

## КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СОТОВОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ

Широкое использование в изделиях ракетно-космической техники сотовых конструкций [1], работающих при одновременном силовом и интенсивном тепловом воздействиях, требует комплексного подхода к их оптимальному проектированию [2 – 4]. Это предопределяет необходимость разработки достоверных методов прогнозирования не только физико-механических, но и теплофизических характеристик основных элементов этих конструкций, в частности теплопроводности сотового заполнителя (СЗ).

Экспериментальными исследованиями установлено, что для сэндвичевых панелей с СЗ теплопроводность существенно зависит от его высоты и геометрических параметров ячейки сотов [5].

Ранее нами в работе [6] были получены аналитические зависимости эффективного коэффициента теплопроводности СЗ от его геометрических параметров и толщины клеевых прослоек, соединяющих грани сотов между собой и с несущими слоями. При этом было показано существенное влияние на теплопроводность сотовой панели клеевой прослойки, связывающей торцы граней СЗ с несущими слоями (НС).

Однако при данном подходе был рассмотрен лишь один механизм передачи тепла внутри сотов – теплопроводность. Поэтому представляется актуальным оценить вклад других механизмов передачи тепла внутри сотов.

Ранее в работах [7, 8] при совместном действии кондуктивного и радиационного теплообменов была рассмотрена задача определения температуры, теплового потока и эффективной теплопроводности заполнителя, представленного одинаковыми, прилегающими друг к другу ячейками в виде закрытых полых цилиндров. Предложенный в этих работах подход позволил определить эффективный коэффициент теплопроводности лишь кругового и прямоугольного цилиндрических заполнителей. Обобщим полученные в работах [7, 8] результаты для СЗ с широко применяемой в настоящее время ячейкой неправильной шестигранной формы в плане [9].

Задачу будем решать при следующих допущениях:

- 1) ячейка сотов теплоизолирована по боковой поверхности;
- 2) основания и боковые поверхности излучают по закону идеально серого тела;
- 3) кондуктивный теплообмен происходит только в стенке ячейки сотов;
- 4) задача рассматривается как одномерная при изменении температуры и лучистого потока в направлении оси  $z$ .

Рассмотрим цилиндрическую ячейку СЗ неправильной шестигранной формы в плане (рис. 1).

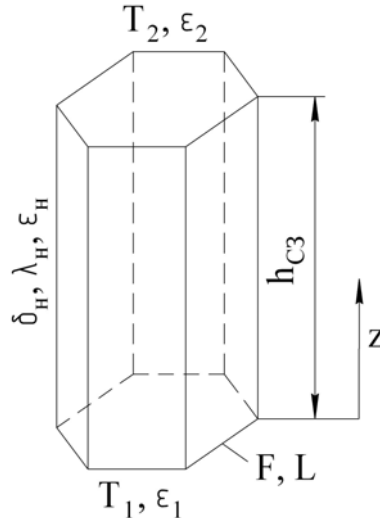


Рисунок 1 – Рассматриваемая ячейка СЗ

Будем считать известными:

- высоту СЗ ( $h_{C3}$ );
- площадь и длину контура основания ячейки ( $F, L$ );
- температуру и степень черноты верхнего и нижнего оснований ( $T_1, T_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ );
- толщину, теплопроводность и степень черноты стенки ( $\delta_H, \lambda_H, \varepsilon_H$ ).

При принятых допущениях уравнение стационарной теплопроводности в рассматриваемой ячейке СЗ с учетом теплового излучения примет вид

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} - \frac{1}{\lambda_H \delta_H} \cdot q_{\text{рез}}(z) = 0. \quad (1)$$

Интегральное уравнение лучистого теплообмена для рассматриваемой конструкции запишем в виде [10]

$$\begin{aligned} \frac{q_{\text{рез}}(z)}{\varepsilon_H} = & C_0 T^4(z) - \left( C_0 T_1^4 - \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot q_{1\text{рез}} \right) \varphi_{dz-\text{осн}}(z) - \\ & - \left( C_0 T_2^4 - \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot q_{2\text{рез}} \right) \varphi_{dz-\text{осн}}(H - z) - \\ & - \int_0^z \left( C_0 T^4(z') - \frac{1 - \varepsilon_H}{\varepsilon_H} \cdot q_{\text{рез}}(z') \right) d\varphi_{dz-dz'}(z - z') - \\ & - \int_z^{h_{C3}} \left( C_0 T^4(z') - \frac{1 - \varepsilon_H}{\varepsilon_H} \cdot q_{\text{рез}}(z') \right) d\varphi_{dz-dz'}(z' - z), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $C_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;

$\varphi_{dz-оч}(z)$ ,  $\varphi_{dz-оч}(H-z)$  – коэффициенты облученности элементов стенки ячейки нижним и верхним основаниями соответственно;  
 $q_{1рез}$ ,  $q_{2рез}$  – плотности результирующего излучения на нижнем и верхнем основаниях;

$d\varphi_{dz-dz'}$  – коэффициент взаимной облученности элементов стенки, расположенных на расстоянии  $|z-z'|$  друг от друга;

$$\begin{aligned} \frac{q_{1рез}}{\varepsilon_1} = C_0 T_1^4 - \left( C_0 T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot q_{2рез} \right) \varphi_{оч-оч} - \\ - \int_0^{h_{C3}} \left( C_0 T^4(z) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} \cdot q_{рез}(z) \right) \varphi_{оч-dz}(z); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_{2рез}}{\varepsilon_2} = C_0 T_2^4 - \left( C_0 T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot q_{1рез} \right) \varphi_{оч-оч} - \\ - \int_0^{h_{C3}} \left( C_0 T^4(z) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} \cdot q_{рез}(z) \right) \varphi_{оч-dz}(H-z), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varphi_{оч-оч}$  – коэффициент облученности между основаниями;

$\varphi_{оч-dz}(z)$ ,  $\varphi_{оч-dz}(H-z)$  – коэффициенты облученности верхнего и нижнего оснований элементами стенки ячейки.

