

КОЭФФИЦИЕНТ ДИНАМИЧНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В СОЕДИНЕНИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ. МОДЕЛЬ ФОЛЬКЕРСЕНА

Введение. В работах [1 – 3] показано, что касательные напряжения в клеевом соединении при мгновенно приложенной или ударной нагрузке могут в несколько раз превышать статические. Эксперименты показывают, что даже относительно небольшая скорость нагружения (10 м/с) кардинально влияет на напряженное состояние соединения [4]. Кроме того, интерес представляет исследование напряженно-деформированного состояния соединения при пульсирующей нагрузке и при различных видах вибраций. Актуальность исследования в этом направлении обусловлена рядом причин, среди которых можно выделить следующие:

а) напряжения, обусловленные вибрациями, могут значительно превышать допустимые, особенно в случае возникновения резонанса или биений. В первую очередь это характерно для элементов конструкций, работающих в условиях интенсивных периодических нагрузок, например лопастей винтов, в т.ч. вертолетных [5]. Кроме того, свойства соединения влияют на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) элементов конструкций, что необходимо учитывать при их проектировании;

б) в ряде работ указывается на возможность постоянного контроля элементов конструкций и соединений с помощью установленных пьезокерамических излучателей и датчиков и анализа АЧХ сигнала, прошедшего соединение [6], что подразумевает наличие и исследование соответствующей математической модели;

в) исследования усталостной прочности клеевых соединений также требуют знания динамического напряженного состояния соединения, определить которое в большинстве случаев прямыми методами исследования невозможно, и для анализа результатов экспериментов необходимо использовать математические модели.

В работе [7] решен ряд задач о свободных колебаниях склеенных стержней, однако предложенное решение допускает лишь одинаковые краевые условия для обоих из них, что сужает область применения предложенной методики. В работах [8, 9] решена задача о вынужденных колебаниях, однако собственные частоты колебаний системы не определялись и начально-краевая задача не ставилась. Такой подход допустим лишь в случае высоких диссипативных свойств клея, который полагается вязкоупругим, что также ограничивает область применения предложенного решения.

В настоящей работе клеевая прослойка полагается линейно-упругой, и решается начально-краевая задача. Показано, что в случае

низких диссипативных свойств элементов соединения такой подход является необходимым, поскольку собственные колебания, возникающие в соединении, вносят существенный вклад в напряженное состояние соединения. Для исследования выбрана модель Фолькерсена, согласно которой поперечные перемещения и повороты сечений считаются нулевыми. Такой подход допустим для подкрепленных конструкций, обладающих высокой изгибной жесткостью. В работе [10] рассмотрена подобная модель (с тем отличием, что $l_1 = \infty, L = \infty, l_2 = 0$), для построения решения использовалось интегральное преобразование Лапласа.

Постановка задачи. Рассмотрим двухслойный составной стержень с длиной склейки $2L$, показанный на рис. 1.

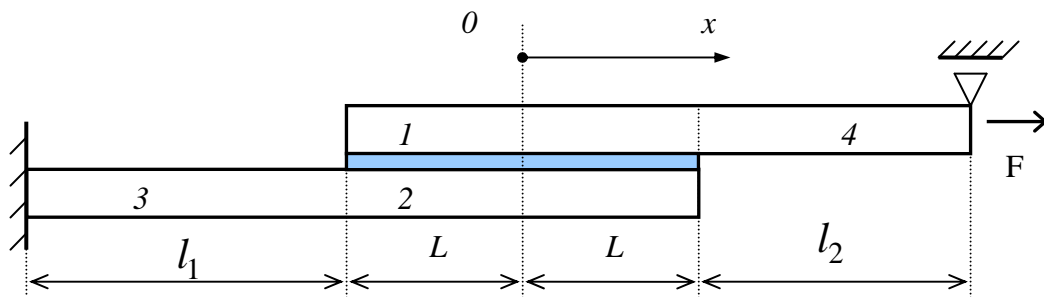


Рисунок 1. – Схема соединения

Толщина первого, второго и соединительного слоев соответственно δ_1, δ_2 и δ_0 (рис. 1). Физический закон считаем линейным:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i, \quad \tau = G \gamma = \frac{G}{\delta_0} (U_2 - U_1),$$

где E_i и ε_i - модуль упругости и деформация i -го слоя ($i = 1, 2$); τ - напряжения в клее; G - модуль сдвига соединительного слоя; γ - относительный сдвиг; U_i - перемещение i -го слоя.

