УДК 539.3

А.Г. Николаев, д-р физ.-мат. наук,
Е.М. Орлов

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности с трансверсальной изотропией материала тела, необходимо при создании моделей пористых и композиционных материалов, а также в расчетах на прочность при конструировании изделий из этих материалов. В большинстве опубликованных работ по этой проблеме использован метод конечных элементов [1, 2]. Одним из основных аналитических методов решения краевых задач для трансверсально-изотропных канонических тел является метод разделения переменных, который применялся в работах [3–5]. В работе [5] была предпринята попытка методом Фурье построить точные решения уравнений равновесия термоупругого трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Однако ввиду того что построенная вектор-функция не является регулярной в рассматриваемой области, она не может считаться решением. Распределения напряжений в трансверсально-изотропном многосвязном каноническом теле без учета температурного поля исследовались в работе [6], в которой использовался обобщенный метод Фурье (ОМФ). В работе [7] с помощью обобщенного метода Фурье впервые построены общие точные решения основных осесимметричных краевых задач теории термоупругости для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Полученные результаты использованы при решении осесимметричной краевой задачи термоупругости для трансверсально-изотропного пространства с абсолютно твердым и равномерно нагретым сфероидальным включением.

В настоящей статье ОМФ применен к решению термоупругой краевых задач для трансверсально изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Рассмотрена задача для случая неподвижных границ с постоянными температурами. Проведен численный анализ распределения напряжений на поверхности и в экваториальной плоскости включения. Приведен качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую осесимметричную краевую задачу теормоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Предполагается, что трансверсально-изотропное полупространство, имеющее внутреннюю сфероидальную границу, занимает область Ω, с центром неоднородности совмещено начало декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3), а оси Ox_3, анизотропии и симметрии рассматриваемого тела совпадают. Исследуемая краевая задача в силу стационарности распадается на задачу теплопроводности (1, 2, 3) и задачу термоупругости (4, 5, 6), то есть задачу решения неоднородной системы уравнений равновесия в перемещениях трансверсально изотропной среды:

$$k_{ii} T_{,ii} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{1}$$

$$T_{|\Gamma_1} = \int_0^\infty B_3(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda; \tag{2}$$

$$T_{|\Gamma_2} = \sum_{n=1}^\infty b_n^{(3)} P_n(\cos\eta); \tag{3}$$

$$c_{ii} u_{i,ii} + \sum_{j\neq i} b_{ij} u_{i,ji} + \sum_{j\neq i} a_{ij} u_{i,jj} = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} \alpha_k T_{,i}, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3; \tag{4}$$

$$\mathbf{U}_{|\Gamma_1} = \int_0^\infty \left[B_1(\lambda) J_1(\lambda\rho)\mathbf{e}_\rho + B_0(\lambda) J_0(\lambda\rho)\mathbf{e}_z\right] d\lambda \tag{5}$$

$$\mathbf{U}_{|\Gamma_2} = \sum_{n=0}^\infty \left[b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos\eta)\mathbf{e}_\rho + b_n^{(0)} P_n(\cos\eta)\mathbf{e}_z\right] \tag{6}$$

в области Ω, где k_{ii} - коэффициенты теплопроводности $(k_{11} = k_{22})$; α_k - коэффициенты линейного теплового расширения; $b_n^{(j)}, B_j(\lambda)$ - заданные коэффициенты и функции; $c_{ij} = E_{iijj}$ при $i, j = 1, 2, 3$; $c_{44} = E_{1313} = E_{2323}$; $\dfrac{c_{11} - c_{12}}{2} = E_{1212}$; $a_{ij} = E_{ijij}$ и $b_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$ при $i \neq j$; E_{ijkl} – элементы тензора упругих постоянных; Γ_1, Γ_2 - граница полупространства и сфероида; ρ, z и $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\mathbf{z}$ - соответственно координаты и орты цилиндрической системы координат, совмещенной с декартовой; $P_n^m(x)$ - присоединенная функция Лежандра первого рода.

