

УТОЧНЕННАЯ МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДАТЛИВОСТИ СОЕДИНИТЕЛЬНОГО СЛОЯ В ОДНОСРЕЗНОМ КЛЕЕВОМ СОЕДИНЕНИИ

В инженерной практике возникает необходимость экспериментального определения податливости соединительного слоя. В работе [1] предложена схема таких испытаний (изгиб по трехточечной схеме) и приведены расчетные формулы для определения податливости соединительного слоя. Расчет по данной методике предполагает предварительное определение модуля упругости при изгибе и модуля межслойного сдвига при изгибе каждой из соединяемых деталей, при этом балки рассматриваются в приближении Тимошенко [1, 2]. Найденные упругие характеристики используются в расчете прогиба соединения по модели А.Р. Ржаницына [3], которая межслойный сдвиг не учитывает. Эта разница в моделях может вносить систематическую погрешность в расчет характеристик клеевого слоя. В данной работе предложено использовать для описания напряженного состояния при трехточечном изгибе соединения более точную математическую модель, которая основана на теории балок Тимошенко и новой модели клеевого слоя.

Трехточечный изгиб двухслойной балки рассмотрен в работе [4], где математическая модель соединения аналогична [5]. Модель клеевого слоя, используемая в настоящей работе, в упрощенной постановке (без учета второго коэффициента постели) была предложена в работе [6] для расчета подкрепленных железобетонных балок.

Математическая модель соединения. На рис. 1 показаны силовые факторы, действующие на элементы слоев.

Уравнения равновесия слоев имеют вид

$$N'_1 = \tau; Q'_1 = \sigma_1; M'_1 = Q_1 - \frac{\delta_1}{2} \tau; \quad (1)$$

$$N'_2 = -\tau; Q'_2 = -\sigma_2; M'_2 = Q_2 - \frac{\delta_2}{2} \tau; \quad (2)$$

$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad (3)$$

где N_i, Q_i, M_i – продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в i -м несущем слое; τ, σ_j – касательные и нормальные напряжения в клеевом слое; δ_1, δ_2 – толщина 1-го и 2-го несущих слоев; δ_0 – толщина клеевого слоя.

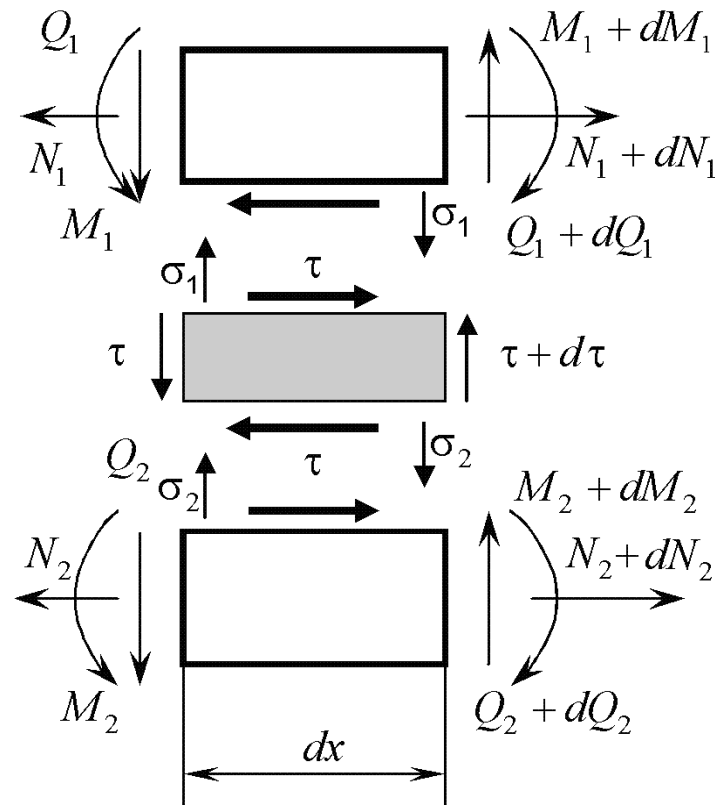


Рисунок 1 – Напряжения и усилия в слоях

Соотношения теории упругости для стержней:

$$u'_i = \frac{N_i}{B_i}; \quad D_i \varphi'_i = M_i; \quad w'_i + \varphi_i = \frac{Q_i}{H_i}, \quad (4)$$

где u_i , w_i , φ_i – соответственно продольные, поперечные перемещения и угол поворота сечения i -го несущего слоя; B_i , D_i , H_i – соответственно жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг, которые для однородных слоев вычисляются как $B_i = E_i \delta_i$, $D_i = \frac{\delta_i^3}{12} E_i$, $H_i = \frac{5}{6} G_i \delta_i$, где E_i – модули упругости; G_i – модули сдвига слоев.