Уравнения равновесия дифференциальных элементов слоев

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \alpha_1 (U_2 - U_1) = \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \alpha_2 (U_2 - U_1) = \gamma_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_i = \frac{G}{\delta_c E_i \delta_i}$; $\gamma_i = \frac{\rho_i}{E_i}$; ρ_i - плотность материала i -го слоя.

Инерционными силами в клеевой прослойке пренебрегаем, поскольку ее толщина, как правило, на порядок меньше толщины соединяемых деталей. Если этого сделать нельзя, то в приближенном реше-

нии можно ее массу разделить поровну между несущими слоями.

На консольных участках колебания стержня описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} = \gamma_j \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $i = 3, 4$.

Граничные условия задаем следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(-L, t)}{\partial x} = \frac{\partial U_2(L, t)}{\partial x} = 0; \quad U_3(-L, t) = U_2(-L, t); \\ \frac{\partial U_3(-L, t)}{\partial x} = \frac{\partial U_2(-L, t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial U_1(L, t)}{\partial x} = \frac{\partial U_4(L, t)}{\partial x}; \\ U_1(L, t) = U_4(L, t); \quad U_3(-L - l_1, t) = 0; \quad \frac{\partial U_4(L + l_2, t)}{\partial x} = \frac{F_0}{B_1} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Здесь ω_0 и F_0 – частота и амплитуда приложенной к соединению нагрузки.

Начальные условия имеют вид

$$U_i|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

т.е. начальные перемещения и скорости отсутствуют.

Вынужденные колебания. Одно из краевых условий является неоднородным. Чтобы исключить его, проведем замену переменных:

$$U_j = u_j + u_j^{(0)} = w_j(x) \sin \omega t + T_j(x) \sin \omega_0 t, \quad (j = 1, \dots, 4), \quad (4)$$

где функции $T_j(x)$ удовлетворяют краевым условиям, в т.ч. и неоднородному, а w_j – однородным, т.е. последнее краевое условие заменяется на однородное

$$\frac{\partial w_4}{\partial x} \Big|_{x=L+l_2} = 0.$$

Подставляя $T_j(x) \sin \omega_0 t$ в (1), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + (\gamma_1 \omega_0^2 - \alpha_1) T_1 + \alpha_1 T_2 = 0; \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + (\gamma_2 \omega_0^2 - \alpha_2) T_2 + \alpha_2 T_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Систему (5) решим матричным способом. Введем матрицу

$$\mathbf{A}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \gamma_1 \omega_0^2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 + \gamma_2 \omega_0^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решение системы (4) имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 C_j \mathbf{g}_j e^{\lambda_j x}, \quad (7)$$

где λ_j – корни уравнения $\det \mathbf{A}(\omega_0) = 0$; \mathbf{g}_j – нетривиальное решение системы линейных уравнений $\mathbf{A}(\omega_0) \mathbf{g}_j = 0$, определяемое с точностью до констант C_j .

На консольных участках решения уравнения движения (2) имеют вид

$$T_3 = C_5 \sin(\omega_0 \sqrt{\gamma_3} x) + C_6 \cos(\omega_0 \sqrt{\gamma_3} x), \quad (8)$$

$$T_4 = C_7 \sin(\omega_0 \sqrt{\gamma_4} x) + C_8 \cos(\omega_0 \sqrt{\gamma_4} x). \quad (9)$$

В результате удовлетворения краевым условиям и условиям сопряжения получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов C_1, \dots, C_8 :

$$\begin{aligned} \frac{dT_1(-L)}{dx} = \frac{dT_2(L)}{dx} = 0; \quad T_3(-L) - T_2(-L) = 0; \\ \frac{dT_3(-L)}{dx} = \frac{dT_2(-L)}{dx}; \quad \frac{dT_1(L)}{dx} - \frac{dT_4(L)}{dx} = 0; \\ T_1(L) - T_4(L) = 0; \quad T_3(-L - l_1) = 0; \quad \frac{dT_4(L + l_2)}{dx} = \frac{F_0}{B_1}. \end{aligned}$$

