

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРИНГЕРНЫХ ПАНЕЛЕЙ. СООБЩЕНИЕ 1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ РАСЧЕТНЫХ СЛУЧАЯХ

Гладкие и подкрепленные панели являются одними из основных силовых элементов тонкостенных конструкций летательных аппаратов. Ограничениями на параметры стрингерных панелей служат условия прочности и устойчивости обшивки и стрингеров, условия прочности соединения обшивки и ребер, а также конструктивно-технологические ограничения.

Рассмотрим обеспечение прочности стрингерной панели при нескольких расчетных случаях нагружения. Очевидно, что в этом случае размеры панели не играют никакой роли, поэтому проводится исследование несущей способности «в точке». Это позволяет предпринять маневр расчетной схемой и представить панель в виде двухслойной пластины, первый слой которой представляет собой обшивку с такими параметрами:  $\delta_1 = \delta$ ,  $\varphi = 0$ ,  $E_1 = E_x$ ,  $E_2 = E_y$ ,  $G_{12} = G_{xy}$ ,  $\mu_{12} = \mu_{xy}$ ,  $\mu_{21} = \mu_{yx}$ ,  $F_1 = F_x$ ,  $F_2 = F_y$ ,  $F_{12} = F_{xy}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_x$ ,  $\alpha_2 = \alpha_y$ , а вторым будет стрингерный слой, для которого  $E_1 = E_{стр}$ ,  $F_1 = F_{стр}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{стр}$ ,  $E_2 = \mu_{12} = \mu_{21} = G_{12} = F_2 = \alpha_2 = 0$ .

Для такого пакета его деформации с учетом температуры определяют по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xj} &= \frac{N_{xj}B_{22} - N_{yj}B_{12}}{(B_{11} + \delta_{стр}E_{стр})B_{22} - B_{12}^2} + \alpha_x^* \Delta T_j; \\ \varepsilon_{yj} &= \frac{N_{yj}(B_{11} + \delta_{стр}E_{стр}) - N_{xj}B_{12}}{(B_{11} + \delta_{стр}E_{стр})B_{22} - B_{12}^2} + \alpha_y^* \Delta T_j; \\ \gamma_{xyj} &= \frac{q_{xyj}}{B_{33}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В зависимостях (1) коэффициенты линейного температурного расширения условного пакета, состоящего из обшивки и стрингерного слоя, определяют так:

$$\begin{aligned} \alpha_x^* &= \frac{(A_{T1} + \delta_{стр}\alpha_{стр}E_{стр})B_{22} - A_{T2}B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{22}\delta_{стр}E_{стр}}; \\ \alpha_y^* &= \frac{A_{T2}(B_{11} + \delta_{стр}E_{стр}) - (A_{T1} + \delta_{стр}\alpha_{стр}E_{стр})B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{22}\delta_{стр}E_{стр}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты  $B_{ij}$  и  $A_{Ti}$  определяют по известным формулам, например [1].

Напряжения в обшивке находят по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{xj} &= \bar{E}_x [\varepsilon_{xj} + \mu_{yx} \varepsilon_{yj} - \Delta T_j (\alpha_x + \mu_{yx} \alpha_y)]; \\ \sigma_{yj} &= \bar{E}_y [\varepsilon_{yj} + \mu_{xy} \varepsilon_{xj} - \Delta T_j (\alpha_y + \mu_{xy} \alpha_x)]; \\ \tau_{xyj} &= G_{xy} \gamma_{xyj} = \frac{B_{33}}{\delta} \gamma_{xyj}.\end{aligned}\quad (3)$$

Подставим в зависимости (3) выражения для деформаций (1)

$$\begin{aligned}\sigma_{xj} &= \bar{E}_x \left[ \frac{N_{xj} - N_{yj} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{смп} E_{смп}} + \mu_{yx} \frac{N_{yj} \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} + \frac{\delta_{смп} E_{смп}}{\bar{E}_y \delta} \right) - N_{xj} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{смп} E_{смп}} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta T_j \left[ \alpha_x^* - \alpha_x + \mu_{yx} (\alpha_y^* - \alpha_y) \right] \right]; \\ \sigma_{yj} &= \bar{E}_y \left[ \frac{N_{yj} \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} + \frac{\delta_{смп} E_{смп}}{\bar{E}_y \delta} \right) - N_{xj} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{смп} E_{смп}} + \mu_{xy} \frac{N_{xj} - N_{yj} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{смп} E_{смп}} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta T_j \left[ \mu_{xy} (\alpha_x^* - \alpha_x) + \alpha_y^* - \alpha_y \right] \right]; \\ \tau_{xyj} &= \frac{q_{xyj}}{\delta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $\alpha_x, \alpha_y$  – коэффициенты линейного температурного расширения обшивки панели:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{A_{T1} B_{22} - A_{T2} B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2} = \frac{A_{T1} - A_{T2} \mu_{xy}}{E_x \delta}; \\ \alpha_y &= \frac{A_{T2} B_{11} - A_{T1} B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2} = \frac{A_{T2} - A_{T1} \mu_{yx}}{E_y \delta}.\end{aligned}\quad (5)$$