Клеевой слой моделируется упругими элементами, показанными на рис. 2 в виде пружинок, и мембраной, поперечные перемещения которой w_0 [6].

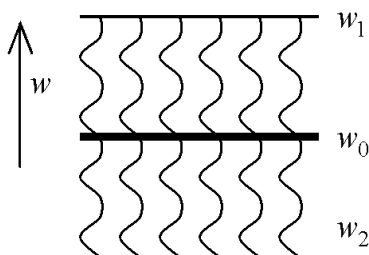


Рисунок 2 – Модель клеевого слоя

Данная модель упругого основания была предложена М.М. Филоненко-Бородичем, она эквивалентна моделям упругих оснований с двумя коэффициентами постели В.З. Власова и П.Л. Пастернака [7]. Нормальные напряжения в клее согласно данной модели имеют вид

$$\sigma_i = (-1)^i k_1 (w_0 - w_i) - (-1)^i k_2 (w''_0 - w''_i), \quad (5)$$

где $i = 1, 2$; k_1, k_2 – два коэффициента постели, которые могут быть вы-

числены следующим образом: $k_1 = 2E_0 \left[\delta_0 (1 - \mu_0^2) \right]^{-1}$; $k_2 = \frac{E_0 \delta_0}{12(1 + \mu_0)}$

[5]. Здесь E_0 и μ_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона клеевого слоя.

Касательные напряжения в клеевом слое [6]

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 w'_0, \quad (6)$$

где G_0 – модуль сдвига соединительно слоя.

Число уравнений в системе (1) - (6) уменьшим, положив $N_1(x) + N_2(x) = 0$. Исключив из (3) напряжения, получим

$$M''_1 + M''_2 + (0,5\delta_1 + 0,5\delta_2 + \delta_0)N''_1 = 0. \quad (7)$$

Продифференцировав (6) и применив (1) - (4), получим

$$\delta_0 w_0^{(2)} + N_1 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{B_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{2} \frac{M_i}{D_i} - \frac{\delta_0}{G_0} N_1^{(2)} = \frac{F}{B_2}. \quad (8)$$

Верхний индекс в скобках обозначает порядок производной.

Подставив (5) и (1) в уравнение (3) и исключив производные от перемещений с помощью (4), получим

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k_2}{k_1} w_0^{(4)} - 2w_0^{(2)} - \frac{k_2}{k_1 H_1} M_1^{(4)} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_1} + \frac{1}{H_1} \right) M_1^{(2)} - \frac{M_1}{D_1} - \\ & - \frac{k_2}{k_1 H_2} M_2^{(4)} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_2} + \frac{1}{H_2} \right) M_2^{(2)} - \frac{M_2}{D_2} + \\ & + \left(\frac{\delta_0}{k_1} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_2} \right) \right) N_1^{(4)} + \left(\frac{\delta_1}{2H_1} + \frac{\delta_2}{2H_2} \right) N_1^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сложив уравнения (5), исключив производные от поперечных перемещений слоев, и применив (4), получим четвертое уравнение

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k_2}{H_1} \right) M_1^{(4)} - \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{D_1} \right) M_1^{(2)} - \left(1 + \frac{k_2}{H_2} \right) M_2^{(4)} + \\ & + \left(\frac{k_1}{H_2} + \frac{k_2}{D_2} \right) M_2^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \frac{k_2 \delta_1}{2H_1} - \delta_2 - \frac{k_2 \delta_2}{2H_2} \right) N_1^{(4)} - \\ & - \frac{k_1}{2} \left(\frac{\delta_1}{H_1} - \frac{\delta_2}{H_2} \right) N_1^{(2)} + \frac{k_1}{D_1} M_1 - \frac{k_1}{D_2} M_2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (8) находим $W_0^{(2)}$ и, исключив производные W_0 в уравнении (9), получим систему трех дифференциальных уравнений относительно M_1 , M_2 и N_1 . Введем вектор $\vec{X} = (M_1; M_2; N_1)^T$ и запишем полученную систему в матричном виде

$$\mathbf{A}_4 \vec{X}^{(4)} + \mathbf{A}_2 \vec{X}^{(2)} + \mathbf{A}_0 \vec{X} = \vec{R}, \quad (11)$$

где коэффициенты матриц \mathbf{A}_i ($i = 4, 2, 0$) могут быть легко получены из уравнений (7) - (10). Коэффициенты матриц не приводим в связи с их громоздким видом и легкостью нахождения. В правой части системы (11) стоит вектор $\vec{R} = (0; 2F/(\delta_0 B_2); 0)^T$.