Граничными условиями при этом будут

$$T(0) = T_1, T(h_{C3}) = T_2. \quad (5)$$

Согласно закону сохранения энергии и соотношению взаимности для коэффициентов облученности, входящих в уравнения (2) - (4), справедливо [12]:

$$\begin{aligned} d\varphi_{dz-dz'}(z-z') &= \frac{\partial}{\partial z'} \varphi_{dz-оч}(z-z') dz'; \\ d\varphi_{dz-dz'}(z'-z) &= -\frac{\partial}{\partial z'} \varphi_{dz-оч}(z'-z) dz'; \\ \varphi_{оч-dz}(z) &= \varphi_{dz-оч}(z) \cdot \frac{L \cdot dz}{F}; \\ \varphi_{оч-оч} &= -\left( \frac{L}{F} \cdot \int \varphi_{dz-оч}(z) dz \right)_{z=h_{C3}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Точное аналитическое решение интегрального уравнения теплообмена излучением возможно только при весьма простых геометрических конфигурациях. При рассмотрении сложных конструкций, в частности неправильной шестигранной призмы, следует прибегать к прибли-

женным аналитическим решениям. Так, интегральное уравнение (2) может быть преобразовано к дифференциальному уравнению второго порядка путем аппроксимации его ядра (геометрического коэффициента

$\frac{\partial}{\partial z'} \varphi_{dz-очн}(|z - z'|)$ ) экспоненциальной функцией вида [12]

$$m \cdot e^{-n \cdot |z - z'|}, \quad (7)$$

где  $m, n$  – произвольные постоянные.

В работе [8] при рассмотрении коэффициентов облученности кругового и прямоугольного цилиндрических заполнителей предложена следующая экспоненциальная аппроксимация вида:

$$\begin{aligned} \varphi_{dz-очн}(z) &= \frac{1}{2} \cdot e^{-2f \cdot \frac{z}{h_{сз}}}; \\ -\frac{\partial}{\partial z'} \varphi_{dz-очн}(|z - z'|) &= \frac{f}{h_{сз}} \cdot e^{-2f \cdot \frac{|z - z'|}{h_{сз}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f = \frac{L \cdot h_{сз}}{4F}$ .

Проверим применимость данной аппроксимации для сотов неправильной шестигранной формы в плане.

Коэффициент облученности между двумя поверхностями  $A_1$  и  $A_2$  определяется как [10]

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) \cdot dA_1 \cdot dA_2}{\pi \cdot r^2}, \quad (9)$$

где  $A_1$  – площадь поверхности  $A_1$ ;

$dA_1, dA_2$  – элементарные площадки поверхностей  $A_1$  и  $A_2$ ;

$r$  – расстояние между центрами  $O_1$  и  $O_2$  элементарных площадок  $dA_1$  и  $dA_2$ ;

$\alpha_1, \alpha_2$  – углы, образованные отрезком  $O_1O_2$  с нормальными  $dA_1$  и  $dA_2$ .

Уравнение (9) может быть решено аналитически только для достаточно простых геометрических конфигураций. Поэтому при рассмотрении коэффициентов облученности элементов сложных геометрических форм, таких, как неправильная шестигранная призма, целесообразнее использовать альтернативные методы вычисления.

#### 1. Метод контурного интегрирования

В соответствии с теоремой Стокса интеграл по поверхности в выражении (9) можно заменить криволинейным интегралом по контуру поверхности, что сократит кратность интегрирования. Коэффициент облученности между двумя поверхностями, выраженный посредством контурных интегралов, будет иметь вид [10]

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi \cdot A_1 A_2} \oint \oint (\ln r \cdot dx_2 dx_1 + \ln r \cdot dy_2 dy_1 + \ln r \cdot dz_2 dz_1), \quad (10)$$

где  $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

## 2. Алгебра коэффициентов облученности

Коэффициенты облученности для сложных конфигураций могут быть выражены через известные угловые коэффициенты для более простых тел при помощи принципа суперпозиции и соотношений взаимности.

Так, коэффициент облученности между основаниями неправильной шестигранной призмы можно выразить:

– через коэффициент облученности параллельных прямоугольников (рис. 2, а)

$$\varphi_{1-2} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{b} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{d}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{d} \cdot \sqrt{d^2 + c^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{d^2 + c^2}} - \right. \\ \left. - \frac{c}{b} \cdot \operatorname{arctg} \frac{d}{c} - \frac{c}{d} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{c} + \frac{c^2}{2d \cdot b} \cdot \ln \frac{(b^2 + c^2)(d^2 + c^2)}{c^2 + (b^2 + d^2 + c^2)} \right]; \quad (11)$$

– коэффициент облученности прямоугольников, образующих угол  $\alpha$  (рис. 2, б):

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi L} \left\{ -\frac{\sin 2\alpha}{4} \left[ NL \cdot \sin \alpha + \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) (N^2 + L^2) + L^2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{N - L \cdot \cos \alpha}{L \cdot \sin \alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + N^2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{L - N \cdot \cos \alpha}{N \cdot \sin \alpha} \right) \right] + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \ln \left[ \frac{(1 + N^2)(1 + L^2)}{(1 + N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha)} \right]^{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \times \right. \\ \times \left[ \frac{L^2(1 + N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha)}{(1 + L^2)(N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha)} \right]^{L^2} + \frac{N^2 \sin^2 \alpha}{4} \ln \left[ \frac{N^2}{(N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha)} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1 + N^2}{(1 + N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha)} \right]^{\cos 2\alpha} \left. \right] + L \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{L} + N \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{N} - \\ - \sqrt{N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{N^2 + L^2 - 2NL \cdot \cos \alpha}} + \frac{N \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{2} \times \\ \times \sqrt{1 + N^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{N \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + N^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{L - N \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + N^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \right] + \\ + \cos \alpha \cdot \int_0^L \sqrt{1 + z^2 \cdot \sin^2 \alpha} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{N - z \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + z^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{z \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + z^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \right] dz, \quad (12)$$

где  $L = \frac{l}{w}$ ;  $N = \frac{t}{w}$ .