Уравнения $z = -h$ и $\left(\dfrac{\rho}{d_2}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{d_1}\right)^2 = 1$ задают границы полупространства и полости соответственно.

2. Построение общего решения. Вводятся три вытянутые сфероидальные (сжатые сфероидальные, сферические) системы координат (ξ_j, η_j, φ) $(j = 1, 2, 3)$, координаты которых связаны с цилиндрическими координатами такими соотношениями:

$$\begin{cases} \rho = c_j \cdot sh\xi_j \cdot sin\,\eta_j, & \eta_j \in [0; \pi]; \\ z = \sqrt{\nu_j} \cdot c_j \cdot ch\xi_j \cdot cos\,\eta_j, & \xi_j \in [0; \infty), \end{cases}$$

где $c_j > 0$ - параметры сфероидальных систем координат; $\nu_3 = \frac{k_{33}}{k_{11}}$; ν_1, ν_2 - два разных положительных корня уравнения:

$$c_{44}c_{11}\nu^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})\nu + c_{33}c_{44} = 0.$$

Уравнения поверхности сфероидальной полости запишутся в виде $\xi_j = \xi_{j0}$. На граничной поверхности должны выполняться такие соотношения:

$$c_1 \cdot sh\xi_{10} = c_2 \cdot sh\xi_{20} = c_3 \cdot sh\xi_{30};$$

$$\sqrt{\nu_1}c_1 \cdot ch\xi_{10} = \sqrt{\nu_2}c_2 \cdot ch\xi_{20} = \sqrt{\nu_3}c_3 \cdot ch\xi_{30}.$$

Тогда $cos\eta_j = \frac{z}{\sqrt{\nu_j}c_j \cdot ch\xi_{j0}}$ на поверхности сфероида не зависит от j.

Будем искать решение задачи теплопроводности в виде

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})} u_{3,n}^{+} + \int_0^{\infty} A_3(\lambda) e^{-\lambda\frac{z}{\sqrt{\nu_3}}} J_0(\lambda\rho) d\lambda,$$

а вектор перемещений – в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(j)}}{Q_n^{(1)}(q_{j,0})} \mathbf{U}_{j,n,0}^{+}(\xi_j, \eta_j) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{V}_{j,0}^{-}(\rho, z_j, \lambda) + \tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi + \tilde{\nabla}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\psi},$$

где $a_n^{(j)}, A_j(\lambda)$ – неизвестные коэффициенты и плотности; $z = \sqrt{\nu_j} z_j$;

$$\mathbf{V}_{j,0}^{\pm}(\rho, z_j, \lambda) = -\sum_{t=o}^{1} \left(\mp \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} \right)^{1-t} v_j^{\pm(t)} \mathbf{e}_{\rho_{2-t}}; \qquad v_j^{\pm(t)} = e^{\pm\lambda\frac{z}{\sqrt{\nu_j}}} J_t(\lambda\rho);$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\rho_1} = \mathbf{e}_{\rho} \\ \mathbf{e}_{\rho_2} = \mathbf{e}_{z} \end{cases}; \qquad k_j = \frac{b_{31}\nu_j}{(a_{33} - a_{31}\nu_j)}; \qquad \mathbf{U}_{j,n,0}^{\pm} = -\sum_{t=o}^{1} \left(\frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} \right)^{1-t} u_{j,n}^{\pm(t)} \mathbf{e}_{\rho_{2-t}};$$

$$u_{j,n}^{\pm(t)} = \begin{Bmatrix} Q_n^{-t}(q_j) \\ P_n^{-t}(q_j) \end{Bmatrix} P_n^t(p_j) = (-1)^t \begin{Bmatrix} Q_n^{t}(q_j) \\ P_n^{t}(q_j) \end{Bmatrix} P_n^{-t}(p_j); \qquad q_j = ch(\xi_j);$$

