

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОГОТОВКИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ К РАСЧЕТУ МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ БАЛКИ

В конструкции судов на воздушной подушке (СВП), как и в других летательных аппаратах, применяются многостержневые системы ферменного или рамного типа, работающие как балки.

Эффективным средством их расчета на ЭВМ является метод перемещений в матричной формулировке [1]. Суть метода состоит в том, что система разбивается на элементы (стержни). Для каждого элемента составляется основное уравнение матричного метода:

$$P = KE \times \Delta,$$

где P - вектор сил, Δ - вектор перемещений, KE - матрица жесткости. Уравнения для отдельных элементов объединяются в единую систему уравнений, решение которой дает вектор узловых перемещений стержневой системы. Получив его, можно определить внутренние усилия в стержнях, напряжения и т.д. Формализация подготовки исходных данных значительно сокращает их вводимое количество и заключается в создании таких матриц:

- 1) индексов узлов;
- 2) координат узлов;
- 3) индексов перемещений;
- 4) направляющих косинусов.

Конструкция пространственной балки

Как было отмечено выше, балка представляет собой пространственную многостержневую систему (рис. 1). Разобьем ее мысленно на k отсеков.

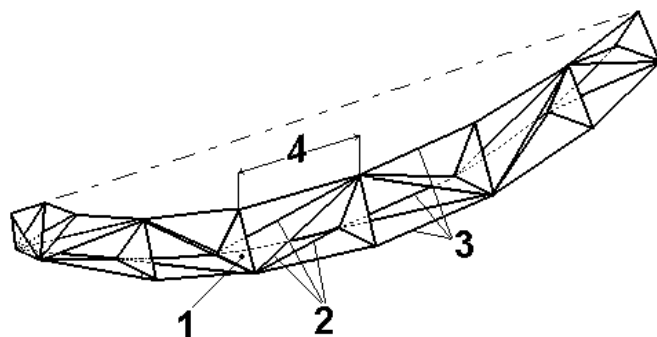


Рисунок 1 – Пространственная балка:

- 1 – Δ -образный шпангоут;
- 2 – диагональные стержни;
- 3 – продольные стержни; 4 – отсек

Каждый отсек заканчивается тремя стержнями, образующими Δ -образный шпангоут. В первом отсеке Δ -образный шпангоут соединен продольными стержнями с первым стержнем. Таким образом, в первом отсеке соответственно имеется девять стержней и пять узлов, в которых сходятся стержни, а в остальных отсеках – по три новых узла. Всего узлов

$$U = 3 \times k + 2, \quad (1)$$

а стержней

$$N = n \times k, \quad (2)$$

где $n = 9$ - количество стержней в отсеке.

Матрица координат узлов

Ее составляют таким образом. Нумеруют на чертеже отсеки, начиная с носового. Индекс $j = 1 - k$ обозначает номер отсека. Нумеруют узлы (от нижнего левого против часовой стрелки при взгляде по полету), индекс $u = 1 - U$ - номер узла.

Координаты узлов балки снимают с чертежа и составляют матрицу, где u есть и номер строки, и номер узла, а ее элементы такие:

$$krd_{u,1} = x_u; krd_{u,2} = y_u; krd_{u,3} = z_u. \quad (3)$$

Матрица индексов узлов

Матрица индексов узлов показывает, из какого узла выходит данный стержень и в каком заканчивается. Ее составляют так. Нумеруют стержни, начиная с первого отсека. Индекс $i = 1 - N$ обозначает номер стержня в системе и соответствует номеру строки матрицы. В первый столбец матрицы заносят номер начального узла для стержня ($u_{i,1}$), во второй столбец – номер конечного узла для того же стержня ($u_{i,2}$).

В первых трех отсеках номера узлов берут с чертежа и вводят вручную. Номера последующих узлов получают из формул

$$i = (j - 1) \times n + ii; u_{i,1} = u_{j-2 \times n,1} + 3 \times 2; u_{i,2} = u_{j-2 \times n,2} + 3 \times 2, \quad (4)$$

где $i = 1 - N$ - сквозной номер стержня в системе; $ii = 1 - n$ - порядковый номер стержня в отсеке.