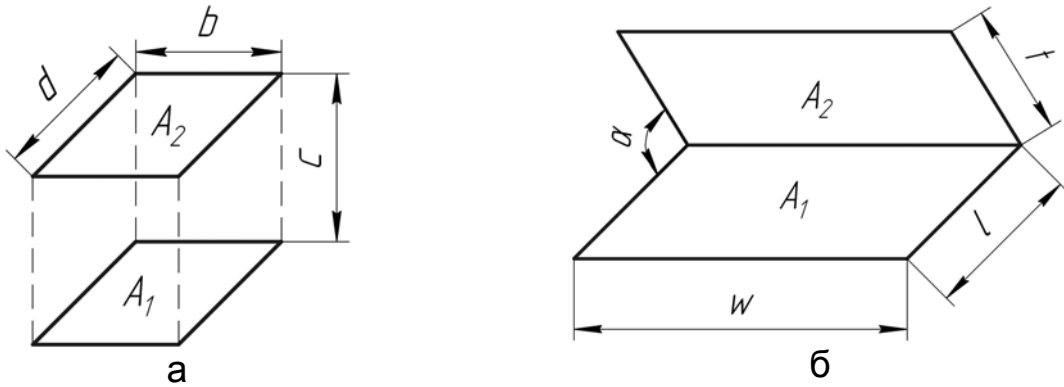
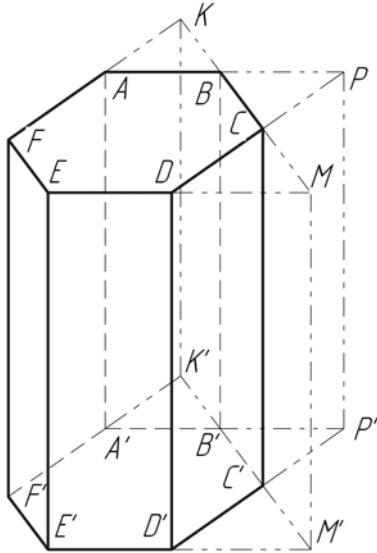


Рисунок 2 – Простые конфигурации системы излучающих тел:  
 а – параллельные прямоугольники;  
 б – прямоугольники, образующие угол  $\alpha$

Для определения  $\varphi_{осн-dz}(z)$  ячейки соты методом алгебры угловых коэффициентов рассмотрим неправильную шестигранную призму (рис. 3).



- $F_1$  – площадь прямоугольника  $ABB'A'$
- $F_2$  – площадь прямоугольника  $BCC'B'$
- $F_3$  – площадь прямоугольника  $CDD'C'$
- $F_4$  – площадь прямоугольника  $DEE'D'$
- $F_5$  – площадь прямоугольника  $FEE'F'$
- $F_6$  – площадь прямоугольника  $AFF'A'$
- $F_7$  – площадь прямоугольника  $BPP'B'$
- $F_8$  – площадь прямоугольника  $CPP'C'$
- $F_9$  – площадь прямоугольника  $SMM'S'$
- $F_{10}$  – площадь прямоугольника  $DMM'D'$
- $F_{11}$  – площадь прямоугольника  $AKK'A'$
- $F_{12}$  – площадь прямоугольника  $KBB'K'$

Рисунок 3 – Неправильная шестигранная призма

Для грани  $ABB'A'$  справедливо:

$$\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} + \varphi_{1-4} + \varphi_{1-5} + \varphi_{1-6} + 2\varphi_{1-осн} = 1. \quad (13)$$

В силу симметричности шестиугольника основания будет соблюдаться равенство следующих коэффициентов облученности:  
 $\varphi_{1-2} = \varphi_{1-6}$ ,  $\varphi_{1-3} = \varphi_{1-5}$ .

Коэффициент  $\varphi_{1-2}$  определяется формулой (12), а  $\varphi_{1-4}$  – формулой (11).

Согласно закону сохранения энергии

$$\varphi_{1-3} = \frac{1}{F_1} (F_{1,7} \cdot \varphi_{1,7-3,8} + F_7 \cdot \varphi_{7-8} - F_7 \cdot \varphi_{7-3,8} - F_{1,7} \cdot \varphi_{1,7-8}). \quad (14)$$

Все угловые коэффициенты, определяющие  $\varphi_{1-3}$ , рассчитываются по формуле (12).

Решая уравнение (13) относительно  $\varphi_{1-осн}$ , получим

$$\varphi_{1-осн} = 0,5 - (\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} + 0,5\varphi_{1-4}). \quad (15)$$

Теперь  $\varphi_{осн-1}$  выразим согласно правилу взаимности

$$\varphi_{осн-1} = \frac{F_1}{F_{осн}} \cdot \varphi_{1-осн}. \quad (16)$$

Аналогично (13) для грани призмы ВСС'В' справедливо

$$\varphi_{2-1} + \varphi_{2-3} + \varphi_{2-4} + \varphi_{2-5} + \varphi_{2-6} + 2\varphi_{2-осн} = 1 \quad (17)$$

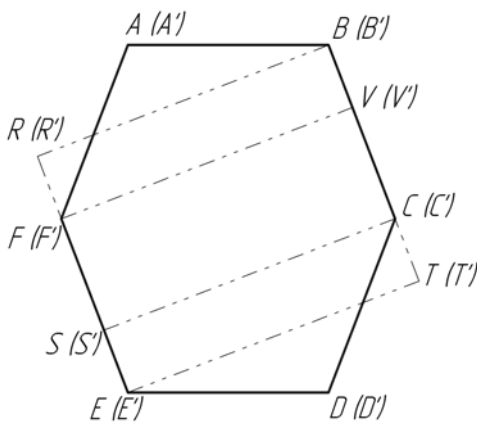
Коэффициенты  $\varphi_{2-1}$ ,  $\varphi_{2-3}$  определяются по формуле (12).

Согласно закону сохранения энергии:

$$\varphi_{2-4} = \frac{1}{F_2} (F_{2,9} \cdot \varphi_{2,9-4,10} + F_9 \cdot \varphi_{9-10} - F_9 \cdot \varphi_{9-4,10} - F_{2,9} \cdot \varphi_{2,9-10}). \quad (18)$$

Все угловые коэффициенты, присутствующие в правой части уравнения (18), вычисляются по формуле (12).

Для определения коэффициента облученности  $\varphi_{2-5}$  рассмотрим фигуру, представленную на рис. 4.