$p_j = cos(\eta_j)$; $Q_n^m(x)$ - присоединенная функция Лежандра второго рода; $\tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi+\tilde{\nabla}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Psi}$ – частное решение неоднородного уравнения равновесия. Для его построения введены такие дифференциальные операторы

$$\tilde{\nabla}_1 = k_1\mathbf{e}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+k_1\mathbf{e}_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathbf{e}_{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$\tilde{\nabla}_2 = \mathbf{e}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{e}_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}-\mathbf{e}_{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

а функции φ и ψ являются регулярным решением системы

$$\left[\Delta_2+\nu_1\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\psi=\gamma_1 T; \tag{5}$$

$$\left[\Delta_2+\nu_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\varphi=\gamma_2 T+\gamma_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}; \tag{6}$$

$$\gamma_1=\frac{\nu_1\beta_1-k_1\beta_3}{c_{44}(1+k_1)};\ \gamma_2=\frac{\beta_3 c_{44}(1+k_1)-c_{13}(\nu_1\beta_1-k_1\beta_3)}{\nu_1 c_{11}c_{44}(1+k_1)};$$

$$\gamma_3=\frac{c_{33}+\nu_1 c_{13}}{\nu_1 c_{11}};\ \beta_i=\sum_{k=1}^{3}c_{ik}\alpha_k .$$

Тогда частное неоднородное решение уравнения равновесия, примет вид

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi+\tilde{\nabla}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Psi}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{1}\sum_{s=1}^{2}\Bigg[K_{s,n}^{+(t)}\left\{-\left(\sqrt{\nu_3}\right)^t u_{3,n-1}^{+(t)}+\sqrt{\nu_s}\,u_{s,n-1}^{+(t)}+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{\nu_3}\right)^t u_{3,n+1}^{+(t)}\right\}+K_{s,n}^{-(t)}\left\{-\left(\sqrt{\nu_3}\right)^t\int_0^\infty\lambda^{-1}e^{-2\lambda\frac{h}{\sqrt{\nu_3}}}i_n(c_3\lambda)v_3^{-(t)}d\lambda+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sqrt{\nu_s}\right)^t\int_0^\infty\lambda^{-1}e^{-2\lambda\frac{h}{\sqrt{\nu_3}}}i_n(c_s\lambda)v_s^{-(t)}d\lambda\right\}\right]\mathbf{e}_{\rho_{2-t}},$$

где

$$K_{1,n}^{+(t)}=\left[(-1)^{1-t}+(k_1)^t\frac{\gamma_3}{\nu_2-\nu_1}\right]\frac{\gamma_1\sqrt{\nu_3}c_3}{(\nu_1-\nu_3)(2n+1)}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})};$$

$$K_{2,n}^{+(t)}=\left[\gamma_2-\frac{\gamma_1\gamma_3}{\nu_2-\nu_1}\right]\frac{(k_1)^t\sqrt{\nu_3}c_3}{(\nu_2-\nu_3)(2n+1)}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})};$$

$$K_{1,n}^{-(t)} = \left[(-1)^{1-t} + (k_1)^t \frac{\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\right] \frac{\gamma_1 \sqrt{\nu_3} c_3}{\nu_1 - \nu_3} \frac{(-1)^{n+1} a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})};$$

$$K_{2,n}^{-(t)} = \left[\gamma_2 - \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\right] \frac{(k_1)^t \sqrt{\nu_3} c_3}{\nu_2 - \nu_3} \frac{(-1)^{n+1} a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})};$$

$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x)$; $I_n(x)$- присоединенная функция Бесселя.