Общее решение системы однородных уравнений (11) ищем в виде суперпозиции базисных решений $\vec{X}_0 = \mathbf{C} e^{\lambda x} \vec{h}$, где λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_0) = 0, \quad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением 10-й степени с четными степенями до 2 включительно. Таким образом, общее решение системы (11) имеет вид

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i x} \vec{h}_i + C_9 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + C_{10} x \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $a_1 = \frac{D_2}{D_1}$, $a_2 = \frac{B_1 B_2 (2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{2D_1 (B_1 + B_2)}$ и $b = \frac{B_1 F}{B_1 + B_2}$.

Векторы \vec{h}_i , соответствующие корням уравнения (12) λ_i , находят-ся из уравнения $(\mathbf{A}_4 \lambda_i^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_i^2 + \mathbf{A}_0) \vec{h}_i = 0$, определяются с точностью до константы и представляют собой нетривиальное решение данной системы линейных уравнений.

Таким образом, получив M_1, M_2, N_1 (13) из формул (1) и (2) находим τ, Q_j, σ_j . Интегрируя выражения (4) и вводя соответствующие константы интегрирования, определяем перемещения несущих слоев U_j, W_j, ϕ_j . Перемещения W_0 находим, интегрируя уравнение (6). В итоге в решении присутствует 17 констант интегрирования.

Краевые условия. Схема нагружения показана на рис. 3.

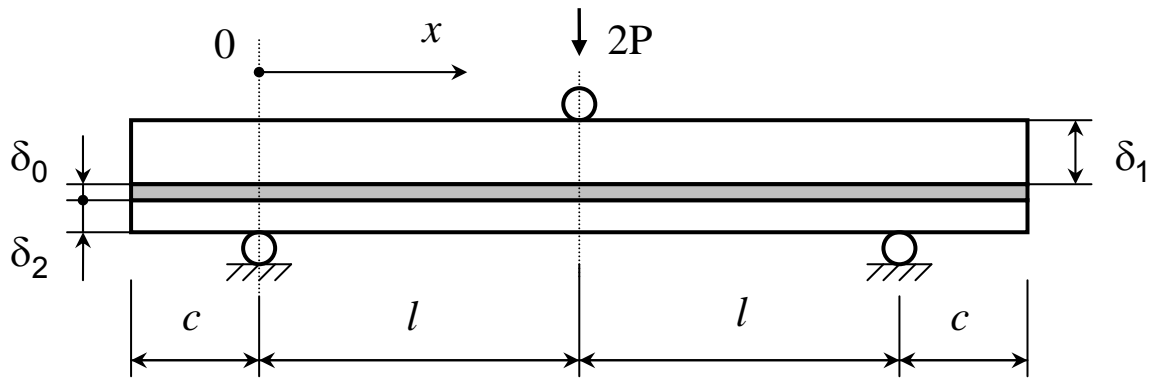


Рисунок 3 – Трехточечный изгиб

1) В работе [1] рассмотрена схема, при которой $c = 0$. Краевые условия с учетом симметрии стержня в этом случае имеют вид:

$$Q_1(0) = N_1(0) = M_1(0) = 0; w_2(0) = M_2(0) = 0; \tau(0) = \tau(L) = 0;$$

$$u_1(L) = u_2(L) = w'_1(L) = w'_2(L) = 0; Q_1(L) = P; Q_2(L) = 0.$$

Еще четыре необходимых условия получим из уравнений (5), подставив в формулу напряжения и перемещения и приравняв коэффициенты при X и свободные члены. Остальные слагаемые при этом тождественно равны. В итоге получаем систему из 17 линейных уравнений относительно такого же числа неизвестных констант.

2) Если $c > 0$, то также используя симметрию, рассмотрим половину стержня. При этом рассматриваются 2 участка отдельно: консольный ($x \in [-c; 0]$, верхний индекс в краевых условиях «с») и расположенный между двумя точкам приложения нагрузки ($x \in [0; l]$). Краевые условия и условия сопряжения имеют вид

$$Q_1^{(c)}(-c) = M_1^{(c)}(-c) = N_1^{(c)}(-c) = 0; Q_2^{(c)}(-c) = M_2^{(c)}(-c) = 0;$$

$$u_1(l) = u_2(l) = 0; w'_1(l) = w'_2(l) = 0; Q_2(l) = 0; Q_1(l) = P;$$

$$w_1^{(c)}(0) = w_1(0); w_2^{(c)}(0) = w_2(0) = 0; \varphi_i^{(c)}(0) = \varphi_i(0);$$

$$u_i^{(c)}(0) = u_i(0); M_i^{(c)}(0) = M_i(0); (i = 1, 2); \tau^{(c)}(-c) = 0; \tau(l) = 0;$$

$$N_1^{(c)}(0) = N_1(0); Q_1^{(c)}(0) = Q_1(0); w_0^{(c)}(0) = w_0(0); \tau^{(c)}(0) = \tau(0).$$

Четыре дополнительных условия для каждого из участков также получим, подставив в тождество (5) напряжения и перемещения.

Методика испытаний. Алгоритм испытаний аналогичен алгоритму, изложенному в работе [1]: а) проводятся испытания соединяемых деталей и определяются модули упругости при изгибе и модули сдвига при изгибе согласно [1, 2]; б) измеряются средняя толщина клеевой прослойки и величина прогиба склеенных деталей под действием приложенной нагрузки; в) задавая среднюю толщину клея, размеры и упругие

свойства склеенных деталей, величину приложенного усилия, находим модуль упругости клея, обеспечивающий известный прогиб.

Численное сравнение с методикой [1]. Как было отмечено выше, модель составной балки А.Р. Ржаницына, предложенная для определения модуля упругости клея [1], имеет такие недостатки:

- используется упрощенная модель балки, не учитывающая сдвиг. Но при трехточечном изгибе слоистых композиционных материалов данный вид деформации может оказывать существенное влияние;
- используется простая модель клеевого слоя.

Чтобы оценить погрешность, вносимую в измерения модуля сдвига клея типом математической модели, сравним результаты расчетов по модели [1, 3] с расчетами по модели, предложенной в данной работе. Параметры соединяемых деталей: $E_1 = 70$ ГПа; $G_1 = 26$ ГПа; $E_2 = 210$ ГПа; $G_2 = 5,4$ ГПа; $\delta_0 = 0,3$ мм; $\mu_0 = 0,3$; $P = 15$ кН/м. Модули упругости при изгибе и растяжении считаем одинаковыми. Погрешности при вычислении модуля сдвига клеевого слоя по модели [1, 3] по сравнению с предложенной моделью для ряда значений длины и толщины деталей даны в табл. 1.

Таблица 1 – Погрешности модели при $\delta_0 = 0,3$ мм

| | $L = 50$ мм | $L = 100$ мм | $L = 150$ мм |
|------------------------------|-------------|--------------|--------------|
| $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм | 49,8% | 48,4% | 47,9% |
| $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм | 61,2% | 59,5% | 58,9% |

На разницу в результатах вычислений между двумя указанными способами оказывает влияние и толщина клея. Покажем это, проведя вычисления для $\delta_0 = 0,5$ мм, результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Погрешности модели при $\delta_0 = 0,5$ мм

| | $L = 50$ мм | $L = 100$ мм | $L = 150$ мм |
|------------------------------|-------------|--------------|--------------|
| $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм | 37% | 35,2% | 34,6% |
| $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм | 48,7% | 46,3% | 45,6% |

Как и следовало ожидать, влияние сдвиговых деформаций на величину прогиба снижается для длинных и тонких образцов, и особенно при высоких модулях межслойного сдвига.

На рис. 4 показана зависимость $w_2(L)$ от G_0 (при $\mu_0 = 0,3$), если $L = 100$ мм; $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм; $\delta_0 = 0,2$ мм; $P = 15$ кН/м, а упругие характеристики несущих слоев аналогичны описанным выше.