Собственные колебания. Перемещения при свободных колебаниях u_j также ищем в виде $u_j = w_j(x) \sin \omega t$. В результате подстановки данной формулы в (1) получаем уравнения, аналогичные (4), с тем отличием, что вместо частоты вынужденных колебаний ω_0 в них фигурирует пока неизвестная частота ω . Набор собственных частот ω будет определен ниже исходя из краевых условий и условий сопряжения. Решение полученной системы имеет вид, аналогичный (7):

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 c_j \mathbf{h}_j e^{\lambda_j(\omega) x}, \quad (10)$$

где c_j – константы; \mathbf{h}_j – нетривиальное решение системы линейных уравнений $\mathbf{A}(\omega) \mathbf{h}_j = 0$ (матрица \mathbf{A} приведена выше, см. (6)); $\lambda_j(\omega)$ –

корни уравнения $\det \mathbf{A}(\omega) = 0$.

В свою очередь, аналогично (8), (9)

$$w_3(\omega) = c_5 \sin(\omega \sqrt{\gamma_3} x) + c_6 \cos(\omega \sqrt{\gamma_3} x); \quad (11)$$

$$w_4(\omega) = c_7 \sin(\omega \sqrt{\gamma_4} x) + c_8 \cos(\omega \sqrt{\gamma_4} x). \quad (12)$$

Краевые условия и условия сопряжения для собственных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_1(-L)}{dx} = 0; \quad \frac{dw_2(L)}{dx} = 0; \quad w_3(-L) - w_2(-L) = 0; \\ \frac{dw_3(-L)}{dx} - \frac{dw_2(-L)}{dx} = 0; \quad \frac{dw_1(L)}{dx} - \frac{dw_4(L)}{dx} = 0; \\ w_1(L) - w_4(L) = 0; \quad w_3(-L - l_1) = 0; \quad \frac{dw_4(L + l_2)}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Данная система однородных линейных уравнений относительно коэффициентов $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_8)^T$ может быть записана в матричной форме

$$\mathbf{M}(\omega) \cdot \mathbf{c} = 0. \quad (13)$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если

$$\det \mathbf{M}(\omega) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет бесконечное число корней, которые образуют спектр собственных частот колебаний ω_k . Векторы \mathbf{c} , отвечающие собственным частотам ω_k , определяются с точностью до произвольного множителя (\mathbf{S}), $\mathbf{c}_k = \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}_k = \mathbf{S} \cdot (f_{1,k}, f_{2,k}, \dots, f_{8,k})^T$.

Удовлетворение начальным условиям. Возвращаясь к (4), используя результаты (7) – (9) и (10) – (12), получаем перемещения

$$U_j = T_j \sin \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} (S_k \sin \omega_k t + R_k \cos \omega_k t) w_{j,k}, \quad (j = 1, \dots, 4), \quad (15)$$

где соответственно

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^4 f_{j,k} \mathbf{h}_{j,k} e^{\lambda_j(\omega_k)x}; \\ \begin{pmatrix} w_{3,k} \\ w_{4,k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{5,k} \sin(\omega_k \sqrt{\gamma_3} x) + f_{6,k} \cos(\omega_k \sqrt{\gamma_3} x) \\ f_{7,k} \sin(\omega_k \sqrt{\gamma_4} x) + f_{8,k} \cos(\omega_k \sqrt{\gamma_4} x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Под $\mathbf{h}_{j,k}$ подразумевается $\mathbf{h}_j(\omega_k)$.

Начальные условия (3) описывают приложенную к изначально неподвижному и равновесному соединению синусоидальную нагрузку.

Для поиска констант S_k, R_k используется минимальное свойство ряда Фурье. Т.е. константы находятся из условия минимума среднеквадратического отклонения перемещений и скоростей в момент времени $t = 0$ (3). Ограничим набор частот количеством N и составим функционал

$$\begin{aligned} \Phi = & \int_{-L-l_1}^{-L} \left(\sum_{k=1}^N R_k w_{3,k} \right)^2 dx + \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^N R_k w_{1,k} \right)^2 dx + \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^N R_k w_{2,k} \right)^2 dx + \\ & + \int_L^{L+l_2} \left(\sum_{k=1}^N R_k w_{4,k} \right)^2 dx + \int_{-L-l_1}^{-L} \left(\sum_{k=1}^N S_k \omega_k w_{3,k} + \omega_0 T_3 \right)^2 dx + \\ & + \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^N S_k \omega_k w_{1,k} + \omega_0 T_1 \right)^2 dx + \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^N S_k \omega_k w_{2,k} + \omega_0 T_2 \right)^2 dx + \\ & + \int_L^{L+l_2} \left(\sum_{k=1}^N S_k \omega_k w_{4,k} + \omega_0 T_4 \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Условия минимума функционала $\frac{\partial \Phi}{\partial R_k}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial S_k}$ приводят к $R_k = 0$ и системе линейных уравнений

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{Q}, \quad (17)$$

где $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_N)^T$, а элементы матриц вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{i,k} = & \omega_k \left[\int_{-L}^L \sum_{m=1}^2 w_{m,i} w_{m,k} dx + \int_{-L-l_1}^{-L} w_{3,i} w_{3,k} dx + \int_L^{L+l_2} w_{4,i} w_{4,k} dx \right]; \\ Q_i = & -\omega_0 \left[\int_{-L}^L (T_1 w_{1,i} + T_2 w_{2,i}) dx + \int_{-L-l_1}^{-L} T_3 w_{3,i} dx + \int_L^{L+l_2} T_4 w_{4,i} dx \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, решив систему (17), определяем коэффициенты S_1, \dots, S_N и можем определить перемещения слоев (15) и касательные напряжения в клее.

Численный пример. Рассмотрим соединение со следующими параметрами: $L = 3$ см; $l_1 = l_2 = 10$ см; $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 3$ мм; $\delta_0 = 0,5$ мм; $G = 0,5$ ГПа; $E_1 = 70$ ГПа; $E_2 = 200$ ГПа; $\rho_1 = 2,7$ г/см²,

$\rho_2 = 2 \text{ г/см}^2$. Приложена нагрузка $F_0 \sin \omega_0 t$, где $F_0 = 1 \text{ Н/м}$.

Первые несколько собственных частот колебаний приведены в таблице.

Круговые частоты собственных колебаний

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
44598,2	104173	211334	280194	347635	423175

Для дальнейших расчетов использовались $N = 20$ первых частот. Рассмотрим, как изменяются напряжения в клее при изменении круговой частоты вынужденных колебаний ω_0 начиная от 15000 до 350000 рад/с. В данный интервал попадают пять частот собственных колебаний. Как и следовало ожидать, при приближении ω_0 к частотам собственных колебаний, возникают биения, и максимальная амплитуда колебаний увеличивается. В качестве параметра исследования возьмем коэффициент динамичности касательных напряжений, т.е. отношение **максимальных** динамических напряжений $\max_t \tau(\omega_0, x, t)$ к статическим $\tau_s(x)$, обусловленным статическим усилием F_0 :

$$k = \frac{\max_t |\tau(\omega_0, x, t)|}{\tau_s(x)}.$$

Символ \max_t означает, что максимум ищется по временной координате. Поэтому от времени коэффициент динамичности не зависит.

Кроме того, интерес представляет анализ собственно вынужденных колебаний (10) и вызванных ими напряжений, поскольку за счет диссипации энергии собственные колебания со временем погаснут и останутся только вынужденные. Для их анализа введем коэффициент динамичности вынужденных колебаний

$$k_f = \frac{\tau_d(x)}{\tau_s(x)} = \frac{1}{\tau_s(x)} \max_t \left| \frac{G_0}{\delta_0} (T_1(x) - T_2(x)) \right|.$$

Рассмотрим коэффициент динамичности на концах соединения, поскольку именно напряжения в клее достигают максимума. На рис. 2 показано, как изменяются коэффициенты динамичности напряжений на концах соединения при изменении ω_0 .