Используя такие теоремы сложения:

$$v_j^{-(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) i_n(\lambda c_j) u_{j,n}^{-(t)};$$

$$u_{j,n}^{+(t)} = (\pm 1)^{n+t} c_j \int_0^{\infty} v_j^{\mp(t)} i_n(\lambda c_j) d\lambda, \quad z_{j\,<-c_j}^{\;>c_j}, \quad \begin{cases} n \neq -1 \\ t \neq 0 \end{cases};$$

$$-u_{j,-1}^{+(0)}(\xi_j, \eta_j) + u_{s,-1}^{+(0)}(\xi_s, \eta_s) - \left[-u_{j,-1}^{+(0)}(\xi_{j0}, \eta_j) + u_{s,-1}^{+(0)}(\xi_{s0}, \eta_s)\right] =$$

$$= (\pm 1)^{-1} \int_0^{\infty} \left[-c_j v_j^{\mp(0)} i_{-1}(\lambda c_j) + c_s v_s^{\mp(0)} i_{-1}(\lambda c_s)\right] d\lambda, \quad \begin{cases} z_{j\,<-c_j}^{\;>c_j} \\ z_{s\,<-c_s}^{\;>c_s} \end{cases},$$

можно полностью представить решение либо в сфероидальных либо в цилиндрических координатах. Таким образом удовлетворяя граничным условиям и пользуясь ортогональностью и полнотой функций Лежандра, а также обратным преобразованием Ханкеля, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $a_n^{(j)}$, фредгольмовость оператора которой исследована в [8].

3. Задача о трансверсально-изотропном полупространстве с абсолютно твердым неподвижным равномерно нагретым сфероидальным включением. Будем считать сфероидальную неоднородность абсолютно твердым неподвижным включением, имеющим температуру T_0 и пусть температура на границе полупространства равна нулю. Тогда граничные условия для задач (1, 2, 3) и (4, 5, 6) будут соответственно такие:

$$T_{|\Gamma_1} = 0; \; T_{|\Gamma_2} = T_0;$$

$$\mathbf{U}_{|\Gamma_1} = 0; \; \mathbf{U}_{|\Gamma_2} = 0.$$

На рисунках 1, 2 показаны графики напряжений для постоянного соотношения полуосей вытянутого сфероида $\frac{d_1}{d_2} = 2$ и для переменного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида, а именно для таких соотношений $\frac{h}{d_1} = 1.1,\ 1.5,\ 2.25,\ 7.6$, графики пронумерованы в том же порядке. На рисунках 3, 4 приведены графики напряжений для постоянного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида $\frac{h}{d_1} = \frac{3}{2}$ и для переменного соотношения полуосей вытянутого сфероида, а именно для таких соотношений $\frac{d_1}{d_2} = 4,\ 2.5,\ 2,\ 1.5,\ 1.2$, графики пронумерованы в том же порядке.