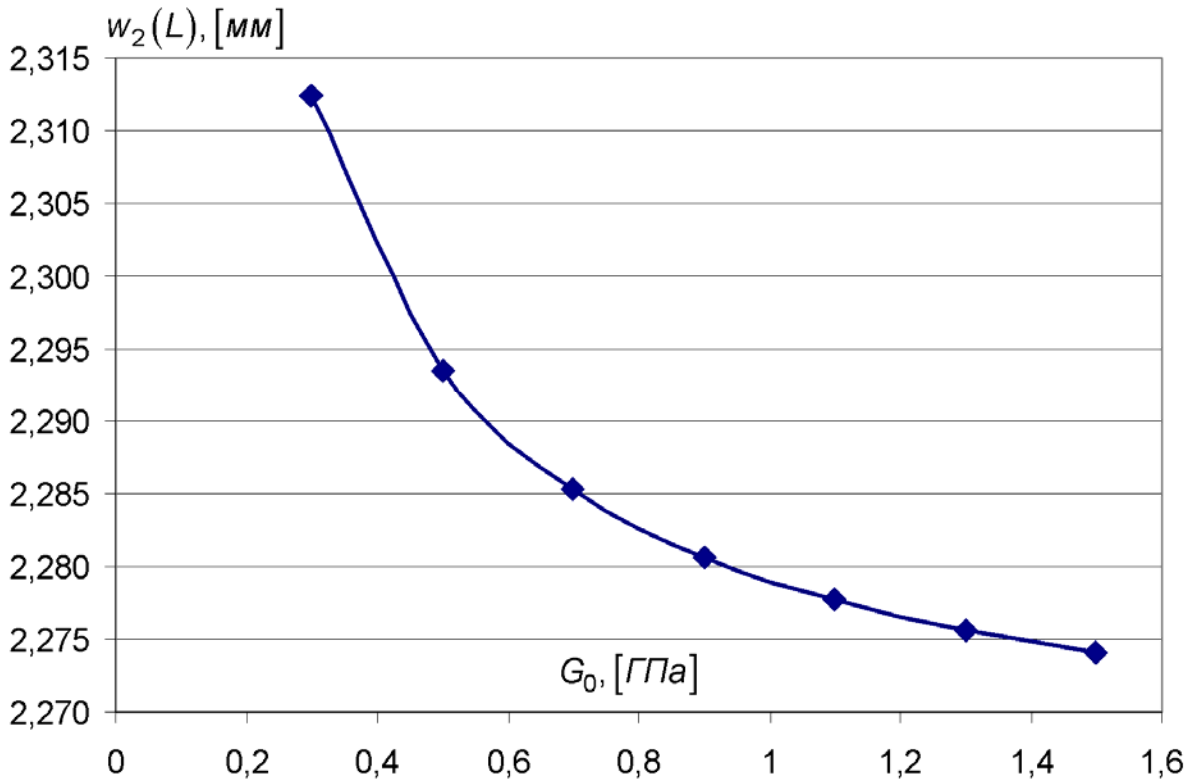


Рисунок 4 – Зависимость величины прогиба от G_0

Из графика видно, что пятикратное увеличение G_0 с 0,3 до 1,5 ГПа уменьшает максимальный прогиб лишь с 2,3124 до 2,2741 мм, т.е. всего на 1,65%.

Выводы

Предложена уточненная модель клеевого соединения, которая использована для решения задачи о напряженном состоянии соединения при трехточечном изгибе.

Величина прогиба мало чувствительна к модулю сдвига клея, поэтому погрешности модели (и, конечно, погрешности измерений) оказывают значительное влияние на результат решения обратной задачи по определению модуля упругости клеевого слоя по известному прогибу. Это придает актуальность применению математических моделей высокой точности для анализа результатов испытаний, а также выдвигает высокие требования к точности измерений.

Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. – 359 с.
2. Композиционные материалы [Текст]: справ. / В.В. Васильев,

В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

3. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластины [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

4. Alfredsson, K.S. Flexure analysis of unsymmetric orthotropic beams with an interlayer [Text] / Alfredsson K.S., Gillespie J.W. Jr. , Carlsson L.A., Bogetti T.A., Yiournas A. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, 2009, p. 2093–2110.

5. Артюхин, Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин [Текст] // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – Вып. 11 – С. 136–148.

6 Wang, J.L. Three-parameter elastic foundation model of FRP strengthened concrete beams [Text] // Asia-Pacific Conference on FRP in Structures (APFIS 2007) S.T. Smith (ed), p. 831-836.

7. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П.Л. Пастернак – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.

Поступила в редакцию 20.09.2012.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*