- $F_{13}$  – площадь прямоугольника BVV'B'
- $F_{14}$  – площадь прямоугольника VCC'V'
- $F_{15}$  – площадь прямоугольника CTT'C'
- $F_{16}$  – площадь прямоугольника RFF'R'
- $F_{17}$  – площадь прямоугольника FSS'F'
- $F_{18}$  – площадь прямоугольника SEE'S'

Рисунок 4 – Определение коэффициента облученности  $\varphi_{2-5}$

Согласно закону сохранения энергии

$$\varphi_{2-5} = \frac{1}{2F_2} (F_{2,15} \cdot \varphi_{2,15-5,16} - 2F_{15} \cdot \varphi_{15-18} - F_{14} \cdot \varphi_{14-17}); \quad (19)$$

$$\varphi_{2-6} = \frac{1}{F_2} (F_{2,12} \cdot \varphi_{2,12-6,11} + F_{12} \cdot \varphi_{12-11} - F_{12} \cdot \varphi_{12-6,11} - F_{2,12} \cdot \varphi_{2,12-11}). \quad (20)$$

Коэффициенты облученности, определяющие  $\varphi_{2-5}$  и  $\varphi_{2-6}$ , вычисляются по формуле (11).

Из уравнения (17) имеем

$$\varphi_{2-осн} = 0,5 - 0,5(\varphi_{2-1} + \varphi_{2-3} + \varphi_{2-4} + \varphi_{2-5} + \varphi_{2-6}). \quad (21)$$

Согласно соотношению взаимности

$$\varphi_{осн-2} = \frac{F_2}{F_{осн}} \cdot \varphi_{2-осн}. \quad (22)$$

Коэффициент облученности между основаниями призмы

$$\varphi_{осн-осн} = 1 - (\varphi_{осн-1} + \varphi_{осн-2} + \varphi_{осн-3} + \varphi_{осн-4} + \varphi_{осн-5} + \varphi_{осн-6}) = 1 - (2\varphi_{осн-1} + 4\varphi_{осн-2}), \quad (23)$$

где  $\varphi_{осн-1} = \varphi_{осн-4}$ ;  $\varphi_{осн-2} = \varphi_{осн-3} = \varphi_{осн-5} = \varphi_{осн-6}$ .

Теперь коэффициент облученности основания элементами стенки ячейки можно рассчитать, используя найденный коэффициент облученности оснований:

$$\varphi_{осн-dz}(z) = -\frac{F_{осн}}{L_{осн}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{осн-осн}(z). \quad (24)$$

Сравнение коэффициентов облученности, полученных аппроксимацией (8) и методом алгебры угловых коэффициентов, приведено на рис. 5 – 7.

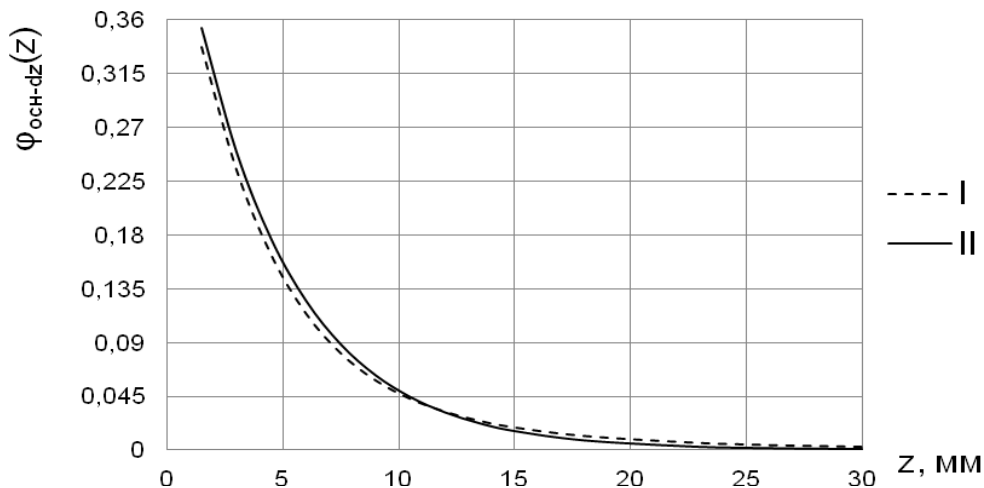


Рисунок 5 – Характер изменения коэффициента облученности  $\varphi_{осн-dz}$  по высоте СЗ (при  $a_c=5$  мм;  $K=1$ ;  $\beta=60^\circ$ ): I – экспоненциальная аппроксимация; II – метод алгебры угловых коэффициентов



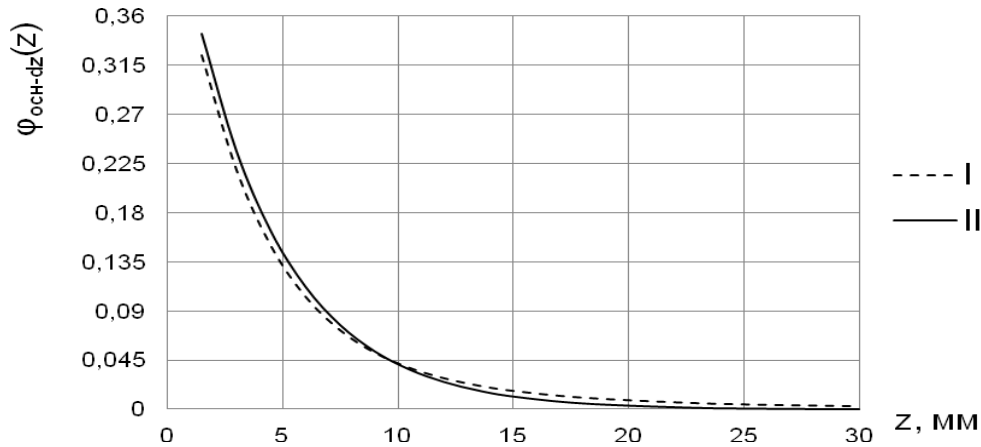


Рисунок 6 – Характер изменения коэффициента облученности  $\varphi_{очн-dz}$  по высоте СЗ (при  $a_c=5$  мм;  $K=1$ ;  $\beta=45^\circ$ ): I – экспоненциальная аппроксимация; II – метод алгебры угловых коэффициентов