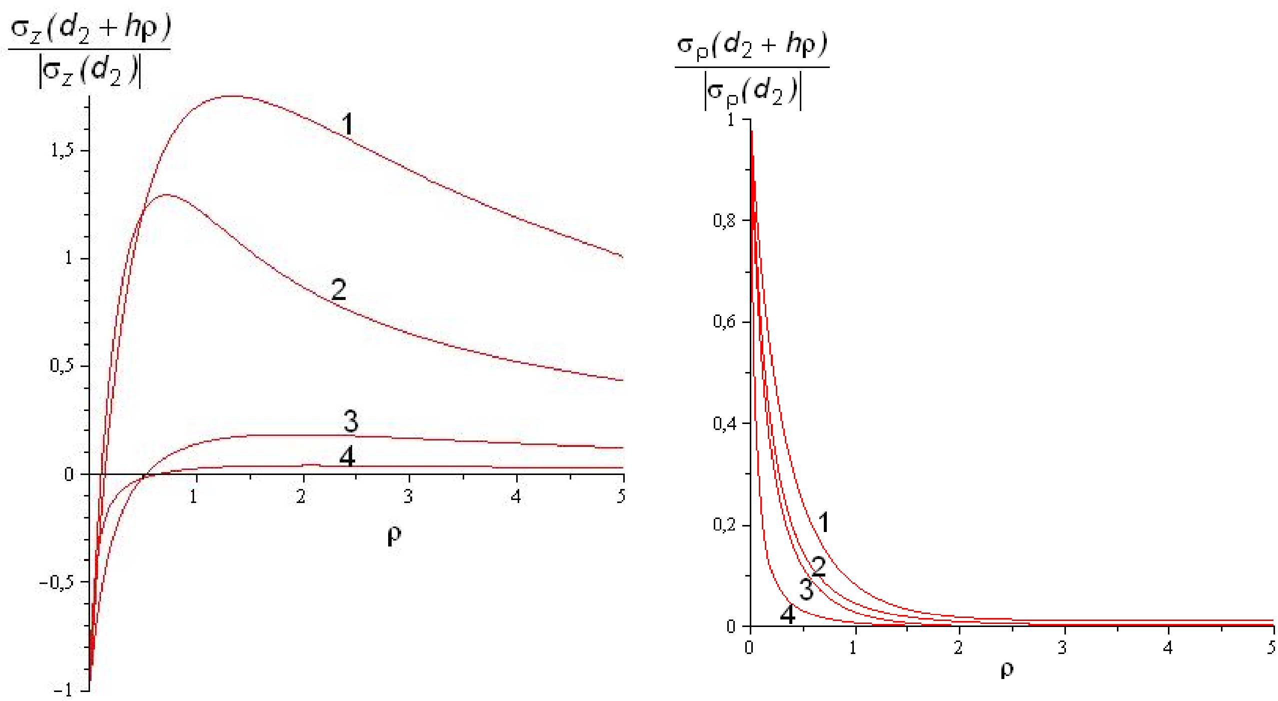

Рисунок 1 – Напряжения в экваториальной плоскости при фиксированных d_1, d_2 и переменном h