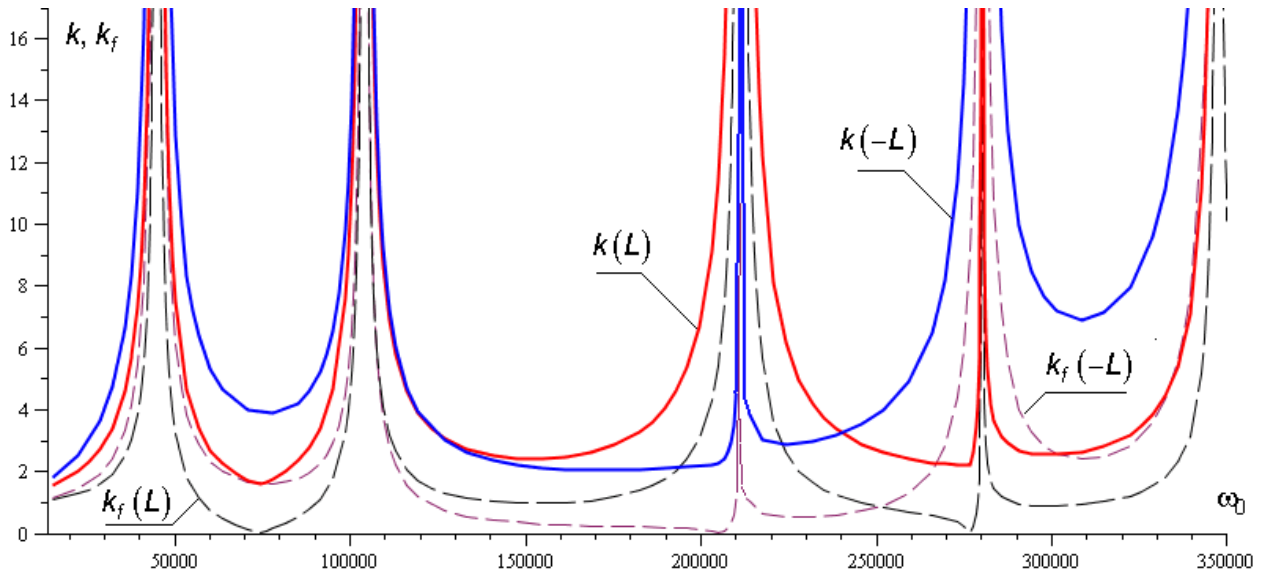


Рисунок 2 – Коэффициенты динамичности

Как видно из приведенных графиков, коэффициент динамичности почти на всем указанном интервале превышает два, значительно увеличиваясь в окрестности резонансных частот. Как и следовало ожидать, коэффициент динамичности вынужденных колебаний существенно меньше, т.е. собственные колебания вносят ощутимый вклад в напряженное состояние соединения.

Графики обнаруживают интересный факт. Для некоторых диапазонов частот напряжения, вызванные только вынужденными колебаниями, могут быть меньше аналогичных статических, т.е. $k_f < 1$. Например, на рис. 3 показаны графики статических напряжений в клее (пунктирная линия) и график напряжений, вызванных вынужденными колебаниями с круговой частотой $\omega_0 = 76681,1$ рад/с.

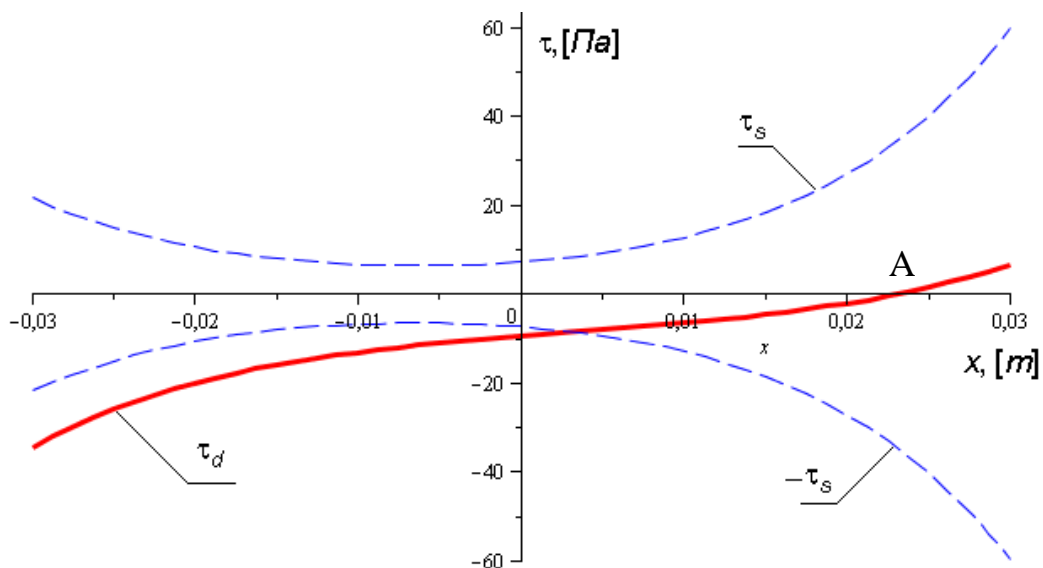


Рисунок 3 – Наименьшие динамические напряжения

Из графика видно, что максимальные статические напряжения, вызванные единичным приложенным усилием, достигают около 60 Па, а вынужденные установившиеся колебания на этой частоте приводят к максимальным напряжениям менее 40 Па. Причина этого заключена в том, что относительные перемещения слоев на определенных частотах ω_0 малы, т.е. слои совершают колебания, имея близкие по амплитуде перемещения, которые могут быть даже равны друг другу (в точке А на рис. 3). Вследствие этого в указанной точке касательные напряжения равны нулю. Т.е. в некоторых диапазонах частот приложенной к соединению нагрузки в напряжениях в клее возникают узлы и пучности, амплитуда в которых ниже, чем максимальные напряжения при статической нагрузке. В других же диапазонах частот возникают биения и резонанс.

Выводы

Решена задача определения напряженно-деформированного состояния соединения под действием гармонической нагрузки. Показано, что собственные колебания могут вносить значительный вклад в напряженное состояние соединения. Кроме того, обнаружено, что в определенных диапазонах частот максимальные напряжения, обусловленные только вынужденными колебаниями (при затухании собственных), могут быть меньше аналогичных статических.

Дальнейшие исследования могут быть направлены:

- на развитие методики проектирования соединений, обеспечивающих несущую способность соединения в заданном диапазоне частот колебаний;
- уточнение модели и включение в нее угла поворота сечений несущих слоев, т.е. изучение связанных продольно-изгибных колебаний при гармонической нагрузке;
- включение в математическую модель диссипации энергии в соединении путем замены упругого физического закона для несущих слоев и клея на вязкоупругое поведение;
- решение задачи о соединении с отслоениями в клее и построении методики решения обратной задачи об идентификации дефектов на основе анализа АЧХ.

Список использованных источников

1. Куреннов, С.С. Напружений стан клейового з'єднання при поздовжньому пружному ударі зосередженої маси [Текст] // Вопросы проектирования и производства летательных аппаратов: сб. науч. тр. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2011. – Вып. 3 – С. 98 – 105.
2. Куреннов, С.С. Колебания составной балки. Модель Голанда-Рейсснера [Текст] // Вопросы проектирования и производства летательных аппаратов: Сб. науч. тр. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2012. – Вып. 1 – С. 93 – 102.
3. Куреннов, С.С. Динамические напряжения в клеевом соединении с консолью. Модель Голанда и Рейсснера [Текст] // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип.3. – С. 245 – 254.
4. Essersi, O., Tarfaoui, M., Boyd, S.W., Meraghni, F. and Shenoï, R.A. Dynamic study of adhesively bonded double lap composite joints. In, 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17), Edinburgh, UK, 27 - 31 Jul 2009.
5. Окончательный отчет по результатам расследования авиационного происшествия. Вертолет Ми-8АМТ RA-22968 // Межгосударственный авиационный комитет, 19.02.2010.
6. Cuc, A. Structural Health Monitoring Of Adhesively Bonded Joints With Piezoelectric Wafer Active Sensors // Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements For the Degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering College of Engineering & Computing University of South Carolina, 2010, P. 266.
7. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластины [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
8. Vaziri, A., Nayeb-Hashemi H., Hamidzadeh H. R. Experimental and analytical investigation of the dynamic response of adhesively bonded single lap joint // J. Vibration and Acoustics. 2004. V. 126(1), P. 84 – 91.
9. Vaziri, A., Nayeb-Hashemi H., Dynamic response of tubular joints with an annular void subjected to a harmonic axial load // Int. J. of Adhesion & Adhesives. 2002. V.22, P. 367 – 373.
10. Sato, C. Dynamic stress responses at the edges of adhesive layers in lap strap joints of half-infinite length subjected to impact loads // Int. J. of Adhesion & Adhesives. 2009. V. 29, P. 670 – 677.

Поступила в редакцию 02.11.2012.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*