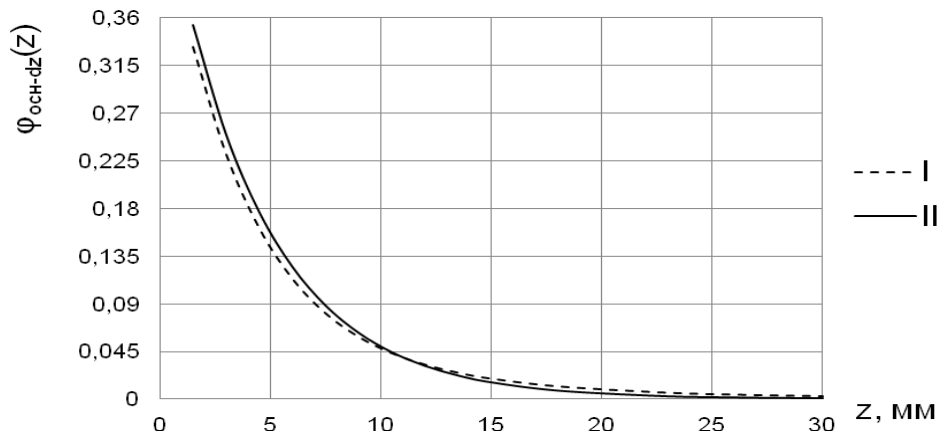


Рисунок 7 – Характер изменения коэффициента облученности  $\varphi_{очн-dz}$  по высоте СЗ (при  $a_c=5$  мм;  $K=1,1$ ;  $\beta=45^\circ$ ): I – экспоненциальная аппроксимация; II – метод алгебры угловых коэффициентов

Различие между величинами коэффициента облученности основания элементами стенки ячейки, полученными экспоненциальной аппроксимацией ядра, предложенной в работе [8] и методом алгебры угловых коэффициентов, не превышает 0,9%. Следовательно, аппроксимация (8) применима также и для сотов неправильной шестигранной формы в плане.

С учетом аппроксимации (8) угловые коэффициенты (6) примут вид

$$d\varphi_{dz-dz'}|z-z'| = \frac{f}{h_{с3}} e^{-2f \frac{|z-z'|}{h_{с3}}} dz';$$

$$\varphi_{очн-dz}(z) = 0,5e^{-2f \frac{z}{h_{с3}}} \cdot \frac{L \cdot dz}{F};$$

$$\varphi_{очн-очн} = e^{-2f}.$$
(25)

Систему уравнений, описывающих рассматриваемую задачу, представим в безразмерном виде посредством замены

$$\xi = \frac{z}{h_{C3}}; \eta = \frac{z'}{h_{C3}}; q = \frac{q_{рез}}{C_0 T_1^4}; \sigma = \frac{C_0 T_1^3 h_{C3}^2}{\lambda_H \delta_H};$$

$$\theta = \frac{T}{T_1}; q_1 = \frac{q_{1рез}}{C_0 T_1^4}; q_2 = \frac{q_{2рез}}{C_0 T_1^4}.$$

Приведение ядра интегрального уравнения лучистого теплообмена (2) к экспоненциальному виду позволило преобразовать его в дифференциальное уравнение второго порядка (27).

С учетом вышеприведенных преобразований уравнения (1) - (4) примут вид

$$\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} - \sigma \cdot q(\xi) = 0; \quad (26)$$

$$\frac{d^2q(\xi)}{d\xi^2} - 4\varepsilon_H f^2 \cdot q(\xi) = \varepsilon_H \frac{d^2\theta^4(\xi)}{d\xi^2}; \quad (27)$$

$$\frac{q_1}{\varepsilon_1} = \theta_1^4 - \left( \theta_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2 \right) e^{-2f} - \int_0^1 \left( \theta^4(\xi) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} q(\xi) \right) 2f \cdot e^{-2f\xi} d\xi; \quad (28)$$

$$\frac{q_2}{\varepsilon_2} = \theta_2^4 - \left( \theta_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 \right) e^{-2f} - \int_0^1 \left( \theta^4(\xi) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} q(\xi) \right) 2f \cdot e^{-2f(1-\xi)} d\xi. \quad (29)$$

Граничными условиями при этом будут:

$$\frac{q(0)}{\varepsilon_H} = \theta_1^4 - 0,5 \left( \theta_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 \right) - 0,5 e^{-2f} \left( \theta_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2 \right) -$$

$$- \int_0^1 \left( \theta^4(\gamma) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} q(\gamma) \right) f \cdot e^{-2f\gamma} d\gamma; \quad (30)$$

$$\frac{q(1)}{\varepsilon_H} = \theta_2^4 - 0,5 e^{-2f} \left( \theta_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 \right) - 0,5 \left( \theta_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2 \right) -$$

$$- \int_0^1 \left( \theta^4(\gamma) - \frac{1-\varepsilon_H}{\varepsilon_H} q(\gamma) \right) f \cdot e^{-2f(1-\gamma)} d\gamma. \quad (31)$$

Линеаризация описывающих задачу двух дифференциальных уравнений второго порядка (26), (27) с граничными условиями (30), (31) и соотношениями (28), (29) относительно  $\theta(\xi) - 1$  позволяет получить решение в замкнутом виде:

$$\theta(\xi) = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2)\xi + C_1 \frac{\sigma [e^{k\xi} - 1 + \xi(1 - e^k)]}{4\varepsilon_H(\sigma + f^2)} + C_2 \frac{\sigma [e^{k(1-\xi)} - e^k - \xi(1 - e^k)]}{4\varepsilon_H(\sigma + f^2)}; \quad (32)$$

$$q(\xi) = C_1 e^{k\xi} + C_2 e^{k(1-\xi)}, \quad (33)$$

где

$$C_i = (-1)^i \frac{2\varepsilon_H(2 - \varepsilon_i)(\sigma + f^2)(\theta_1 - \theta_2)}{f[A_i - (-1)^i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)B_i]};$$

$$A_i = (2 - \varepsilon_i) \left[ \left( \frac{kf}{2} + \frac{\sigma}{f} \right) e^k - \frac{\sigma}{f} + \frac{kf}{2} \right] - \varepsilon_i(\sigma + f^2)(1 - e^k);$$

$$B_i = k \frac{1 - e^k}{2} - \frac{(2 - \varepsilon_i) \left[ \frac{\sigma}{f} - e^k \left( \frac{\sigma}{f} + kf \right) \right] - 2\varepsilon_i e^k (\sigma + f^2)}{(2 - \varepsilon_i) \left[ f\varepsilon_H(2 - \varepsilon_j) - \frac{k\varepsilon_j}{2} \right] - (2 - \varepsilon_j) \left[ f\varepsilon_H(2 - \varepsilon_i) + \frac{k\varepsilon_i}{2} \right] e^k};$$

$$i = 1, 2; \quad j = 3 - i; \quad k = 2\sqrt{\varepsilon_H(\sigma + f^2)}.$$

Эффективную теплопроводность ячейки СЗ вдоль оси z определим следующим образом:

$$\lambda_{эф} = \frac{Qh_{СЗ}}{F(T_1 - T_2)}, \quad (34)$$

где Q – полный тепловой поток, поступающий с нижнего основания ячейки на верхнее:

$$Q = -\frac{\lambda_H \delta_H L T_1}{h_{СЗ}} \cdot \frac{d\theta}{d\xi}(0) + \frac{F \delta_H \lambda_H \sigma T_1}{h_{СЗ}^2} q(0). \quad (35)$$

Использував решение (32), (33), получим выражение для определения эффективного коэффициента теплопроводности СЗ

$$\lambda_{эф} = 4\lambda_H \frac{\delta_H}{h_{СЗ}} [f + D_1 + D_2], \quad (36)$$

где

$$D_i = \frac{\sigma(2 - \varepsilon_i)}{2f} \cdot \frac{f [ke^{k(i-1)} + 1 - e^k] - \varepsilon_H(\sigma + f^2)e^{k(i-1)}}{A_i - (-1)^i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)B_i}.$$

Выражение (36) определяет эффективный коэффициент теплопроводности изолированного СЗ. Как уже указывалось ранее, на теплопроводность сотовых конструкций существенное влияние оказывает клеевая прослойка, связывающая СЗ с НС. Поэтому представляется полезным определить эффективный коэффициент теплопроводности СЗ с клеевой прослойкой на торцах. Для этого синтезируем полученное решение для изолированного СЗ с рассмотренным ранее методом электротепловой аналогии [6].

С точки зрения теплофизики СЗ с клеевой прослойкой на торцах рассмотрим как систему последовательно соединенных термических сопротивлений СЗ и клея (рис. 8).

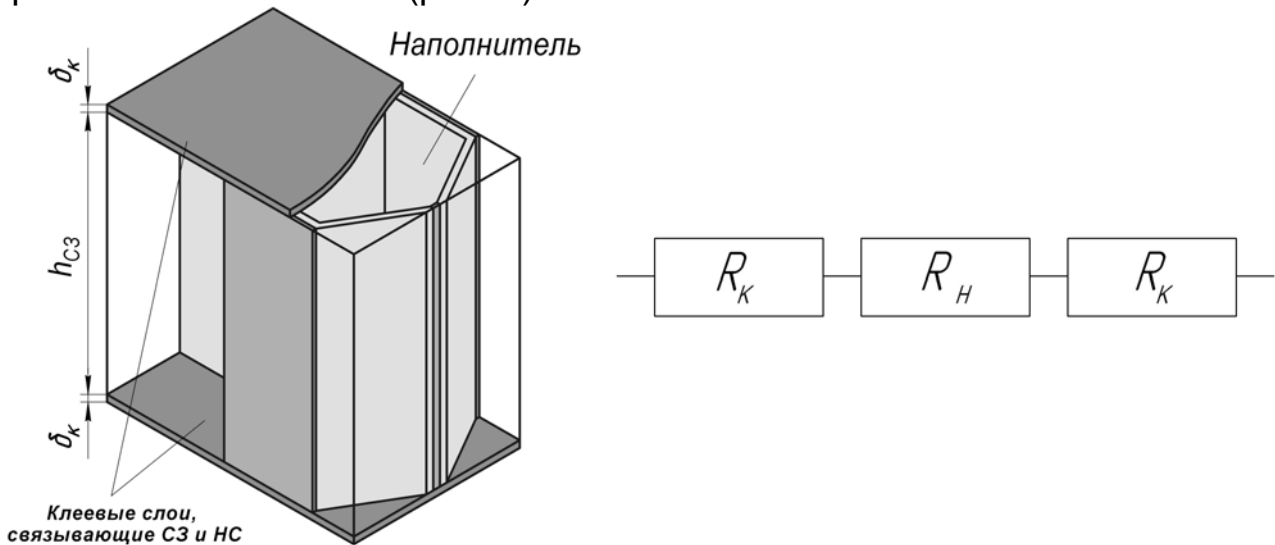


Рисунок 8 – СЗ с клеевой прослойкой и соответствующая ему электрическая схема

Общее термическое сопротивление представленной электрической схемы найдем согласно правилу последовательно включенных соединений:

$$R_{общ} = R_{СЗ} + 2R_k, \quad (37)$$

где  $R_{общ} = \frac{h_{СЗ} + 2\delta_k}{\lambda_{общ}}$  – термическое сопротивление СЗ с клеевой прослойкой;

$$R_k = \frac{\delta_k}{\lambda_k} \text{ – термическое сопротивление клеевого слоя;}$$

$\lambda_k$  – коэффициент теплопроводности клея;

$$R_{СЗ} = \frac{h_{СЗ}}{\lambda_{СЗ}} \text{ – термическое сопротивление СЗ.}$$

Синтезируя формулы (36) и (37), находим эффективный коэффициент теплопроводности СЗ с учетом клеевого слоя, связывающего соты и НС:

$$\lambda_{\text{общ}} = \frac{4\lambda_H\lambda_K\delta_H(h_{\text{СЗ}} + 2\delta_K)(f + D_1 + D_2)}{8\lambda_H\delta_K\delta_H(f + D_1 + D_2) + h_{\text{СЗ}}^2\lambda_K}. \quad (38)$$

На рис. 9 – 12 показаны графики зависимости эффективного коэффициента теплопроводности СЗ от его высоты, размера грани ячейки и различной толщины клеевой прослойки, определенные в соответствии с полученными выше формулами. В качестве материала для СЗ была выбрана алюминиевая фольга толщиной  $\delta_H=0,04$  мм.

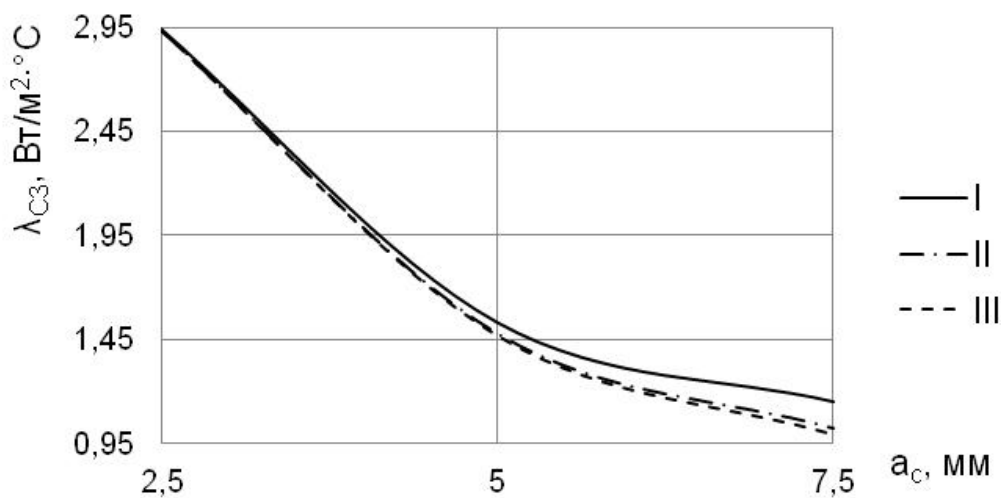


Рисунок 9 – Характер изменения эффективного коэффициента теплопроводности изолированного СЗ в зависимости от величины грани ячейки: I - при  $h_{\text{СЗ}} = 10$  мм; II – при  $h_{\text{СЗ}} = 20$  мм; III - при  $h_{\text{СЗ}} = 30$  мм

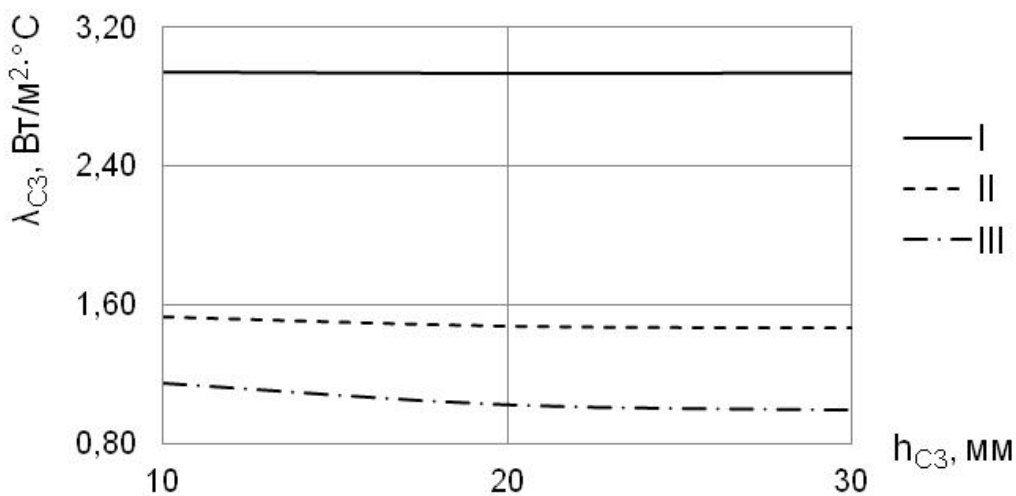


Рисунок 10 – Характер изменения эффективного коэффициента теплопроводности изолированного СЗ в зависимости от его высоты: I – при  $a_c = 2,5$  мм; II – при  $a_c = 5$  мм; III – при  $a_c = 7,5$  мм

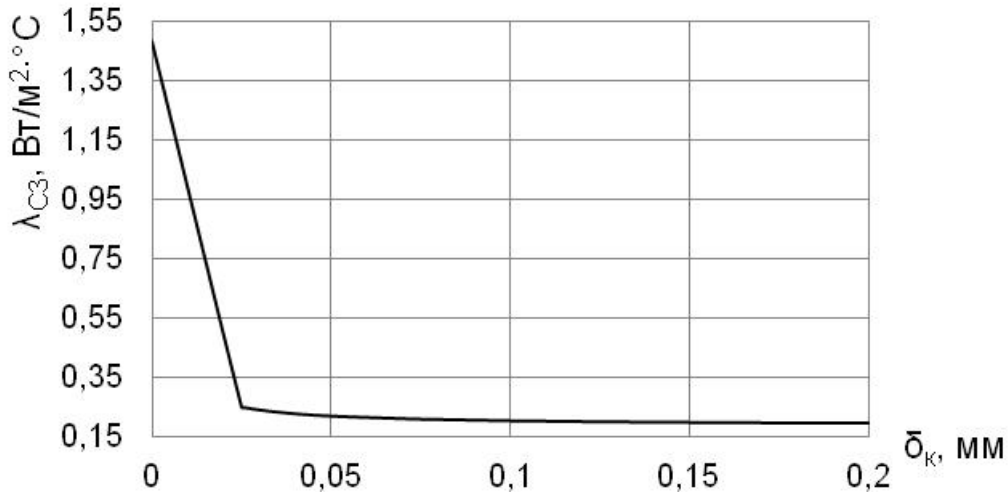


Рисунок 11 – Характер изменения эффективного коэффициента теплопроводности СЗ в зависимости от толщины клеевого слоя, связывающего СЗ и НС ( $h_{C3} = 20$  мм;  $a_c = 5$  мм)

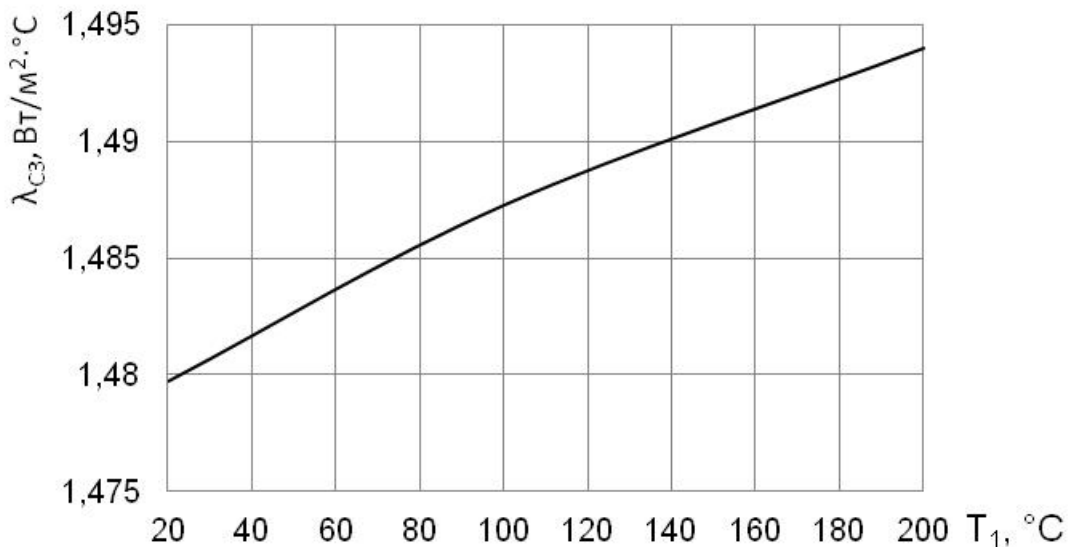


Рисунок 12 – Характер изменения эффективного коэффициента теплопроводности СЗ в зависимости от температуры основания соты ( $h_{C3} = 20$  мм;  $a_c = 5$  мм)

Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы:

1. Эффективный коэффициент теплопроводности СЗ с увеличением размера грани ячейки уменьшается. Так, в рассматриваемом диапазоне изменения величины грани ячейки сотов  $2,5 \leq a_c \leq 7,5$  максимальное и минимальное значения коэффициента теплопроводности СЗ различаются более чем в 2,8 раза.

2. Учет радиационного теплообмена приводит к небольшому уменьшению эффективного коэффициента теплопроводности СЗ с увеличением его высоты. Так, в диапазоне изменения высоты сотов

$10 \leq h_{C3} \leq 30$  мм различие между максимальной и минимальной величинами теплопроводности СЗ не превышает 5%.

3. Существенное влияние на теплопроводность СЗ оказывает клеевой слой, связывающий его с НС. Эффективная теплопроводность СЗ с клеем отличается от теплопроводности изолированного СЗ более чем в 7 раз. Влияние толщины клеевой прослойки незначительно. Так, различие между величинами коэффициента теплопроводности при изменении толщины клеевого слоя в диапазоне 0,1...0,3 мм не превышает 5%.

4. Влияние температуры основания ячейки является незначительным. В заданном диапазоне изменения температуры  $20^{\circ}\text{C} \leq T_1 \leq 200^{\circ}\text{C}$  различие между минимальным и максимальным значениями коэффициента теплопроводности СЗ не превышает 0,9%.

#### Список использованных источников

1. Сотовые заполнители в конструкциях авиационно-космического назначения [Текст] / В.И. Сливинский, В.С. Зевако, Г.В. Ткаченко, О.А. Карпикова // Космічна наука і технологія: наук.-практ. журнал. – К., 2008. – Т. 14, №3. – С. 101 – 107.

2. Белозеров, Л.Г. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях [Текст] / Л.Г. Белозеров, В.А. Киреев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 388 с.

3. Кондратьев, А.В. Проектирование головных обтекателей ракет-носителей из полимерных композиционных материалов при одновременном тепловом и силовом воздействиях [Текст] / А.В. Кондратьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 4 (64). – Х., 2010. – С. 11 – 22.

4. Расчет композитной панели солнечной батареи с сотовым заполнителем при различных случаях ее нагружения [Текст] / В.Е. Гайдачук, А.В. Кондратьев, В.А. Коваленко и др. // Эффективность сотовых конструкций в изделиях авиационно-космической техники: сб. материалов IV междунар. науч.-практ. конф., Днепропетровск 1 – 3 июня 2011 г. / Укр. НИИ технологий машиностроения. – Днепропетровск, 2011. – С. 40 – 53.

5. Панин, В.Ф. Конструкции с заполнителем [Текст] : справ. / В.Ф. Панин, Ю.А. Гладков. – М. : Машиностроение, 1991. – 271 с.

6. Определение эффективного коэффициента теплопроводности сотового заполнителя методом электротепловой аналогии заполнителем [Текст] / В.Г. Тихий, А.В. Кондратьев, А.Г. Смоленко, В.Л. Кириченко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2 (70). – Х., 2012. – С. 66 – 76.

7. Замула, Г.Н. Об эффективной теплопроводности сотового заполнителя [Текст] / Г.Н.Замула // Исследования по теплопроводности; под ред. А.В. Лыкова, Б.М. Смольского. – Мн., 1967. – С. 255 – 261.

8. Замула, Г.Н. Определение эффективной теплопроводности и излучательной способности многослойных и подкрепленных конструкций [Текст] / Г.Н.Замула, С.Н. Иванов // Ученые записки ЦАГИ. – 1970. – Т.1, № 1. – С. 116 – 123.

9. Карпикова, О.А. Сотовый заполнитель из алюминиевой фольги с регулируемыми механическими характеристиками [Текст] / О.А. Карпикова, В.И. Сливинский, Г.В. Ткаченко // Системні технології: Регіональний міжвуз. зб. наук. пр. – Дніпропетрівськ: НМАУ, 2010. – Вип. 3(68). – С. 14 – 19.

10. Спэрроу, Э.М. Теплообмен излучением [Текст] / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. – Л.: Энергия, 1971. – 294 с.

11. Оцисик, М.Н. Сложный теплообмен [Текст] / М.Н. Оцисик. – М.: Мир, 1976. – 616 с.

12. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1965. – 128 с.

*Поступила в редакцию 15.08.2012.*

*Рецензент: д-р техн. наук, ст. науч. сотр. В.И. Сливинский, УкрНИИТМ, г. Днепрпетровск.*