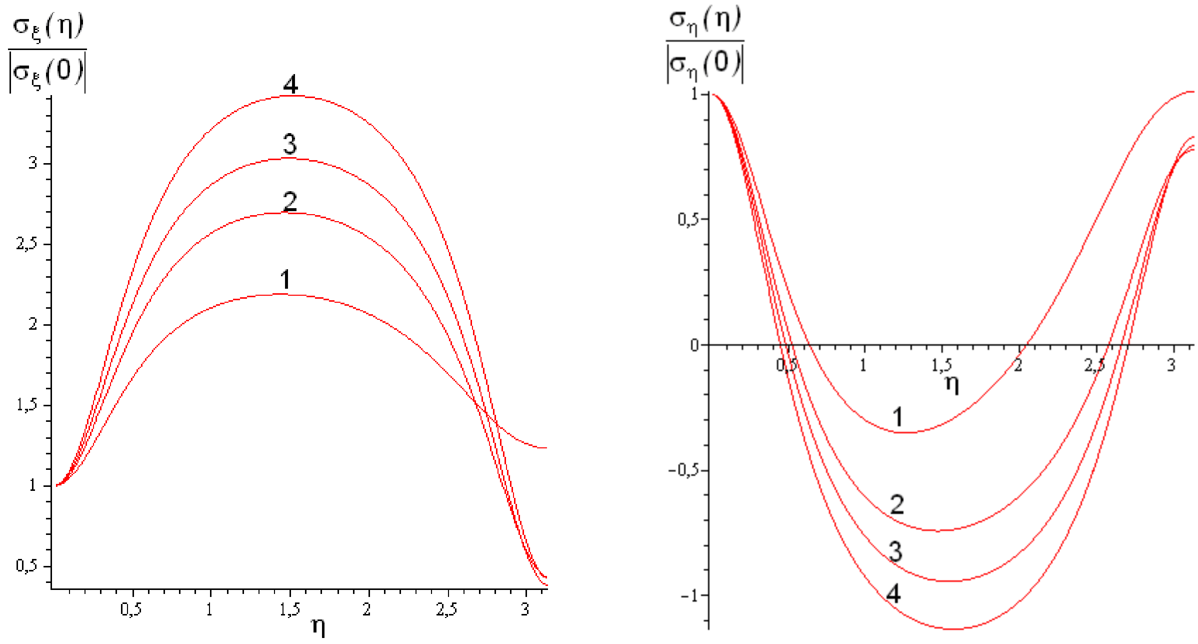

Рисунок 2 – Напряжения на поверхности включения при фиксированных d_1, d_2 и переменном h

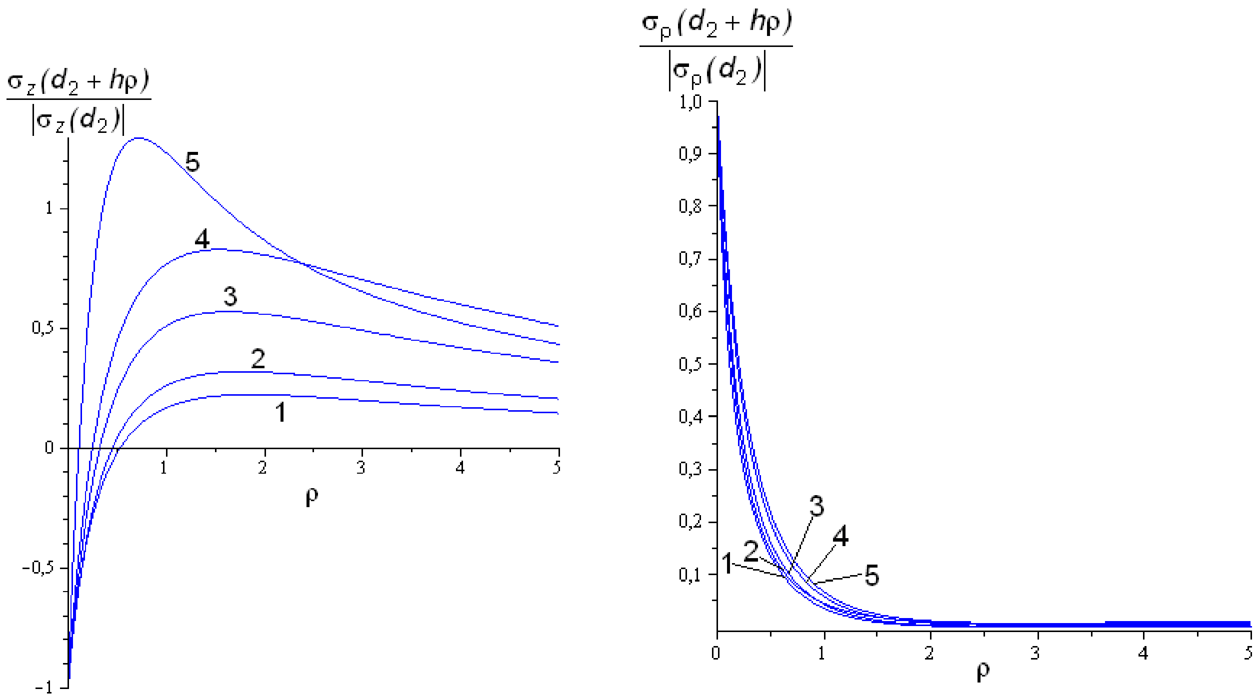

Рисунок 3 – Напряжения в экваториальной плоскости при фиксированных d_1, h и переменном d_2

