z_x = t_0 (2\tilde{b}_{пп} - b_{пп} / 2), \\ & б_1 = (2t_0^2 + \rho^2 / 5 - \theta \alpha_x (1 + 2\lambda')) ж_{пп} \zeta, э_1 = (\alpha_x (4 + 6\lambda') - \theta \rho^2) ж_{пп} \lambda t_0 / \rho, \\ & б_3 = (-\theta (t_0^2 - 1) (1/2 + \lambda') + \alpha_x / 5 + 2\alpha_z) ж_{пп} \zeta, э_3 = (4 + 6\lambda' + \theta \alpha_x) ж_{пп} \lambda t_0 / \rho, \\ & б_5 = (t_0^2 / 5 + 2/\rho^2 - \theta \alpha_z (1 + 2\lambda')) ж_{пп} \zeta, ч_1 = (\alpha_x (3 + 6\lambda') - \theta \rho^2) \zeta / 3, \\ & \tilde{H}_5 = (d_{x,i+1} b_{x,i+1} f_{ппi+1} + d_{xi} b_{xi} f_{ппi}) / a \delta, ч_3 = (3 + 6\lambda' + \theta \alpha_x) \zeta / 3, \\ & H_1 = (h_{x,i+1}^2 f_{ппi+1} + h_{xi}^2 f_{ппi}) / a \delta, H_3 = (b_{x,i+1} h_{x,i+1} f_{ппi+1} + b_{xi} h_{xi} f_{ппi}) / a \delta, \\ & H_5 = (d_{x,i+1} h_{x,i+1} f_{ппi+1} + d_{xi} h_{xi} f_{ппi}) / a \delta, \tilde{H}_3 = (b_{x,i+1}^2 f_{ппi+1} + b_{xi}^2 f_{ппi}) / a \delta; \\ & c_x = [2\rho^2 \varphi_{33} - (\rho^2 + t_0^2) \zeta \theta_{33}] \zeta / 12; \dots; \tilde{\tau} = \tau + \tau_{кр} \sin 2\alpha / 2, \\ & \alpha_{33} = (\alpha_x + \alpha_z) (\varphi_{33} - \zeta \theta_{33}) \zeta / 12, v_{33} = (\varphi_{33} - \zeta \theta_{33}) \zeta / 6, h_0 = \zeta t_0 \varphi_{33} h_1, \end{aligned}$$

$$h_7 = \zeta t_0 \theta_{33} h_1, \quad d_0 = \zeta t_0 d_1, \quad z_0 = -E_r / G_r - 2 t_0 h_1 + t_0 (t_{np} - t_{пп}) / 2, \\ p_{xz} = (p_{z3} - p_{z2}) / a \delta, \quad \varphi_k = \tau_k \varphi_{33,k} / 2 \quad (k = i-1, i+1, j-1, j+1). \quad (81)$$

Тогда для коэффициентов системы (80) получим выражения

$$r_{11} = \{ \tilde{t}_{пп} (2c_{10} - A_{x0}) + t_{пп} (2c_{13} - A_{x3}) + \zeta (t_{пп} \alpha_x - t_{np}) (2c_{14} - A_{x4}) + \\ + t_{пп}^2 (c_x + \bar{b}_1 + \bar{b}_6) + t_{пп} t_{np} (v_{33} \alpha_x + 2\bar{b}_3) + (h_1 t_0)^2 \rho b \delta / 3 + 4 \varphi_1 h_1 \lambda t_0 \rho + \\ + 2 h_1 (t_{пп} e_1 - t_{np} e_3) + 2 \varphi_1 (t_{пп} \chi_1 - t_{np} \chi_3) + H_1 + \beta_z \zeta t_0 \tilde{h}_{пп} h_7 - 2 h_0 z_0 \} + \dots, \\ r_{12} = \tilde{b}_{пп} (A_{x0} - \tilde{A}_{x0} - c_{10}) + b_{пп} (\tilde{A}_{x3} + c_{13} - A_{x3}) + \zeta b_{пп} [\alpha_x (c_{14} - A_{x4}) + \\ + A_{z3} - c_{23}] + [t_{пп} (\varphi_{11} - \theta_{11}) - \zeta \theta_{12} (t_{np} \alpha_z - t_{пп})] v_x / 6 + b_{пп} t_{пп} (c_x + \bar{b}_1 + \\ + \bar{b}_6) + b_{пп} t_{np} (\alpha_{33} + \bar{b}_3 + \bar{b}_4) + \tilde{b}_{пп} t_0^2 (h_2 a \delta / \rho - h_1 b \delta \rho) / 3 - h_0 z_x + H_3 + \\ + \zeta t_0 \tilde{b}_{пп} (\beta_z z_0 \varphi_{33} + h_7) - \tilde{b}_{пп} t_{пп} (e_1 + e_4) + \tilde{b}_{пп} t_{np} (e_2 + e_3) + b_{пп} (h_1 e_1 - \\ - h_2 e_4 + \varphi_1 \chi_1 - \varphi_2 \chi_4) + 2 \tilde{b}_{пп} t_0 (\varphi_2 \theta / \rho - \varphi_1 \lambda \rho) + \varphi_3 (t_{пп} \chi_1 - t_{np} \chi_3 + 2 \lambda h_1 t_0 \rho), \\ r_{22} = b_{пп} b_{13} (2\varphi_{11} - \theta_{11} + 2\zeta \theta_{12}) - \tilde{b}_{пп} b_{10} (2\varphi_{11} - \theta_{11}) - \zeta b_{пп} [\alpha_x \theta_{11} b_{14} + \\ + 2\varphi_{12} g_{x3}] - v_x \theta_{11} (v_x / 3 + b_{пп} / 6) - \theta_{22} (\zeta b_{пп})^2 / 3 + b_{пп}^2 (c_x + \bar{b}_1 + \bar{b}_6) - \\ - (\alpha_x + \alpha_z) b_{пп} b_{np} \theta_{33} \zeta^2 / 12 + 2 \zeta t_0 \varphi_{33} z_x \tilde{b}_{пп} - (\zeta t_0 \tilde{b}_{пп})^2 \theta_{33} + \tilde{H}_3 - \\ - 2 b_{пп} \tilde{b}_{пп} (e_1 + e_4) + (\tilde{b}_{пп} t_0)^2 (a \delta / \rho + b \delta \rho) / 3 + \varphi_3 (2 b_{пп} \chi_1 - 4 \tilde{b}_{пп} \lambda t_0 \rho), \\ r_{23} = \tilde{b}_{np} b_{10} \theta_{12} - b_{np} \theta_{12} [b_{14} + \zeta \alpha_z g_{x3} + \zeta^2 b_{пп} (1 - t_0^2) / 4] + b_{пп} b_{np} \alpha_{33} + \\ + (\zeta t_0)^2 \tilde{b}_{пп} \tilde{b}_{np} \theta_{33} + \{ \varphi_{12} (b_{пп} b_{23} - \tilde{b}_{пп} b_{20}) - \varphi_{11} b_{np} g_{x0} \zeta / 2 + \\ + \zeta \theta_{12} \alpha_x b_{пп} v_z / 6 + b_{np} b_{14} \zeta \theta_{11} - \tilde{b}_{np} \tilde{b}_{пп} t_0^2 b \delta \rho / 3 - \beta_x \zeta t_0 \varphi_{33} \tilde{b}_{пп} z_z + \\ + b_{пп} b_{np} \bar{b}_3 + b_{пп} \tilde{b}_{np} (e_1 + e_4) + \varphi_3 (2 \tilde{b}_{np} \lambda t_0 \rho - b_{np} \chi_3) \} + \dots; \\ r_{13} = \{ r_{12} \} \rightarrow \dots, \quad r_{21} = r_{12}, \quad r_{31} = r_{13}, \quad r_{32} = r_{23}, \quad r_{33} = \{ r_{22} \} \rightarrow \dots; \quad (82) \\ r_1 = (\tau h_0 - p_{xz}) E_r / G_r - (\tilde{\tau} + d_0) (\varphi_{33} z_0 + h_7) + \{ \tilde{e}_{пп} (c_{10} - A_{x0}) + \tilde{t}_{пп} d_{10} + \\ + e_{пп} (c_{13} - A_{x3}) + \zeta (e_{пп} \alpha_x - e_{np}) (c_{14} - A_{x4}) + \zeta (t_{пп} \alpha_x - t_{np}) d_{14} + \\ + e_{пп} t_{пп} (c_x + \bar{b}_1 + \bar{b}_6) + e_{пп} t_{np} (\alpha_{33} + \bar{b}_3 + \bar{b}_4) + (2 \tilde{d}_{np} - e_{np} / 2) t_0 h_0 + \\ + d_1 h_1 t_0^2 \rho b \delta / 3 + t_{пп} d_{13} + d_1 (t_{пп} e_1 - t_{np} e_3) + h_1 (e_{пп} e_1 - e_{np} e_3) + H_5 + \\ + \varphi_1 (e_{пп} \chi_1 - e_{np} \chi_3 + 2 d_1 \lambda t_0 \rho) + \varphi_5 (t_{пп} \chi_1 - t_{np} \chi_3 + 2 h_1 \lambda t_0 \rho) - \\ - (p_{x3} h_{xi} + p_{x4} h_{x,i+1}) / a \delta - p_{xz} [\theta \rho t_{пп} + \beta_x t_0 (h_{x,i+1} + h_{xi})] / 2 \} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & (\tilde{e}_{\pi\pi}\varphi_{11} + \tilde{e}_{\pi\rho}\varphi_{12})g_{x0} + e_{\pi\pi}\varphi_{11}(g_{x3} + b_{13} + \zeta\alpha_x g_{x4}) - e_{\pi\rho}\varphi_{11}\zeta g_{x4} - \\
& - e_{\pi\pi}\varphi_{12}(\zeta g_{x3} + \tilde{g}_{x3}) + e_{\pi\rho}\varphi_{12}(g_{x4} + b_{14} + \zeta\alpha_z g_{x3}) - e_{\pi\rho}\varphi_{22}\tilde{g}_{x4} - \tilde{e}_{\pi\pi}\theta_{x0} + \\
& + \tilde{d}_{\pi\pi}(\varphi_{12}\tilde{g}_{x0} - \varphi_{11}b_{10}) + \tilde{d}_{\pi\rho}(\varphi_{22}\tilde{g}_{x0} - \varphi_{12}b_{10}) - (e_{\pi\pi}\alpha_x - e_{\pi\rho})\zeta\theta_{x4} - \\
& - \tilde{e}_{\pi\rho}\rho_{x0} + (e_{\pi\pi} - e_{\pi\rho}\alpha_z)\zeta\rho_{x3} - e_{\pi\rho}\rho_{x4} - e_{\pi\pi}\theta_{x3} + b_{\pi\pi}e_{\pi\pi}(c_x + b_1 + b_6) + \\
& + b_{\pi\rho}e_{\pi\rho}(\alpha_{33} + b_3 + b_4) + \zeta t_0 \tilde{b}_{\pi\pi}\varphi_{33}[t_0(e_{\pi\rho} - e_{\pi\pi}) - \tau E_r / G_r - 2d_0 / \zeta] + \\
& + (\tilde{\tau} + d_0)(\varphi_{33}z_x + \theta_{33}\zeta t_0 \tilde{b}_{\pi\pi}) + \tilde{b}_{\pi\pi}t_0^2(d_2 a \delta / \rho - d_1 b \delta \rho) / 3 + \tilde{H}_5 - \\
& - \tilde{b}_{\pi\pi}e_{\pi\pi}(e_1 + e_4) + \tilde{b}_{\pi\rho}e_{\pi\rho}(e_2 + e_3) + b_{\pi\pi}(d_1 e_1 - d_2 e_4 + \gamma_5 \chi_1 - \gamma_6 \chi_4) + \\
& + 2\tilde{b}_{\pi\pi}t_0(\gamma_6 \theta / \rho - \gamma_5 \lambda \rho) + \gamma_3(e_{\pi\pi}\chi_1 - e_{\pi\rho}\chi_3 + 2\lambda d_1 t_0 \rho) - \\
& - (\rho_{x4} b_{x,i+1} + \rho_{x3} b_{xi}) / a \delta - \rho_{xz}[\theta \rho b_{\pi\pi} + \beta_x t_0(b_{x,i+1} + b_{xi}) / 2], \\
R_1 = & r_1 + (\varphi_{i-1}h_{xi} - \varphi_{i+1}h_{x,i+1})\rho + (\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})h_{zj} / \rho - \\
& - \varphi_{i+1}[2E_r / G_r + 2\theta t_{\pi\pi}\rho - (h_{xi} + h_{x,i+1} - h_{zj} + h_{z,j+1})], \\
R_2 = & r_2 + (\varphi_{i-1}b_{xi} - \varphi_{i+1}b_{x,i+1})\rho + \varphi_{i+1}((b_{xi} + b_{x,i+1})t_0 - 2\theta b_{\pi\pi}\rho), \\
R_3 = & \{r_2\} \rightarrow \dots + (\varphi_{j-1} - \varphi_{j+1})b_{zj} / \rho - \varphi_{j+1}((b_{zj} + b_{z,j+1})t_0. \quad (83)
\end{aligned}$$

В формулах (79) – (83) фигурные скобки с многоточиями свидетельствуют о том, что в этих формулах следует произвести замены (43) для индексов, параметров, переменных и функций, а также замены

$$1 \leftrightarrow 2, \quad 3 \leftrightarrow 4, \quad 5 \leftrightarrow 6 \quad (84)$$

для нижних цифровых индексов. Не следует производить замены в таких случаях: для цифр 0, 1, 1/2, ..., которые не являются индексами; для индекса 33 и для цифровых индексов в выражениях целого типа $i-1, j+1, k-3, \dots$, которые ограничены запятыми или пробелами; символов a, b в переменных с индексами, например в $a_{xk}, b_{\pi\pi}$; в выражении для ρ_{xz} . Если после выражения в фигурных скобках имеется стрелка с многоточием, то в этом выражении следует выполнить замены (43), (84) и поместить новое образованное выражение на место старого.

Выводы

Рассмотрено закритическое поведение сжатой панели крыла после появления в обшивке диагональных волн растяжения. Касательное напряжение представлено в виде суммы: напряжение чистого сдвига плюс напряжение T , которое соответствует волнам растяжения и является основным неизвестным. Учитывается дополнительное сжатие обшивки от воздействия ребер, которому соответствуют напряжения B_x, B_z , а также влияние на клетку обшивки с ограничивающими ее ребрами соседних клеток. Учитывается также влияние напряженного состояния, полученного по теории тонкостенного стержня. Жесткости на сжатие ребер

могут быть различными. Неизвестные величины определяются с помощью принципа стационарности функционала физических соотношений.

Работа не закончена. Однако из приведенной ее части можно сделать такие выводы. При некоторых значениях площадей ребер и размеров обшивки клеток величина Q в формулах (48), находящаяся в знаменателях дробей, может оказаться равной нулю. Но тогда напряжения в обшивке будут равны ∞ . Для примера рассмотрим клетку, имеющую пояс лонжерона, в обшивке которой имеются волны растяжения и жесткость на сжатие пояса значительно больше жесткости на сжатие стрингера. Тогда при выполнении условия $a\delta = 6f_{cmp}$, где a – расстояние между нервюрами, δ – толщина обшивки, f_{cmp} – площадь сечения стрингера, напряжение на линии стыка обшивки с поясом равно ∞ . Такие линии можно назвать особыми. Аналогичные зависимости справедливы и на линиях стыка обшивки с мощными поясами силовых нервюр. Вероятность появления значительных напряжений возрастает в угловых точках сжатой панели крыла.

Если величина $\tau_{кр}$ в формулах (19) является общепринятым критическим напряжением (оси волн растяжения расположены в срединной плоскости пластины), то после расчета панели по приводимому алгоритму при различных τ для коэффициента диагонального растяжения можно построить графики $K_{др} = f(\tau/\tau_{кр})$ для каждой клетки обшивки. Эти графики аналогичны графику эмпирической зависимости (15), используемой при расчете балки с тонкой стенкой (стенка лонжерона). Точкам пересечения полученных графиков с осью абсцисс соответствуют истинные значения критических напряжений $\tau_{кр*} < \tau_{кр}$. Но тогда также и при малых τ из диапазона $\tau_{кр*} < \tau < \tau_{кр}$ оказывается справедливым все сказанное выше относительно особых линий и особых угловых точек. В таком случае оси волн растяжения не являются прямыми линиями.

Список использованных источников

1. Кун П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении / П. Кун. – М.: Оборонгиз, 1961. – 306 с.
2. Стригунов В.М. Расчет самолета на прочность / В.М. Стригунов: учебник для авиационных вузов. – М.: Машиностроение, 1984. – 376 с.
3. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами сплошных сред и строительной механики / А.П. Филин. Т.1. – М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. литры., 1975. – 832 с.
4. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем / Л.А. Розин. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.

Поступила в редакцию 05.05.2011.

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*