С помощью матриц узлов легко определить длину стержней:

$$L_i = \sqrt{(krd_{u2,1} - krd_{u1,1})^2 + (krd_{u2,2} - krd_{u1,2})^2 + (krd_{u2,3} - krd_{u1,3})^2}, \quad (5)$$

где $u1 = u_{i,1}; u2 = u_{i,2}$.

С помощью матрицы индексов узлов составляют матрицу индексов перемещений и матрицу направляющих косинусов.

Матрица индексов перемещений

Матрица индексов перемещений показывает, какому номеру перемещения всей стержневой системы соответствует номер перемещения каждого элемента в глобальной системе координат.

При расчете конструкции методом перемещений в матричной формулировке применяют две координатные системы (рис. 2): глобальную и (для удобства расчета) локальную. Глобальная система – единая для всей конструкции, локальная – для каждого элемента своя. Связь между этими системами координат описывается матрицей направляющих косинусов [2].

У каждого пространственного элемента может быть до 12 степеней свободы (по шесть в каждом узле). Количество возможных узловых перемещений – $\Omega = 6 \times U$. Для заполнения элементов матрицы используют такие формулы:

$$Ml_{i,p} = 6 \times (u_{i,1} - 1) + p; Ml_{i,6+p} = 6 \times (u_{i,2} - 1) + p, \quad (6)$$

где $p = 1-6$ - порядковый номер перемещения данного стержня в исходном узле.

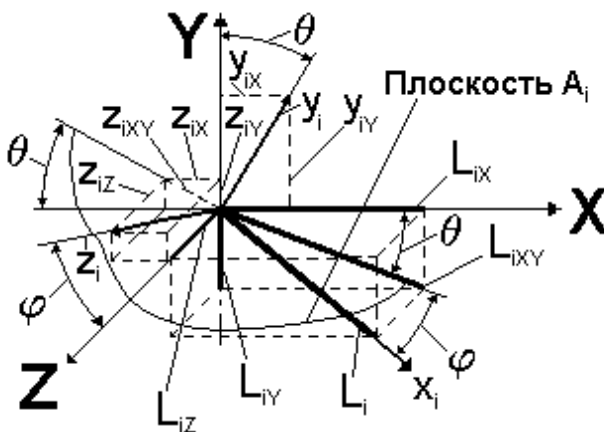


Рисунок 2 – Стержень в глобальной и локальной системах координат

Матрица направляющих косинусов

Для составления матрицы направляющих косинусов необходимо определить углы, образуемые каждой локальной осью элемента с глобальными осями стержневой системы, а затем - косинусы этих углов, либо непосредственно сами косинусы.

Оси x_i направлены вдоль стержней (рис. 2). Проекции стержней L_{iXY} на плоскость

XY образуют с осью X угол $\angle \theta$. Через стержни проходят плоскости A_i , параллельные оси Z . Из условия наилучшей работы стержней на изгиб главные центральные оси y_i сечений располагаются параллельно плоскости XY . Оси y_i составляют с осью Y углы, равные $\angle \theta_i$, а с осью Z - углы, равные 90° . Оси z_i расположены в плоскостях A_i и составляют с осью Z углы, равные $\angle \varphi_i$. Согласно рис. 2

$$\cos(\theta)_i = \frac{L_{iX}}{L_{iXY}}; \sin(\theta)_i = \frac{L_{iY}}{L_{iXY}}; \cos(\angle \varphi) = \frac{L_{iXY}}{L_i}; \sin(\angle \varphi) = \frac{L_{iZ}}{L_i}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} z_{iX} &= z_{iXY} \times \cos(\angle\theta)_i; z_{iXY} = z_i \times \sin(\angle\varphi)_i; \\ z_{iY} &= z_{iXY} \times \sin(\angle\theta)_i; z_{iZ} = z_i \times \cos(\angle\varphi)_i \end{aligned} \quad (8)$$

Величины проекций стержней L_{Xi}, L_{Yi}, L_{Zi} на оси X, Y, Z получаем по формулам

$$\begin{aligned} L_{Xi} &= krd_{u2,1} - krd_{u1,1}; \\ L_{Yi} &= krd_{u2,2} - krd_{u1,2}; \\ L_{Zi} &= krd_{u2,3} - krd_{u1,3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $u2$ и $u1$ имеют те же значения, что и в формуле (5).