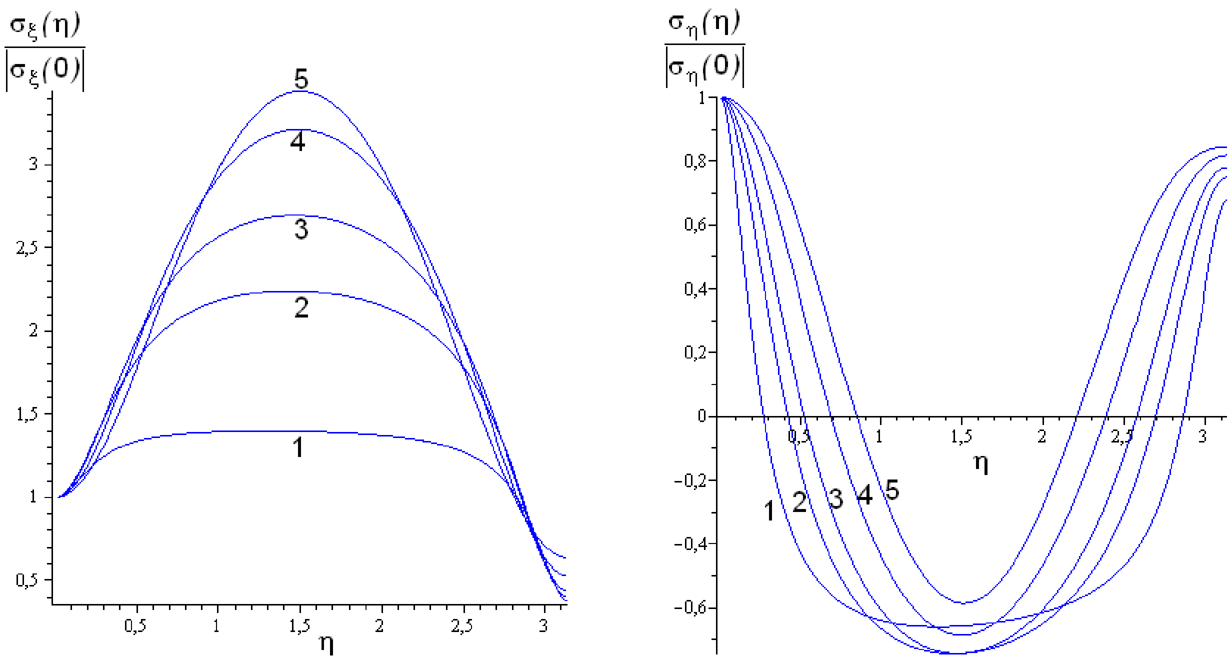

Рисунок 4 – Напряжения на поверхности включения при фиксированных d_1, h и переменном d_2

Список использованных источников

1. Haktan Karadeniz Z. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials [Текст]/ Z. Haktan Karadeniz and Dilek Kumlutas // Composite Structures. – V. 78, Issue 1. – 2007. – P. 1 – 10.
2. Nao-Aki Noda Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials [Текст] / Nao-Aki Noda, Yasushi Takase, Yasu-Aki Shukuwa // Composite Structures. – V. 79, Issue 2. – 2007. – P. 163 – 173
3. Ding, H.J. Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere [Текст] / H.J. Ding, H.M. Wang, W.W. Chen // Appl. Mech. – 2002. – 72, № 8. – P. 545 – 553.
4. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / Ю.Н. Подильчук // Граничные задачи статики упругого тела. – К.: Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.
5. Подильчук, Ю.Н. Темоупругая деформация трансверсально-изотропного витягнутого сфероïда [Текст] / Ю.Н. Подильчук // Прикладная. механика. – 1987. – 23, № 12. – С. 25 – 34.
6. Николаев, А.Г. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки [Текст] / А.Г. Николаев,

Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9 – 14.

7. Николаев, А.Г. О точном решении осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной неоднородностью [Текст] / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2011. – Вып. 2 (66). – С. 81 – 87.

8. Николаев, А.Г. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью [Текст] / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов, И.А. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2007. – Вып. 1 (48). – С. 42 – 49.

Поступила в редакцию 15.12.2011.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков