

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ПРУЖНОМУ УДАРІ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ МАСИ

Дослідження динамічного напруженого стану двошарового стрижня є актуальною задачею при конструюванні й проектуванні елементів конструкцій аерокосмічної техніки. Це пов'язано з тим, що дана модель може бути використана при розрахунку тришарових панелей, клейових з'єднань тощо. У ряді випадків аналітичні методики не можуть бути застосовані для розв'язання задач такого типу. Це зумовлено несамопряженістю оператора задачі або змінною по довжині товщиною деталей [1]. У таких випадках доцільно застосувати диференціально-різницевий метод (метод прямих), який з успіхом використовується при дослідженні напруженого стану стрижня при продовжному ударі [2, 3]. Але автор вважає більш доцільним застосування різницевих виразів підвищеної точності для обчислення похідних [4]. У попередній роботі [1] досліджувався напружений стан при миттєво доданому зусиллі. Але також є цікавим напружений стан з'єднання при ударному навантаженні, тому розв'язанню цієї задачі присвячено дану роботу.

**Постановка задачі.** Задача про пружний удар зосередженої маси (ударника)  $M$ , що рухається зі швидкістю  $V_0$ , складається з двох частин: а) удар тіла по одному з шарів і подальший сумісний рух тіла і деформація стрижня до моменту відділення ударника; б) коливання двошарового стрижня після відділення ударника.

Рівняння рівноваги диференційних елементів шарів [1] має вигляд

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} + \alpha_1 (U^{(2)} - U^{(1)}); \\ \gamma_2 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2} - \alpha_2 (U^{(2)} - U^{(1)}), \end{cases} \quad (1)$$

де  $U_i$  - переміщення  $i$ -го шару;  $\alpha_i = \frac{G}{\delta_c E_i \delta_i}$ ,  $\gamma_i = \frac{\rho_i}{E_i}$ ;  $E_i$  - модуль пружності  $i$ -го шару ( $i = 1, 2$ );  $G$  - модуль зсуву з'єднувального шару;  $\rho_i$  - щільність матеріалу  $i$ -го шару.

Граничні умови для першої частини задачі (удар) такі:

$$\frac{M}{H} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial t^2} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad U^{(2)} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

де  $H$  і  $L$  відповідно ширина й довжина з'єднання.

Умова (1) відображує другий закон Ньютона для ударника, а саме рівність сил інерції пружним силам з боку першого шару.

Початкові умови

$$U^{(i)} \Big|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \text{ при } x \neq 0, \text{ і } \left. \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} \right|_{t=0, x=0} = V_0 \quad (4)$$

Після удару ударник деякий час рухається вперед, зупиняється і починає рухатися назад під дією пружних сил стрижня. У момент  $t_0$  ударник відділяється від стрижня. При цьому в момент відриву і після нього маємо умову

$$\left. \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

а умови (3) залишаються незмінними. При цьому стан шарів у момент часу  $t_0$  задає початкові умови для другої частини задачі:

$$U_{II}^{(i)} \Big|_{t=0} = U_I^{(i)} \Big|_{t=t_0}, \quad \left. \frac{\partial U_{II}^{(i)}}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial U_I^{(i)}}{\partial t} \right|_{t=t_0}, \quad (6)$$

де нижній індекс  $I$  або  $II$  вказує на першу та другу частини задачі.

На рис. 2 показано схему з'єднання.

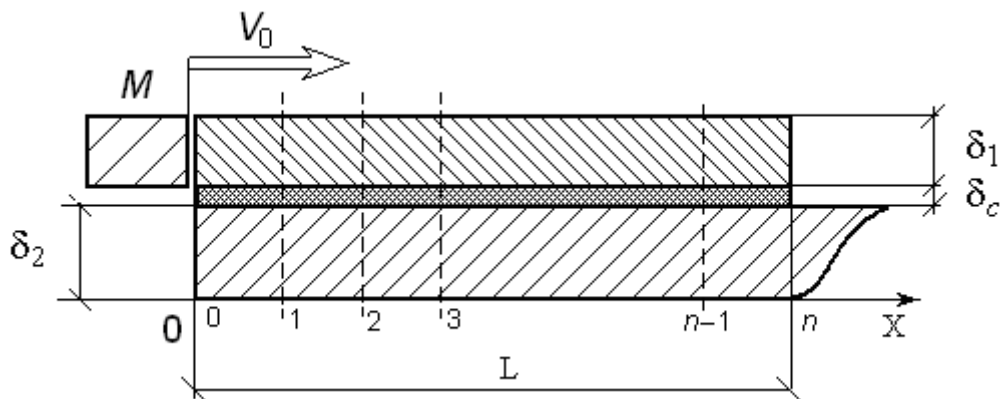


Рисунок 2 - Схема з'єднання

У роботі [1] було показано, що диференціальний оператор задачі за таких крайових умов не є самоспряженим і тому задача не може бути розв'язана класичними аналітичними методами.

**Побудова розв'язку.** Операцію диференціювання по  $X$  у системі (1) замінимо різницеvim виразом за п'ятиточковою схемою [1]. У матричній формі система (1) набуває вигляду:

$$\mathbf{\Gamma}_i \ddot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{X}_{i-2} + \mathbf{B}_i \mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{C}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{E}_i \mathbf{X}_{i+2}. \quad (7)$$

Нехай  $h = L/n$  - інтервал розбиття;  $n$  - кількість інтервалів; тоді для вузлів з номерами  $i = 2, 3, \dots, (n-2)$  маємо

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_i, \mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i,$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} -30 - 12h^2\alpha_1 & 12h^2\alpha_1 \\ 12h^2\alpha_2 & -30 - 12h^2\alpha_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

де  $u_i^{(j)}$  - переміщення  $j$ -го шару у вузлі з номером  $i$ .

Крайові умови (до відділення ударника) такі:

а) вільний від навантаження край  $\left( \frac{du_i^{(j)}}{dx} = 0 \right)$ , звідки випливає

$$u_{-1}^{(2)} = u_1^{(2)}, u_{-2}^{(2)} = u_2^{(2)}; \text{ і } u_{n-1}^{(1)} = u_{n+1}^{(1)}, u_{n-2}^{(1)} = u_{n+2}^{(1)}. \quad (8)$$

б) защеплений край другого шару в  $x = L$ ,  $(u_n^{(2)} = 0)$ , звідки випливає

$$u_{-1}^{(2)} = -u_1^{(2)} \text{ і } u_{-2}^{(2)} = -u_2^{(2)}. \quad (9)$$

в) до краю прикладене навантаження від ударника; для вузла  $i = 0$  можемо записати систему з першого рівняння (1) і (2) у різницеvій формі

$$\begin{cases} \gamma_1 \ddot{u}_0^{(1)} = \frac{1}{h^2} (u_{-1}^{(1)} - 2u_0^{(1)} + u_1^{(1)}) + \alpha_1 (u_0^{(2)} - u_0^{(1)}), \\ \frac{M}{H} \ddot{u}_0^{(1)} = \frac{E_1 \delta_1}{2h} (u_1^{(1)} - u_{-1}^{(1)}). \end{cases} \quad (10)$$

З системи (10) знаходимо

$$\left( \gamma_1 + \frac{2M}{E_1 \delta_1 H h} \right) \ddot{u}_0^{(1)} = - \left( \frac{2}{h^2} + \alpha_1 \right) u_0^{(1)} + \frac{2}{h^2} u_1^{(1)} + \alpha_1 u_0^{(2)}, \quad (11)$$

$$u_{-1}^{(1)} = a \cdot u_0^{(1)} + b \cdot u_1^{(1)} + c \cdot u_0^{(2)}, \quad (12)$$

$$a = \frac{2(\alpha_1 h^2 + 2)}{2 + E_1 \delta_1 \gamma_1 h H / M}, \quad b = \frac{E_1 \delta_1 \gamma_1 h H / M - 2}{2 + E_1 \delta_1 \gamma_1 h H / M}, \quad c = - \frac{2\alpha_1 h^2}{2 + E_1 \delta_1 \gamma_1 h H / M}.$$

Таким чином, записавши рівняння системи (7) для вузлів  $0 \dots n$  і

врахувавши крайові умови, а саме співвідношення (8), (9) і (12) і  $u_n^{(2)} = 0$ , отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь у формі

$$\Gamma \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_0^{(1)} \\ u_0^{(2)} \\ \dots \\ u_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \frac{2M}{E_1 \delta_1 H h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 12h^2 \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 12h^2 \gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 & \mathbf{E}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 & \mathbf{E}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{E}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{C}_{n-1} & \mathbf{D}_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 32 & -(30 + 12h^2 \alpha_1) \end{pmatrix},$$

де  $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \mathbf{D}_j, \mathbf{E}_j$  - матриці розмірністю  $2 \times 2$ , а нижній рядок – це перше рівняння системи (7), з урахуванням умови (9). Коефіцієнти вказаних матриць для вузлів з номерами 0, 1,  $n-1$  і  $n$  відрізняються від (7) унаслідок урахування крайових умов, але їх вид не наводимо за браком місця.

Систему (13) доцільно переписати у вигляді

$$\ddot{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}, \quad (14)$$

де  $\bar{A}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Gamma_{ij}}$ , ( $A_{ij}$  - відповідний елемент матриці  $\mathbf{A}$ ).

Загальний розв'язок однорідної системи (14) має вигляд

$$\mathbf{X}^{(1)} = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[ \mathbf{C}_i^{(1)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(1)} \cos \omega_i t + \mathbf{S}_i^{(1)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(1)} \sin \omega_i t \right], \quad (15)$$

де  $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ , а у свою чергу  $\lambda_i$  - власні числа матриці  $\bar{\mathbf{A}}$ ;  $\bar{\mathbf{h}}_i^{(1)}$  - відповідні власні вектори;  $\mathbf{C}_i^{(1)}$  і  $\mathbf{S}_i^{(1)}$  - невідомі коефіцієнти, які знаходимо із початкових умов (4). Верхній індекс 1 указує на приналежність до першої частини задачі. Задовольняючи (4), одержуємо

$$\mathbf{C}_i^{(1)} = 0, \text{ і } \sum_{i=1}^{2n+1} \mathbf{S}_i^{(1)} \omega_i \bar{\mathbf{h}}_i^{(1)} = (V_0 \ 0 \ \dots \ 0)^T.$$

Уведемо вектор  $\mathbf{Y} = \left( S_1^{(1)} \omega_1 i, S_1^{(2)} \omega_1, \dots, S_{2n+1}^{(1)} \omega_{2n+1} \right)^T$ , матрицю  $\mathbf{H}$  з власних векторів  $\vec{h}_i^{(1)}$  і вектор  $\mathbf{Q} = (V_0, 0, \dots, 0)^T$ . Звідси знаходимо

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}, \quad S_i^{(1)} = Y_i / \omega_i.$$

Відділення ударника від двошарового стрижня настає при умові (5), що враховуючи (2) еквівалентне умові  $\ddot{u}_0^{(1)} = 0$ . Зусилля, що діють на ударник, обчислюються за формулою

$$F(t) = -\frac{M}{H} \cdot \sum_{i=1}^{2n+1} S_i^{(1)} \omega_i^2 \cdot h_{1,i}^{(1)} \cdot \sin \omega_i t, \quad (16)$$

де  $h_{1,i}^{(1)}$  - перший елемент вектора  $\mathbf{h}_i^{(1)}$ .

Найменший відмінний від нуля розв'язок рівняння  $F(t) = 0$  указує на момент відриву ударника  $t_0$ . Переміщення і швидкості у вузлах формують вектори початкових умов для другої частини задачі:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}(t_0), \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{X}} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{2n+1} S_i^{(1)} \omega_i \vec{h}_i^{(1)} \cos \omega_i t_0.$$

Після відділення ударника крайова умова (2) змінюється на (5), а крайові умови (3) залишаються незмінними, початкові умови у вузлах задані векторами  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ . Другий етап задачі розв'язується аналогічним чином. Рівняння (5) записуємо з урахуванням зміни крайової умови для першого шару в нульовому вузлі. Через те, що змінюються субматриці в перших двох рядках матриці  $\bar{\mathbf{A}}$  системи (14), але структура системи залишається подібною до (14) і має вигляд  $\ddot{\mathbf{X}}^{(2)} = \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{X}^{(2)}$ . Розв'язок отриманої нової системи звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\mathbf{X}^{(2)} = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[ C_i^{(2)} \vec{h}_i^{(2)} \cos \theta_i t + S_i^{(2)} \vec{h}_i^{(2)} \sin \theta_i t \right], \quad (17)$$

де  $\vec{h}_i^{(2)}$  - власні вектори матриці нової системи  $\bar{\mathbf{A}}^{(2)}$ ;  $\theta_i$  - відповідні частоти коливань, які обчислюються як  $\theta_i = \sqrt{-\lambda_i}$ , де  $\lambda_i$  - власні числа матриці системи  $\bar{\mathbf{A}}^{(2)}$ ;  $\vec{h}_i^{(2)}$  - відповідні їм власні вектори.

Початкові умови для другої задачі такі

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{U}, \quad \dot{\mathbf{X}}^{(2)} = \mathbf{V}.$$

Звідси знаходимо невідомі коефіцієнти

$$\mathbf{C}^{(2)} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U}, \quad \mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{V}, \quad S_i^{(2)} = Y_i^{(2)} / \theta_i,$$

де  $\mathbf{N}$  - матриця, складена із власних векторів  $\vec{h}_i^{(2)}$  матриці  $\bar{\mathbf{A}}^{(2)}$ .

**Приклад розрахунку.** Розглянемо з'єднання деталі із КМ ( $\delta_1 = 2$  мм,  $E_1 = 240$  ГПа,  $\rho_1 = 2200$  кг·м<sup>3</sup>) з металічною ( $\delta_2 = 2,5$  мм,  $E_2 = 70$  ГПа,  $\rho_2 = 2650$  кг·м<sup>3</sup>,  $L = 0,15$  м). Товщина клею  $\delta_c = 0,3$  мм, модуль зсуву  $G = 0,77$  ГПа. У перший шар вдаряється зі швидкістю  $V = 1$  м/с тіло з лінійною щільністю  $M/H = 10$  кг/м. Зусилля, що діють на ударник, обчислюємо за (16) і покажемо на рис. 2.

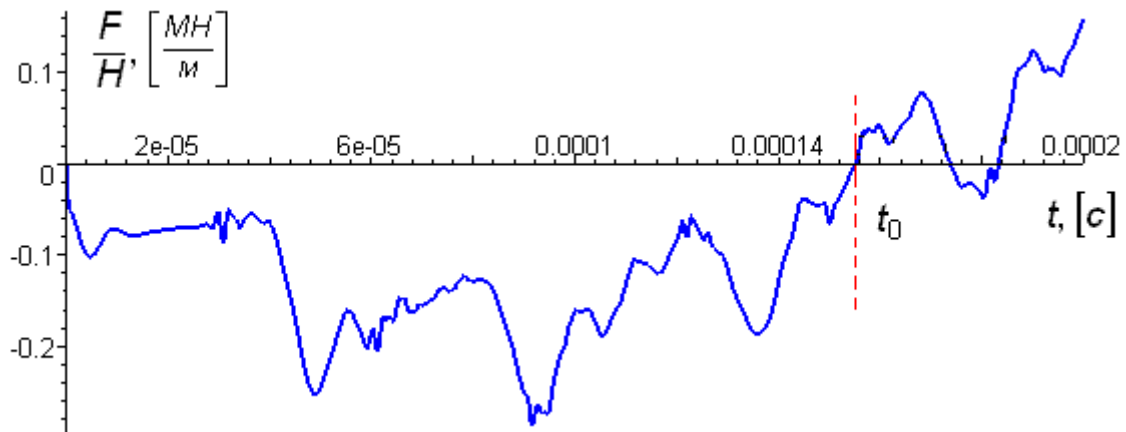


Рисунок 2 – Зусилля на ударнику

Момент відділення ударника  $t_0 \approx 0.000155$  с. Рівняння  $F(t) = 0$  (16) легко розв'язується числовими методами. Слід зауважити, що при збільшенні жорсткості двошарового стержня можливе відділення ударника з малою швидкістю і повторний удар стержнем, що здійснює коливання. Виникає явище багаторазового удару або «деренчання» [5]. Розгляду цього явища автор свідомо уникає, і щоб надмірно не ускладнювати задачу, вважає, що після відділення стержень не наздоганяє ударник.

Напруження в  $i$ -му вузлі клейового прошарку обчислюються як

$$\tau_i = \frac{G}{\delta_c} (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}),$$

де переміщення шарів до і після відділення ударника обчислюються за формулами (15) і (17). Напруження точки  $x = 0$  показано на рис. 3.

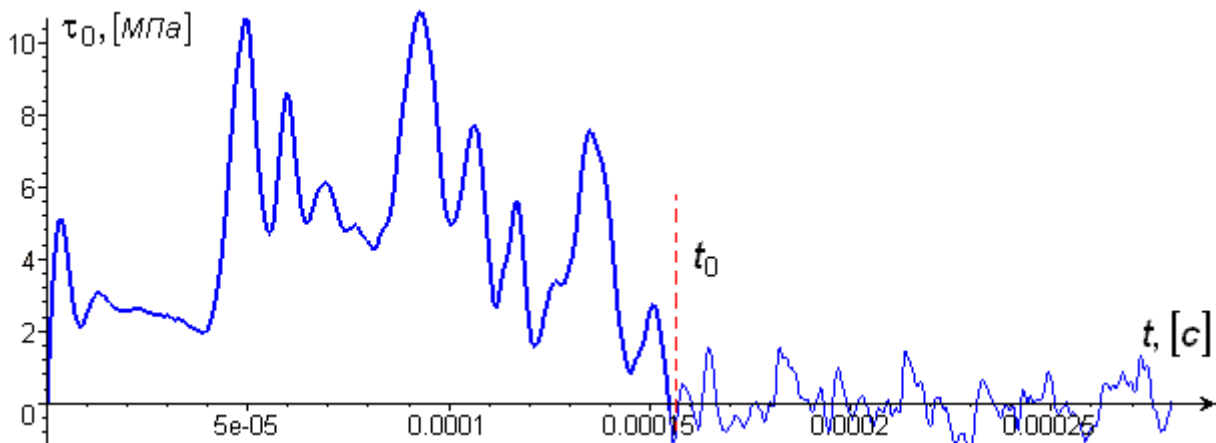


Рисунок 3 - Напруження в клею у місці удару

**Висновки.** Розрахунки показують, що удар по з'єднанню спричиняє значні напруження в клейовому прошарку, які лінійно залежать від швидкості удару та мають складну залежність від маси ударника. Останнє впливає з того, що маса ударника входить до коефіцієнтів матриці системи (14), що впливає на власні частоти коливань. Максимальні напруження виникають під час сумісного руху ударника і стрижня, а після відділення ударника напруження значно менше, ніж під час удару. Цей факт дозволяє зробити висновок, що для задач проектування достатньо розглядати лише першу частину задачі, а саме, дослідити напружений стан до відділення ударника.

Обчислення показують, що достатньо 30–40 вузлів, щоб отримати достатню для інженерних розрахунків точність.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на:

- врахування дисипації енергії;
- дослідження напруженого стану з'єднання зі змінною товщиною деталей та оптимізацію з'єднання;
- застосування більш точних скінченно-різницевих схем.

#### Список використаних джерел

1. Куреннов, С.С. Численный метод расчета динамических напряжений в клеевом соединении [Текст] / С.С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ» – Вып.4 (64). Х., 2010. – С. 133–139.
2. Манжосов, В.К. Модели продольного удара [Текст] / В.К. Манжосов – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
3. Листрова, К.С. Моделирование продольного удара упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы [Текст] / К.С. Листрова, В.К. Манжосов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 2. – С. 96–102.
4. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения [Текст] / Л. Коллатц. – М.: «Наука», 1968. – 503 с.
5. Манжосов, В.К. Моделирование режимов движения ударной системы при периодическом силовом воздействии [Текст] / В.К. Манжосов, Д.А. Новиков // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 4. – С. 51–57.

*Поступила в редакцию 06.09.2011.*

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*