Найдем, чему равны выражения  $(\alpha_x^* - \alpha_x)$  и  $(\alpha_y^* - \alpha_y)$  и после простых математических преобразований получим

$$\alpha_x^* - \alpha_x = \frac{\delta_{cmp} E_{cmp}}{E_x \delta} \cdot \frac{E_x \delta \alpha_{cmp} - A_{T1} + A_{T2} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{cmp} E_{cmp}}; \quad (6)$$

$$\alpha_y^* - \alpha_y = \mu_{xy} \frac{\delta_{cmp} E_{cmp}}{E_x \delta} \cdot \frac{A_{T1} - A_{T2} \mu_{xy} - E_x \delta \alpha_{cmp}}{E_x \delta + \delta_{cmp} E_{cmp}} = -(\alpha_x^* - \alpha_x) \mu_{xy}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_x^* - \alpha_x + \mu_{yx}(\alpha_y^* - \alpha_y) &= \frac{\delta_{cmp} E_{cmp}}{E_x \delta} \cdot \frac{E_x \delta \alpha_{cmp} - A_{T1} + A_{T2} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{cmp} E_{cmp}} \times \\ &\times (1 - \mu_{xy} \mu_{yx}) = \frac{\delta_{cmp} E_{cmp}}{E_x \delta} \cdot \frac{E_x \delta \alpha_{cmp} - A_{T1} + A_{T2} \mu_{xy}}{E_x \delta + \delta_{cmp} E_{cmp}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu_{xy}(\alpha_x^* - \alpha_x) + (\alpha_y^* - \alpha_y) = 0.$$

Подставим выражения (7) в формулы для напряжений (4) и после соответствующих преобразований получим

$$\sigma_{xj} = \frac{N_{xj} E_x \delta + N_{yj} E_{cmp} \delta_{cmp} \mu_{xy} + \Delta T_j E_{cmp} \delta_{cmp} \delta (E_x \alpha_{cmp} - A_{T1}^* + A_{T2}^* \mu_{xy})}{\delta (E_x \delta + E_{cmp} \delta_{cmp})}; \quad (8)$$

$$\sigma_{yj} = \frac{N_{yj}}{\delta}; \quad \tau_{xyj} = \frac{q_{xyj}}{\delta}.$$

Для стрингерного слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{cmpj} &= E_{cmp} (\varepsilon_{xj} - \Delta T_j \alpha_{cmp}) = \\ &= E_{cmp} \left[ \frac{N_{xj} - N_{yj} \mu_{xy}}{E_x \delta + E_{cmp} \delta_{cmp}} + \Delta T_j (\alpha_x^* - \alpha_{cmp}) \right] = \\ &= E_{cmp} \frac{N_{xj} - N_{yj} \mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{cmp})}{E_x \delta + E_{cmp} \delta_{cmp}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$A_{T1}^* = A_{T1} + \delta_{cmp} \alpha_{cmp} E_{cmp}; \quad A_{T2}^* = A_{T2}. \quad (10)$$

Условия прочности имеют вид

$$\frac{\sigma_{xj}^2}{F_{xj}^2} - \frac{\sigma_{xj} \sigma_{yj}}{F_{xj} F_{yj}} + \frac{\sigma_{yj}^2}{F_{yj}^2} + \frac{\tau_{xyj}^2}{F_{xyj}^2} \leq 1; \quad (11)$$

$$\sigma_{cmpj} \leq F_j,$$

где  $\sigma_{xj}$ ,  $\sigma_{yj}$ ,  $\tau_{xyj}$  – напряжения в обшивке;

$\sigma_{стрj}$  – напряжения в «стрингерном слое»;

$\delta$  – толщина обшивки;

$\delta_{стр}$  – толщина «стрингерного слоя».