Выражения для направляющих косинусов осей x_i имеют вид

$$\cos(\angle xX)_i = \frac{L_{Xi}}{L_i}; \cos(\angle xY)_i = \frac{L_{Yi}}{L_i}; \cos(\angle xZ)_i = \frac{L_{Zi}}{L_i}; \quad (10)$$

для осей y_i с учетом (7)

$$\begin{aligned} \cos(\angle yX)_i &= \cos(\angle 90^0 - \theta) = \frac{L_{iY}}{L_{iXY}}; \\ \cos(\angle yY)_i &= \cos(\angle\theta) = \frac{L_{iX}}{L_{iXY}}; \\ \cos(\angle yZ)_i &= \cos(\angle 90^0) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

и для осей z_i с учетом (7) и (8) –

$$\begin{aligned} \cos(\angle zX)_i &= \frac{z_{iX}}{z_i} = \frac{L_{iZ}}{L_i} \times \frac{L_{iX}}{L_{iXY}}; \\ \cos(\angle zY)_i &= \frac{z_{iY}}{z_i} = \frac{L_{iZ}}{L_i} \times \frac{L_{iY}}{L_{iXY}}; \\ \cos(\angle zZ)_i &= \frac{z_{iZ}}{z_i} = \frac{L_{iXY}}{L_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Матрица направляющих косинусов стержня обнуляется, а затем следующие элементы определяются по таким формулам

$$\begin{aligned}
l_{i1,1} &= l_{i4,4} = l_{i7,7} = l_{i10,10} = \frac{L_{Xi}}{L_j}; \\
l_{i1,2} &= l_{i4,5} = l_{i7,8} = l_{i10,11} = \frac{L_{Yi}}{L_j}; \\
l_{i1,3} &= l_{i4,6} = l_{i7,9} = l_{i10,12} = \frac{L_{Zi}}{L_j}; \\
l_{i2,1} &= l_{i5,4} = l_{i8,7} = l_{i11,10} = \frac{L_{iY}}{L_{iXY}}; \\
l_{i2,2} &= l_{i5,5} = l_{i8,8} = l_{i11,11} = \frac{L_{iX}}{L_{iXY}}; \\
l_{i2,3} &= l_{i5,6} = l_{i8,9} = l_{i11,12} = 0; \\
l_{i3,1} &= l_{i6,4} = l_{i9,7} = l_{i12,10} = \frac{L_{iZ} \times L_{iX}}{L_j \times L_{iXY}}; \\
l_{i3,2} &= l_{i6,5} = l_{i9,8} = l_{i12,11} = \frac{L_{iZ} \times L_{iY}}{L_j \times L_{iXY}}; \\
l_{i3,3} &= l_{i6,6} = l_{i9,9} = l_{i12,12} = \frac{L_{iXY}}{L_j}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полученные выражения позволяют решить задачу формализации подготовки исходных данных для расчета, что уменьшает не только время, но и вероятность ошибок как при подготовке исходных данных, так и при расчете многостержневых систем. Это обеспечивается достаточно малым теперь количеством вводимых исходных данных. Большинство величин ранее входивших в исходные данные теперь включены в расчетные величины.

Список использованных источников

1. Образцов, И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики ЛА: учебн. пособ. [Текст] / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
2. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в MathCAD 14. Учебный курс [Текст] / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2007. – 502 с.

Поступила в редакцию 30.11.2011.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*