Рассмотрим задачу определения параметров «стрингерного слоя» при нескольких расчетных случаях нагружения панели. В рассмотрении вводится базовый расчетный случай и для него необходимо найти такое значение проектных напряжений  $F_{стр} = F_B$ , чтобы найденные параметры «стрингерного слоя» обеспечили выполнение условий прочности для всех расчетных случаев. В качестве базового расчетного случая может быть принят один из действующих или искусственно синтезированный.

На основе сказанного можно записать следующее исходное уравнение:

$$\frac{N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}{E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр}} = \frac{F_B}{E_{стр}}. \quad (12)$$

Параметр  $F_B$  из уравнения (12) должен обеспечить прочность «стрингерного слоя» во всех остальных расчетных случаях, т.е. должны выполняться условия

$$\frac{N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}{E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр}} \leq \frac{F_j}{E_{стр}}. \quad (13)$$

Выразив из уравнения (12) знаменатель и подставив его в условие (13), получим

$$F_B \frac{N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}{N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})} \leq F_j. \quad (14)$$

Отсюда

$$F_B \leq F_j \frac{N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}{N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}, \quad (15)$$

где  $j = 1, \dots, m$  – номер расчетного случая.

Или

$$F_B = \min_j \left[ F_j \frac{N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})}{N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{стр})} \right]. \quad (16)$$

Знаменатель зависимости (16) имеет знак в соответствии с которым назначается  $F_j$  – предел прочности на растяжение или сжатие. Знак влияет на решение неравенства (14).

Чтобы унифицировать запись (16), можно представить ее в виде

$$F_B = \min_j \left[ F_j \frac{N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{cmp})}{\text{abs} \left[ N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{cmp}) \right]} \right]. \quad (17)$$

Здесь  $F_j$  – предел прочности для каждого расчетного случая, т.е. предел прочности на растяжение или сжатие.

Выразим  $\delta_{cmp}$  из уравнения (12) с учетом выражения (17):

$$\frac{N_B}{E_x \delta + E_{cmp} \delta_{cmp}} = \frac{F_B}{E_{cmp}}, \quad (18)$$

где  $N_B = N_{xB} - N_{yB}\mu_{xy} + \Delta T_B \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{cmp})$ ;

$$\delta_{cmp} = \frac{N_B}{F_B} - \delta \frac{E_x}{E_{cmp}}; \quad (19)$$

$$\delta_{cmp} = \frac{1}{\min_j \left[ \frac{F_j}{N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy} + \Delta T_j \delta (A_{T1}^* - A_{T2}^* \mu_{xy} - E_x \alpha_{cmp})} \right]} - \delta \frac{E_x}{E_{cmp}}. \quad (20)$$

Преобразуем выражения для напряжений (8) с учетом формулы (18):

$$\begin{aligned} \sigma_{xj} = & \frac{E_x F_B}{N_B E_{cmp}} (N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy}) + \Delta T_j (E_x \alpha_{cmp} - A_{T1}^* + A_{T2}^* \mu_{xy}) - \\ & - \delta \Delta T_j \frac{E_x F_B}{N_B E_{cmp}} (E_x \alpha_{cmp} - A_{T1}^* + A_{T2}^* \mu_{xy}) + \frac{N_{yj}\mu_{xy}}{\delta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Представим зависимость (21) в виде

$$\sigma_{xj} = \xi_{1j} + \delta \xi_{2j} + \frac{1}{\delta} \xi_{3j}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{1j} &= \frac{E_x F_B}{N_B E_{cmp}} (N_{xj} - N_{yj}\mu_{xy}) + \Delta T_j (E_x \alpha_{cmp} - A_{T1}^* + A_{T2}^* \mu_{xy}); \\ \xi_{2j} &= \Delta T_j \frac{E_x F_B}{N_B E_{cmp}} (E_x \alpha_{cmp} - A_{T1}^* + A_{T2}^* \mu_{xy}); \\ \xi_{3j} &= N_{yj}\mu_{xy}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что

$$\sigma_{yj} = \frac{N_{yj}}{\delta}; \quad \tau_{xyj} = \frac{q_{xyj}}{\delta},$$

составим уравнение прочности обшивки

$$\frac{(\xi_{1j} + \delta\xi_{2j} + \frac{1}{\delta}\xi_{3j})^2}{F_{xj}^2} - \frac{N_{yj}(\xi_{1j} + \delta\xi_{2j} + \frac{1}{\delta}\xi_{3j})}{\delta F_{xj} F_{yj}} + \frac{N_{yj}^2}{\delta^2 F_{yj}^2} + \frac{q_{xyj}^2}{\delta^2 F_{xyj}^2} \leq K_{обш}, \quad (24)$$

где  $K_{обш} \leq 1$  – проектный коэффициент запаса прочности обшивки.

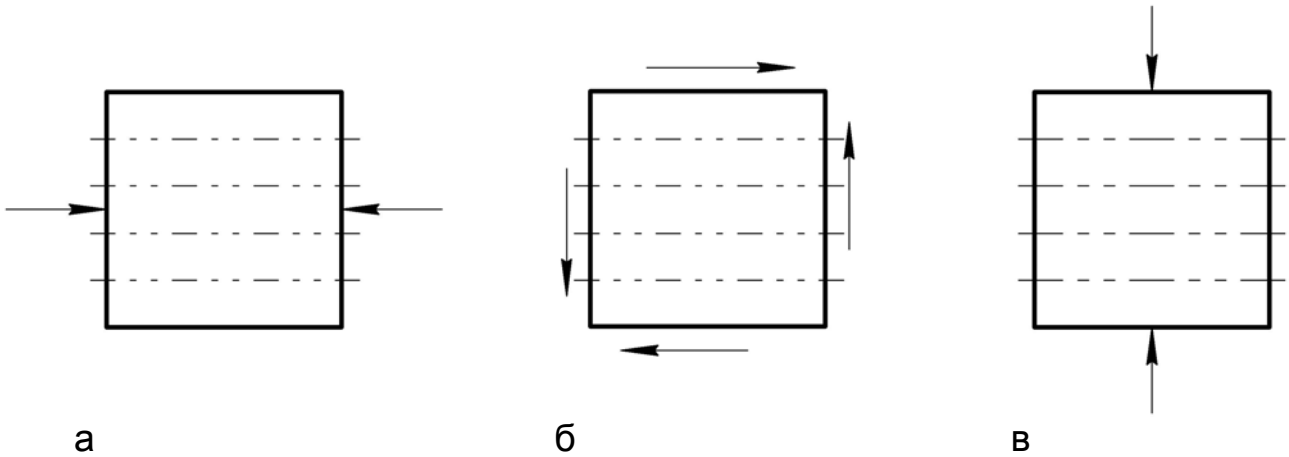
Из неравенства (24) нельзя аналитически определить толщину обшивки панели, тем более что  $F_B$  и  $N_B$  также зависят от толщины.

Для реализации численного алгоритма необходимо задаться базовым расчетным случаем, тогда вычислим  $F_B$  по формуле (17). Из условия прочности обшивки (24) определяем толщину обшивки и толщину «стрингерного слоя» по формуле (20).

В качестве примера рассмотрим проектирование стрингерной панели по прочности для трех расчетных случаев нагружения.

Назначим нагрузки для расчетных случаев:

1.  $N_{x1} = -500 \text{ Н / мм}$ ,  $N_{y1} = q_{xy1} = \Delta T_1 = 0$  (рисунок, а).
2.  $q_{xy2} = 200 \text{ Н / мм}$ ,  $N_{x2} = N_{y2} = \Delta T_2 = 0$  (рисунок, б).
3.  $N_{y3} = -500 \text{ Н / мм}$ ,  $N_{x3} = q_{xy3} = \Delta T_3 = 0$  (рисунок, в).



Варианты нагружения панели

Для каждого из расчетных случаев найдем напряжения в обшивке и «стрингерном слое»:

$$\sigma_{x1} = \frac{-N_{x1} E_x}{E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр}}; \quad \sigma_{y1} = 0; \quad \tau_{xy1} = 0;$$

$$\sigma_{стр1} = \frac{-N_{x1} E_{стр}}{E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр}};$$

$$\sigma_{x2} = 0; \quad \sigma_{y2} = 0; \quad \tau_{xy2} = \frac{q_{xy2}}{\delta}; \quad \sigma_{стр2} = 0;$$

$$\sigma_{x3} = \frac{-N_{y3} E_{стр} \delta_{стр} \mu_{xy}}{\delta(E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр})}; \quad \sigma_{y3} = \frac{-N_{y3}}{\delta}; \quad \tau_{xy3} = 0;$$

$$\sigma_{стр3} = \frac{N_{y3} E_{стр} \mu_{xy}}{E_x \delta + E_{стр} \delta_{стр}}.$$

Пусть базовым будет первый расчетный случай (см. рисунок, а):  $N_{xB} = 500 \text{ Н / мм}$ ,  $N_{yB} = q_{xyB} = \Delta T_B = 0$ . Тогда в соответствии с формулой (17) найдем проектные значения напряжений в стрингерах для базового расчетного случая

$$F_B = \min \left[ \frac{F_{стр1} \cdot N_{xB}}{\text{abs}(N_{x1})}; \frac{F_{стр2} \cdot N_{xB}}{0}; \frac{F_{стр3} \cdot N_{xB}}{\text{abs}(-N_{y3} \mu_{xy})} \right].$$

Задаем физико-механические характеристики материалов:  $\mu_{xy} = 0,35$ ;  $F_x = 900 \text{ МПа}$ ;  $F_y = 50 \text{ МПа}$ ;  $F_{xy} = 75 \text{ МПа}$ ;  $E_x = 100 \text{ ГПа}$ ;  $E_{стр} = 150 \text{ ГПа}$ ;  $F_{стр1} = F_{стр2} = F_{стр3} = 500 \text{ МПа}$ ;  $K_{обш} = 1$  и подставляем их в соответствующие выражения. Тогда

$$F_B = \min \left[ \frac{500 \cdot 500}{500}; \frac{500 \cdot 500}{0}; \frac{500 \cdot 500}{500 \cdot 0,35} \right] = 500 \text{ МПа}.$$

Находим  $\delta$  из условия прочности обшивки. Путем простых математических преобразований получим следующее выражение:

$$\delta = \frac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad (25)$$

где

$$a = \frac{N_y^2 \mu_{xy}^2}{F_x^2} - \frac{N_y^2 \mu_{xy}}{F_x F_y} + \frac{N_y^2}{F_y^2} + \frac{q_{xy}^2}{F_{xy}^2};$$

$$b = 2 \frac{E_x F_B (N_x - N_y \mu_{xy}) N_y \mu_{xy}}{E_{стр} N_{xB} F_x^2} - \frac{E_x F_B (N_x - N_y \mu_{xy}) N_y}{E_{стр} N_{xB} F_x F_y};$$

$$c = \frac{E_x^2 F_B^2 (N_x - N_y \mu_{xy})^2}{E_{стр}^2 N_{xB}^2 F_x^2} - K_{обш}.$$

Суммарная толщина определяется выражением

$$\delta_{\Sigma} = \delta + \delta_{стр} = \delta + \frac{N_{xB}}{F_B} - \delta \frac{E_x}{E_{стр}} = \frac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \left( 1 - \frac{E_x}{E_{стр}} \right) + \frac{N_{xB}}{F_B}. \quad (26)$$

Подставив численные значения в формулу для определения суммарной толщины, получим

$$\delta_{\Sigma} = 0 \left( 1 - \frac{100}{150} \right) + \frac{500}{500} = 1 \text{ мм.}$$

### Выводы

Рассмотрена методика проектирования стрингерной панели по условиям прочности при нескольких расчетных случаях нагружения. Для определения параметров вводится в рассмотрение базовый расчетный случай и для него ищется такое значение проектных напряжений, при котором найденные параметры «стрингерного слоя» обеспечивают выполнение условий прочности для всех расчетных случаев. На этапе проектирования подкрепленные ребрами панели рассматривают как условно однородные и слоистые, т.е. стрингеры «размазываются» по всей ширине панели. Таким образом, панель состоит из обшивки и «стрингерного слоя», что значительно упрощает процедуру расчета. Введение понятия проектных напряжений, величина которых меньше предела прочности или равна ему, позволяет записать условие прочности в виде равенства, что упрощает задачу проектирования. Представлена зависимость для определения толщины «стрингерного слоя». Составлено уравнение прочности обшивки. Предложен алгоритм проектирования стрингерной панели по прочности при нескольких расчетных случаях нагружения.

### Список использованных источников

1. Проектирование и конструктивно-технологические решения панелей из композиционных материалов [Текст]: учеб. пособие / Я.С. Карпов, П.М. Гагауз, Ф.М. Гагауз, Т.А. Литвинова. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. – 180 с.
2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Карпов, Я.С. Механика композиционных материалов [Текст]: учеб. пособие / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 122 с.

*Поступила в редакцию 07.07.2011.*

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*